ある種の混合整数計画問題への内点法の応用*

沢井 一智[†]・佐伯 修[‡]・辻 毅一郎[‡]

An Application of the Interior Point Method to some Mixed Integer Programming Problems*

Kazunori SAWAI[†], Osamu SAEKI[‡] and Kiichiro TSUJI[‡]

Mixed Integer Programming (MIP) problems are widely used. They are generally solved by the branch and bound method. It requires much calculation time to solve these problems. The first relaxed problems of MIP problems occasionally have several optimal basic solutions. In this paper, we propose a method which is an application of the interior point method to the branch and bound method for these problems. It is shown that the proposed method has an advantage over the conventional method. A numerical study on the optimal operation problem of the cogeneration system which is one of MIP problems shows that the proposed method reduces the number of subproblems and the computational time.

1. 緒論

現在, 様々な分野で 0-1 混合整数計画問題が利用されている. たとえば設備の起動・停止を考慮したシステムの最適運用問題や施設配置問題などがある. これらの問題は, より複雑な問題の部分問題として定式化される場合や対象とするシステムの複雑化などにより大規模化する場合があり, 多くの計算時間を必要としている.

一方, 最適化手法については, 離散変数を扱う問題の中でも全整数計画問題に対して切除平面法の有効性が示されている [1] もの, 混合整数計画問題に対しては有効なカットを生成するのが難しいとされている [2]. そのため別のアプローチとして, 分枝限定法と切除平面法を組み合わせ手法 [3,4] が研究されている. Balas ら [3] は各部分問題でカットを効果的に付加する方法を提案しているが, 分枝限定法よりも計算時間の点で劣る場合もあることが指摘されており, 計算時間の短縮の点から問題がある. また, Van Roy ら [4] は, まず有効なカットを生成し, その後分枝限定法を用いる手法を提案してい

るが, この手法では効果的でない問題も多くあることが指摘されており, 計算アルゴリズムのロバスト性の点で問題がある. このような現状のため, 一般的な 0-1 混合整数計画問題は分枝限定法 [5] を使用して解く場合が多いが, パラメータによっては解が得られるまでに膨大な計算時間を要する場合もあり, 計算時間の短縮ならびに計算アルゴリズムのロバスト性の改善が望まれている.

分枝限定法においては, 通常 0-1 整数変数の一部を 0 または 1 に固定し, 他の 0-1 整数変数を 0 以上 1 以下の連続変数にした緩和問題を解く必要がある. この緩和問題は一般的な線形計画問題であり通常は単体法を用いて解かれる. そこで, この部分に内点法などの高速解法を適用すれば分枝限定法そのものが高速化されると期待できるが, その効果は自明ではない. その理由は, 分枝限定法において単体法を使用する場合, 最初の緩和問題はいわゆるコールドスタートで解き, 2 回目以降の緩和問題は前回得られた解を利用したいわゆるホットスタートで解くからである. 一般に内点法ではホットスタートの効果は大きくない. したがって, 内点法では最初の緩和問題に対しては計算時間の短縮が期待できるものの, 2 回目以降では計算時間短縮効果は期待できない.

しかしながら, 筆者らの経験によるとコージェネレーションシステム最適運用問題 [6] のような問題では, 緩和問題の最適解は複数ある場合が多い. これは, 一部の 0-1 整数変数の目的関数の係数が 0 であるため, 最適解にお

* 原稿受付 2000 年 5 月 1 日

[†] 関西電力 (株) Kansai Electric Power Co. Inc.[‡] 大阪大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Osaka University; 2-1 Yamada-oka, Suita, Osaka 565-0871, JAPAN**Key Words:** interior point methods, branch and bound methods, mixed integer programming problems, optimal operation problems, optimization.

いて0-1整数変数に設定の自由度が生じるためと考えられる。このような問題の特性はコージェネレーションの最適運用問題に限らず発生すると考えられる。このような問題に対し、最初の緩和問題には内点法を、2回目以降の問題には単体法を適用する手法を考える。最初の緩和問題に最適解が複数ある場合、単体法と内点法では必ずしも同一の最適解に到達するとは限らない。とくに内点法では、いわゆる基底回復を施して最適解を求めるため、基底回復に用いる手法によって、異なる最適解に到達させることができる。このことは、2回目以降の分枝・限定操作は、単体法と内点法で異なることを意味している。もし、内点法で2回目以降解くべき緩和問題の数を、単体法を用いる場合より減少させることができれば、内点法の適用により計算時間の短縮ならびにアルゴリズムのロバスト性の改善が達成できるものと考えられる。

本論文では、上述のような特徴を持つ0-1混合整数計画問題を分枝限定法により解く場合、最初の緩和問題に内点法を用いると、基底回復操作のため2回目以降に生成する部分問題の数を減少させることができることを示す。また、提案手法により計算時間の短縮ならびに計算アルゴリズムのロバスト性の改善が図れることをコージェネレーションシステム最適運用問題へ適用した数値実験により明らかにする。

2. 分枝限定法における内点法の応用

2.1 内点法を取り入れた分枝限定法

以下のような0-1混合整数計画問題を考える。

Problem (P)

$$\text{Minimize } c^T x$$

$$\text{Subject to } Ax = b$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n_Z$$

$$x_i \geq 0, \quad i = n_Z + 1, \dots, n$$

ここで、 $A \in R^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = m$, $b \in R^m$, $c \in R^n$ である。

この問題(P)を分枝限定法を用いて解く場合、まず問題(P)のすべての0-1整数変数を0以上1以下の連続変数とした緩和問題(P')を生成する。

Problem (P')

$$\text{Minimize } c^T x$$

$$\text{Subject to } Ax = b$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_Z$$

$$x_i \geq 0, \quad i = n_Z + 1, \dots, n$$

分枝限定法では、最初に問題(P)の連続緩和問題(P')を解く。緩和問題が実行不可能であるとき、および緩和問題の最適解が現段階の暫定解以上であるときは、元の問題の最適解がその部分問題の配下にはないので見切りを行う。また、0-1整数変数の値がすべて0または1であり、現段階で最もよい目的関数値を持っているならば、その解を暫定解とする。つぎに、緩和問題の最適解で0と1の間の値をとっている0-1整数変数が存在する場合は、その0-1整数変数を選択し、0または1に固定

した部分問題を新たに生成する(分枝操作)。以降、未処理の部分問題がなくなるまで再帰的に上述の操作を繰り返す。以上が分枝限定法の基本的な手順である。分枝限定法では部分問題の選択方式ならびに分枝変数の選択方式が実行時間に大きな影響を与えることが知られているが、個々の問題の構造に依存する場合が多く一般の場合に普遍的によいと認められている選択方式はない[7]。本論文では、分枝変数の選択方式として対象問題の0-1変数のうち0でも1でもない変数のなかから添字順に選ぶ方式を用いる。また、未処理の部分問題の選択方式には深さ優先則や最良下界則が有名であるが、記憶すべき情報量が少ない等の利点のある深さ優先則を用いる。

2回目以降の部分問題は、親の緩和問題の最適基底を初期基底として緩和問題の最適解を求めることが可能である。そのため、ホットスタートによる高速化が期待できる。つまり、計算時間を最も必要とする問題はホットスタートが利用できない最初の緩和問題である。そこで本論文では、分枝限定法の最初の緩和問題のみに内点法を利用し、2回目以降ではホットスタートが利用できる単体法を利用する。単体法を利用するためには、2回目スタート時の最適基底を出す処理が必要となってくる。その方法は以下のとおりである。まず内点法で得られた最適解から基底変数の候補を選択し、得られた基底解が最適解でない場合はピボット操作を繰り返し最適基底を算出する。このように内点法で得られた最適解から最適基底を導出する処理を以後基底回復と呼ぶ。また、内点法にはさまざまな種類のものが提案されているが、理論的な収束特性が良いことや実際の問題での計算時間が短いこと、ならびに任意の内点を初期点とすることが可能であることから現在広く利用されているプレディクタ・コレクタ法[8]を用いる。

Fig. 1に本論文で用いる内点法を適用した分枝限定法の処理フローを示す。

Fig. 1 Flowchart of the proposed method with the interior point method

2.2 単体法に対する内点法の優位性

緩和問題の最適解が複数存在する 0-1 混合整数計画問題に内点法を応用した場合、基底回復での基底の選択方式により得られる最適端点が変わるものと考えられる。分枝限定法では、0 と 1 の間の値をとる 0-1 整数変数を 0 または 1 に固定した部分問題を順次生成する。そのため、基底回復でより多くの 0-1 整数変数が 0 または 1 の値になるような最適端点を導出することで 2 回目以降での部分問題の生成を抑制できるものと考えられる。一方、単体法の最適解からは、部分問題生成数を減少させるような最適端点を導くのは困難であると考えられる。このことを以下に示す。

まず、以下のような一つの 0-1 整数変数 (x_1) を含む混合整数計画問題 (MIP) を考える。この問題で x_1 を 0 以上 1 以下とした連続緩和問題は最適解を複数もっており、Fig. 2 のような最適平面上のすべての点が最適解となる。

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize } x_3 \\
 & \text{Subject to } 2x_1 + x_2 - x_4 = 1.2 \\
 & \quad x_1 + 2x_2 - x_5 = 1.2 \\
 & \quad x_1 - x_2 + x_6 = 0.6 \\
 & \quad x_1 + x_2 + x_7 = 1.7 \\
 & \quad 2x_1 - x_2 + x_8 = 1.6 \\
 & \quad x_1 + 2x_2 + x_9 = 2.5 \\
 & \quad -2x_1 + 3x_2 + x_{10} = 2 \\
 & \quad x_1 + s_1 = 1 \\
 & \quad x_1 \in \{0, 1\} \\
 & \quad x_i \geq 0, \quad i = 2, \dots, 10 \\
 & \quad s_1 \geq 0
 \end{aligned}$$

問題 (MIP) の制約条件はすべて等式制約となっており、0-1 整数変数については以下の制約が課せられている。

$$(0\text{-}1 \text{ 整数変数}) + (\text{スラック変数}) = 1$$

内点法の最適解から基底回復を行う場合、この 0-1 整数変数およびスラック変数のどちらかを非基底にすることで 0-1 整数変数は 0 または 1 の値となる。一方、単体法の最適解から、多くの 0-1 整数変数もしくはスラック変数を非基底にするには、以下の方法が考えられる。

- 単体法で最適解を求めた後、最適性条件を維持したまま、0-1 整数変数もしくはそのスラック変数を基底からはずし、連続変数を基底に入れるピボット操作を行う。

この方法により、一回のピボット操作で必ず連続変数を基底に入れ 0-1 整数変数もしくはそのスラック変数を基底からはずすことができる。しかし、この方法を用いても問題 (MIP) の場合、単体法の最適解から部分問題生成数を削減する最適端点にはたどりつけないことを以下に示す。

単体法の最適解 (①) では、0-1 整数変数およびそのス

Fig. 2 Basic variables of each optimal basic solution

ラック変数はどちらも基底になっている。また、部分問題生成数を削減する最適端点 (③, ④) では、いずれも 0-1 整数変数が基底に入って、スラック変数が非基底となっている。単体法の最適解 (①) からは連続変数同士を入れ替えなければ、隣接端点には移動できない。すなわち前述の移動手順では、①→②, ①→⑦へは移動できず、解③, 解④には到達できない。一方、内点法の最適解は理論上最適平面の中心部のいわゆる解析的中心に収束する [9]。本論文の内点法では、ステップ幅を長くするなど高速化のための改良を行っており、必ずしも理論上の収束点に収束する保証はないが、我々の経験上大きく逸脱することはない。そのため、図に示したように、最適平面の中心部に収束した最適解から基底回復を工夫することで最適端点③への移動が可能となる。

つまり、内点法の最適解からは導出するのが可能であると考えられ、かつ部分問題数が抑制される端点に単体法の最適解から移動させるのは困難と考えられる。よって、最初の緩和問題を高速に解くだけでなく、部分問題生成数を減少させるような最適端点を得ることができるという点でも、内点法は単体法に対して優位であると考えられる。

2.3 基底回復方式

この節では、基底回復の方式として以下に述べる A, B, C の三つを考える。

方式 A では、1 回目の緩和問題の最適解で値の大きなものから順に並べ、制約の数だけ順次基底に選ぶ。従属変数がある場合は、基底には入れないものとする。つぎに、得られた基底が実行可能でない場合、ピボット操作を繰り返して最適基底を求める。この基底回復方式では、内点法の最適解で 1 より大きい連続変数が多い場合、連続変数が優先的に基底に選ばれていくため、0-1 整数変数およびそのスラック変数は基底からはずれ、部分問題の生成数が少なくなるものと考えられる。

方式 B では、正の値をもつ連続変数を値の大きい変数から順に基底の候補に選ぶ。つぎに、正の値をもつ 0-1 整数変数およびスラック変数を値の大きい順に並べその

順に基底に追加する．選択した変数の数が制約式の数に満たない場合は，さらに最適解で0と判定されたすべての変数を値の大きい順に選択する．方式Aと同様得られた基底が実行可能ではない場合，ピボット操作を繰り返し最適基底を求める．この方式では，多くの0-1整数変数およびスラック変数を，最適解のとり値に依存せずに基底からはずすことができ，部分問題生成を抑制できるものと考えられる．

方式Cは，方式Bで値が0と判定された変数の優先順位を変更したものであり，対応する列の要素数が少ない順に並び替えて，その順に基底の候補にする方式である．この方式では，基底行列に含まれる非零要素数を少なくすることで2回目以降の計算時間の削減が期待できる．

方式B, Cでは，緩和問題の最適解で正の値をもつ変数と0の値をとる変数とに分割する必要がある．プレディクタ・コレクタ法を用いた場合，この分割を求める手法が参考文献[10]で示されている．本論文では，内点法収束時の x および s の各要素の値により，以下の条件を満たす場合に変数 x_j は正の値をもつものと判定する．

$$|x_j - x'_j| / x'_j \leq |s_j - s'_j| / s'_j, \quad j \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

ここで， x_j, s_j はそれぞれ内点法収束時の主変数および双対スラック変数の値であり， x'_j, s'_j は1計算サイクル前の値である．

3. 数値実験による効果の検証

0-1混合整数計画問題として定式化されたガスタービンを主機とするコージェネレーションシステムの最適運用問題に対して提案手法を適用した結果について述べる．

3.1 対象問題

コージェネレーションシステムとして，蒸気の利用方法がそれぞれ異なるガスタービン排熱ボイラシステム，コンバインドサイクルシステムの2種類のシステムを対象とした．目的関数には，1日24時間帯で考えた入力エネルギー（電力および都市ガス）コストおよび各機器の起動・停止費を考慮した．また，制約には対象システムを構成する各機器の入出力関係，入力量の上下限制約，および需給バランス制約を考えた．

以下に数値実験の対象問題の定式化を示す[6]．なお制約条件では，表記を簡単にするため，時間帯を示す添字 t は省略している．

● 目的関数(最小化)

$$\sum_{t=1}^{24} \left\{ C_b e_b^t - C_s e_s^t + C f^t + \sum_{i=1}^N C_{Li} |\delta_i^t - \delta_i'^t| \right\}$$

● 制約条件

－ 入出力関係と入力量の上下限制約

$$y_{ik} = a_{ik} x_i + b_{ik} \delta_i \quad (k = 1, \dots, K_i)$$

$$\underline{x}_i \delta_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \delta_i$$

$$\delta_i \in \{0, 1\}$$

－ 需給バランス制約

$$\sum_i q_i^C = Q^C$$

$$\sum_i q_i^{HO} = \sum_i q_i^{HI} + Q^H$$

$$e_b + \sum_i e_i^O = E + e_s + \sum_i e_i^a$$

$$f = \sum_i f_i$$

ただし，

K_i : 機器 i の特性式の数

x_i : 機器 i の入力量，これは f_i, e_i^I, q_i^{HI} のいずれかの変数である

y_{ik} : 機器 i の k 番目の特性式の出力変数，これは $e_i^a, e_i^O, q_i^C, q_i^{HO}$ のいずれかである

i : 機器の識別子

t : 時間帯を表す添字

N : 機器の総数

C_b : 買電の従量料金単価 [円/MWh]

C_s : 逆送電力の従量料金単価 [円/MWh]

C_{Li} : 機器 i の起動・停止時損失エネルギーコスト [円/回]

C : 都市ガスの従量料金単価 [円/t]

a_{ik}, b_{ik} : 機器 i の k 番目の動作特性を表す定数

δ_i : 機器 i の運転・停止を表す0-1整数変数

δ_i' : 前時刻における δ_i

f : 都市ガス消費量 [t]

f_i : 機器 i の入力ガス量 [t]

$\underline{f}_i, \bar{f}_i$: 入力ガス量の下限値および上限値 [t]

e_i^X : 機器 i の入力・出力電力量 [MWh] ($X \in \{I, O\}$)

e_i^a : 機器 i の補機電力量 [MWh]

e_b : 買電量 [MWh]

e_s : 逆送電力量 [MWh]

E : 電力需要量 [MWh]

$\underline{e}_i^I, \bar{e}_i^I$: 機器 i の入力電力量の下限値および上限値 [MWh]

q_i^C : 機器 i の冷水出力量 [Gcal]

Q^C : 冷房需要量 [Gcal]

q_i^{HX} : 機器 i の温水または蒸気入力・出力量 [Gcal] ($X \in \{I, O\}$)

Q^H : 暖房・給湯需要量 [Gcal]

$\underline{q}_i^{HI}, \bar{q}_i^{HI}$: 機器 i の温水または蒸気入力量の下限値および上限値 [Gcal]

コージェネレーションシステムの構成や発電機台数および需要パターンの異なる，24個の最適運用問題を対象問題とした．Table 1に問題の制約条件，変数，0-1整数変数の数を示す．ここで，問題の1番目の文字はシステム方式を表し，g, cはそれぞれガスタービン排熱ボイラシステム，コンバインドサイクルシステムである．また，2番目の数字はシステム内の発電機台数，3番目の

文字は需要を表し, w, a, u はそれぞれある住宅地の平日, 土曜, 日曜の需要を, i は事務所の需要 [6] を示している. なおシステム内の各機器台数は発電機台数および需要に合わせて設定している. 数値実験は SPECint95 が 6.26, SPECfp95 が 9.06 のワークステーション上で行った. なお分枝限定法は, ネットワーク上で公開されている netlib の lp-solve Ver.2.0 パッケージを用いた.

Table 1 Size of problems

Problem	m	n	n_Z	Problem	m	n	n_Z
glw	1,752	2,376	192	clw	1,920	2,568	216
gla	1,752	2,376	192	cla	1,920	2,568	216
glu	1,752	2,376	192	clu	1,920	2,568	216
gli	1,464	1,944	144	cli	1,632	2,232	168
g2w	2,112	2,832	240	c2w	2,376	3,216	288
g2a	2,112	2,832	240	c2a	2,376	3,216	288
g2u	2,112	2,832	240	c2u	2,376	3,216	288
g2i	1,776	2,352	192	c2i	2,040	2,856	240
g3w	2,424	3,240	288	c3w	2,448	3,336	312
g3a	2,424	3,240	288	c3a	2,448	3,336	312
g3u	2,424	3,240	288	c3u	2,448	3,336	312
g3i	2,232	2,976	264	c3i	2,448	3,336	312

m : number of constraints, n : number of all variables
 n_Z : number of 0-1 variables

3.2 部分問題生成数の減少

部分問題の生成数を抑制するためには, 2 回目スタート時に 0 または 1 の値をとる 0-1 整数変数の数を多くすることが効果があるものと考えられる. また, 2 回目スタート時に 0 または 1 の値をとる 0-1 整数変数の数が多いほど, 基底となる整数正変数の数は少なくなっているものと考えられる. (ここで, 整数正変数とは最適解で正の値をもち得る 0-1 整数変数およびそのスラック変数のことをいう.) 基底回復方式 B は基底に入る整数正変数を抑制することを目指した方式である. そこで, 方式 B による効果を調べるため, 問題 g を各方法を用いて解いた場合の, 2 回目スタート時に基底に入っている整数正変数の数を Fig. 3 に示す. なお, 問題 c についても問題 g と同様の結果となった.

Fig. 3 より, 方式 B では lp-solve に比べすべての問題で基底に入っている整数正変数が少なくなっていることがわかる. また, 方式 A と比べた場合でも, 基底に入っている整数正変数の数が同じかもしくは少なくなっている. 方式 C では, 基底回復における正の値を持った変数に対する優先順位が方式 B と同じであるため, 基底に入っている整数正変数は同一であり, 2 回目スタート時点での解は同じであった. この図により, 方式 B, C によって基底に入る整数正変数の数が抑制できることが確認できた.

つぎに, 各方式の生成した部分問題数を Fig. 4 に示す. なお方式 B と方式 C は, すべての部分問題について最適

Fig. 3 The number of integer and the slack variables in basis

Fig. 4 The number of the generated subproblems

解が同じになった. そのため, 同一の分枝木となりすべての問題において部分問題生成数が一致した.

Fig. 4 より, 方式 B がすべての問題に対して部分問題生成数が最も少なくなっていることが確認できる. これは Fig. 3 に示したように基底に入る整数正変数の数を少なくできたことで, 2 回目スタート時に 0 または 1 の値をとる 0-1 整数変数の数が多くなったためと考えられる. また Fig. 4 から方式 A でも lp-solve に比べて部分問題生成が抑制できていることが分かる. 方式 A の基底回復は, 内点法で得られた最適解の値の大きなものから優先的に基底に選択していく方式である. 方式 A で部分問題が削減されるのは, 内点法の最適解で 1 より大きい値をもつ連続変数が多い場合と考えられる. そこで, 緩和問題の最適解において 1 より大きい連続変数が多い場合に, 部分問題生成数が少なくなることを示す. 内点法の最適解で正の値を持つ変数の数に対する 1 より大きな値をもつ連続変数の数の割合ならびに lp-solve に対する方式 A, 方式 B の部分問題削減率の関係を Fig. 5 に示す. Fig. 5 を見ると, 需要パターンとして w, a, u を用いた問題の多くで, 正の値をもつ変数の 50%前後が 1 より大きい連

続変数であることが分かる．そのため、これらの問題では方式Aを用いることで基底回復で多くの連続変数が優先的に基底に選ばれ、部分問題生成数が方式Bと同程度削減されたものと考えられる．一方、需要パターン*i*を用いた問題では、1より大きい変数の割合が20%程度である．これらの問題でも、方式Aがlp-solveより部分問題生成数が減少しているが、この問題に連続変数から優先的に基底に選ぶ方式Bを用いることにより、さらに部分問題生成数が削減できていることが確認できる．よって、方式Bは最適解の値の大きさによらず部分問題削減効果があり、数値的にロバストな方式であると考えられる．

Fig. 5 The reduction rate of the generated subproblems

3.3 計算時間短縮効果

本節ではlp-solveと方式A, B, Cを比較し、内点法による計算時間の短縮効果を確認する．また、方式A, B, Cの優劣についても考察する．問題g, 問題cにおける計算時間をそれぞれFig. 6, Fig. 7に示す．

各手法での計算時間の内訳が分かるように、lp-solveでは1回目、2回目以降にかかる計算時間に、方式A, B, Cでは1回目、基底回復、2回目以降にかかる計算時

Fig. 6 Calculation time (Problem g)

Fig. 7 Calculation time (Problem c)

間に分けて示す．また図中の‘S’はlp-solveを表し、‘A’、‘B’、‘C’はそれぞれ方式A, B, Cを表す．

Fig. 6, Fig. 7を見ると、方式A, B, Cを用いることでlp-solveに比べ、すべての問題で全体の計算時間が削減されていることが分かる．これは、内点法を用いることで1回目にかかる計算時間を半分程度にできたことや生成する部分問題数を削減できたこと、および2回目以降の計算時間が削減できたためである．計算時間削減効果が最も大きいと考えられる方式Cとlp-solveを比較した場合、約30%から80%の計算時間が削減されている．

つぎに各方式ごとの比較を行う．まず、方式Aと方式Bを比較した場合、方式Bはすべての問題で方式Aより計算時間が短くなっている．とくに、部分問題生成数が削減されているgli, g2i, g3iでは、計算時間も大きく削減されている．

また、方式Bと方式Cを比較した場合、すべての問題で方式Cのほうが計算時間が短く、とくに、2回目以降の計算時間の差が大きいことが分かる．方式Cは、基底行列に含まれる要素数をできるだけ少なくする方式である．そこで2回目スタート時での基底行列の非零要素数が2回目以降の計算時間に影響していることを確認する．

Fig. 8に、方式Bと方式Cで2回目スタート時の基底行列の列シングルトンの数の差と方式Bに対する方式Cの2回目以降の計算時間削減率の関係を示す．なお横軸は方式Cの列シングルトン数から方式Bの列シングルトン数を差し引いたものを列全体の大きさを割ってスケールリングしたものである．

Fig. 8から、列シングルトン数の差が大きくなると2回目以降の計算時間削減率が大きくなる傾向にあることが分かる．問題別にみても、問題gでは点が右上まであるのに対し、問題cでは左下にかたまっており、問題によって方式Cの効果が大きく異なっている．また、列シングルトンの数の差がない場合でも計算時間に10%程度の差が生じている問題があるが、これは列シングルトン以外の非零要素数の削減による計算時間の削減効果と

Fig. 8 The relationship between the number of the singleton columns and the reduction rate of calculation time

考えられる。以上のことから、方式Cを用いることで基底行列の非零要素数を少なくし、それにともない列シングルtonsの数を多くでき、2回目以降の計算時間削減に貢献していることが確認できた。

4. 結論

本論文では、緩和問題の最適解が複数存在する問題を分枝限定法により解く場合、最初の緩和問題に内点法を用い、内点法の基底回復を工夫すると、2回目以降生成する部分問題の数を減少させる端点を導くことができることを示した。一方、単体法を用いるといった最適解を見つけてから、部分問題生成数を減少させる最適端点を導くのは困難であることを確認し、単体法に対する内点法の優位性を示した。またコージェネレーションシステム最適運用問題に対する数値実験により、単体法のみを用いたlp-solveに対し、内点法を用いた手法のすべての方式で部分問題生成数が削減されることを示した。計算時間では、lp-solveに対し内点法を用いた手法すべてで計算時間が削減され、1回目の緩和問題の計算時間を削減できたこともあり、最も効果が表れる方式Cではlp-solveに対し、全体で約30%から約80%の計算時間が削減された。

本研究の一部は日本学術振興会未来開拓学術研究推進事業(JSPS-RFTF97P01002)による援助を受けて行われた。

参考文献

- [1] C. Ceria, C. Cordier, H. Marchand and L. A. Wolsey: Cutting plane for integer programs with general integer variables; *Mathematical Programming*, Vol. 81, pp. 201–214 (1998)
- [2] X. -Q. Yan and E. A. Boyd: Cutting planes for mixed-integer knapsack polyhedra; *Mathematical Programming*, Vol. 81, pp. 257–262 (1998)
- [3] E. Balas, S. Ceria and G. Cornuejols: Mixed 0–1

programming by lift-and-project in a branch and cut framework; *Management Science*, Vol. 42, pp. 1229–1246 (1996)

- [4] T. J. Van Roy and L. A. Wolsey: Solving mixed 0–1 programs by automatic reformulation; *Operations Research*, Vol. 35, pp. 145–163 (1987)
- [5] O. Guieu and J. W. Ghinneck: Analyzing infeasible mixed-integer and integer linear programs; *INFORMS journal on Computing*, Vol. 11, pp. 63–77 (1999)
- [6] 伊東, 横山: コージェネレーションの最適計画, 産業図書 (1993)
- [7] 坂和: 離散システムの最適化, 森北出版 (2000)
- [8] S. Mehrotra: On the implementation of a primal-dual interior point method; *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 2, No. 4, pp. 575–601 (1992)
- [9] C. Roos, T. Terlaky and J. -Ph. Vial: *Theory and Algorithms for Linear Optimization*, John Wiley & Sons Ltd (1997)
- [10] S. Mehrotra and Y. Ye: Finding an interior point in the optimal face of linear programs; *Mathematical Programming*, Vol. 62, pp. 497–515 (1993)
- [11] 日本コージェネレーションセンター: コージェネレーションシステム年間動向レポート (1998年度), 日本コージェネレーションセンター (1999)