倒立振り子・台車系の部分的適応制御*

深尾 隆則[†]・足立 紀彦[†]

Partially Adaptive Control of an Inverted Pendulum and Cart System*

Takanori FUKAO[†] and Norihiko ADACHI[†]

It is difficult to apply the existing adaptive control methods to an inverted pendulum and cart system if it is assumed that all physical parameters are unknown, because the number of control inputs is less than that of outputs. Regarding the inverted pendulum system, the parameter uncertainties of the cart are larger than those of the pendulum. In this paper, the partially adaptive control system is designed considering that the parameter uncertainties exist only in the cart. The inverted pendulum and cart system is divided into the known part which includes only the parameters of the pendulum and the unknown part which includes the parameters of the cart. Therefore, LQ control is applied to the known part and adaptive control treats the unknown part based on the backstepping technique. Finally, the experimental results are provided and the usefulness of this technique is confirmed.

1. はじめに

倒立振り子・台車系の制御問題は制御系設計法の有効性を示す例題としてよく用いられる [1-5]. これは一入力により振り子の角度と台車の位置という二出力を制御する問題となるが, このような出力数より入力数が少ない問題に対処可能な適応制御手法はいまだ確立されていない. このため, 適応制御による倒立振り子・台車系の制御系設計法はあまり見られない. 現在までに実験的に行われた方法 [6] は, 理論的には証明できない. これは物理パラメータをすべて未知として, 現在までに提案されている適応制御手法を適用しようとするところに限界があるためである. しかし, 倒立振り子・台車系においては, パラメータの不確かさは台車に関するものが大きく, 振り子に関するものは事前に簡単に計測可能であり, 状況による変化もほとんどないことがわかる.

そこで本論文では, 台車系のパラメータだけを未知と考え, バックステッピング法 [7] を基に部分的に適応制御を用いることにより倒立振り子・台車系に対するコント

ローラを設計する. これは, システムのダイナミクスを分離し, 入力に近い側に未知パラメータを配置可能なために達成可能である. また, パラメータ調整則の数も必要最小限である. なお, 筆者らの以前の研究 [8] では, 同様な方法をアクティブサスペンションに H_∞ 制御との組合せで適用し, 良好な結果を得ている.

以下, 本論文の構成を示す. 2. では本手法の基であるバックステッピング法について述べ, システムの既知部分に LQ 制御, 未知部分に適応制御を行う方法を示す. つぎに, 3. で部分的適応制御手法を倒立振り子・台車系に適用する. 4. で実機実験を行った結果を示し, 5. でまとめを述べる.

2. 部分的適応制御

まず, 一入力システムに対するバックステッピング法 [7] について以下に述べる.

【定義 1】 (η -g.r.f.)

次のシステム

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in R^n, u \in R \quad (1)$$

に対して, フィードバック制御則 $u = \alpha_1(x)$ が $x(t)$ の大域的有界性と $\eta(x)$ のレギュレーションを達成するとき, その制御則は η -globally regulating feedback (η -g.r.f.) と呼ばれる. さらに, 正定関数 $W(\eta)$ が存在して, 以下

* 原稿受付 2000 年 6 月 20 日

[†] 京都大学 大学院 情報学研究科 Graduate School of Informatics, Kyoto University; Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501, JAPAN

Key Words: partially adaptive control, backstepping, inverted pendulum and cart system.

の不等式を満たすとき、 $\alpha_1(x)$ は $V_1(x)$ に関する η -g.r.f. という。

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}(x)\{f(x)+g(x)\alpha_1(x)\} \leq -W(\eta(x)) \leq 0, \quad \forall x \in R^n \quad (2)$$

ここで、 $V_1(x)$ は正定かつ放射状に非有界である。□

この定義を用いて、バックステッピング法に関する補題 [7] は以下のように示される。

【補題 1】 (Integrator Backstepping)

システム (1) を拡張した次のシステムを考える。

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi \quad (3)$$

$$\dot{\xi} = u, \quad \xi \in R \quad (4)$$

もし $\alpha_1(x)$ が $V_1(x)$ に関して η -g.r.f. であるならば、次のフィードバック制御則 $u = \alpha_2(x, z)$

$$\alpha_2(x, z) = -z + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(x)\{f(x) + g(x)(\alpha_1(x) + z)\} - \frac{\partial V_1}{\partial x}(x)g(x) \quad (5)$$

は (η, z) -g.r.f. である。ここで、

$$z = \xi - \alpha_1(x) \quad (6)$$

□

このようにシステム (3) において、 ξ を入力とみなして (2) 式を満足する理想的なフィードバック則 $\alpha_1(x)$ をまず求め、 ξ と $\alpha_1(x)$ との誤差 z を 0 とするためにリアプノフ関数に基づき実際の制御入力を決定する。

以下では、このバックステッピング法により、システムの既知部分に LQ 制御、未知部分に適応制御を結びつける。

次の一入力システムを考える。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u \quad (7)$$

ここで、 A_{21} , A_{22} , B は未知であり、 $B > 0$, $u \in R$, $x_1 \in R^{n-1}$, $x_2 \in R$ とする。

このシステムは次のような二つのサブシステムに分離することができる。

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \quad (8)$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + Bu \quad (9)$$

ここで、サブシステム (8) が既知部分であり、サブシステム (9) が未知部分である。

既知サブシステム (8) において、 x_2 を仮想的な入力と考え、次の仮定を満足するコントローラ $-Kx_1$ を設計する。

(仮定 1) コントローラ $-Kx_1$ は x_2 を入力とみてシステム (8) を安定化し、以下を満たす放射状に非有界な正定関数 $V_0(x_1)$ が存在する。

$$\frac{\partial V_0(x_1)}{\partial x_1} \{A_{11}x_1 + A_{12}(-Kx_1)\} \leq -qx_1^T x_1 \quad (10)$$

ここで、 $q > 0$ 。□

つぎに、上記の仮定はシステム (8) が可制御である時に、LQ コントローラによって満たされることを示す。

まず、次の評価関数を考える。

$$J = \int_0^\infty [x_1^T Q x_1 + R x_2^2] dt \quad (11)$$

ここで、 Q は正定行列、 R は正定数である。

その時、 x_2 を入力とする最適制御則は以下の通り。

$$x_2 = -Kx_1 = -R^{-1}A_{12}^T P x_1 \quad (12)$$

ここで、 P は次のリッカチ方程式を満たす正定対称行列である。

$$A_{11}^T P + P A_{11} - P A_{12} R^{-1} A_{12}^T P + Q = 0 \quad (13)$$

もし、リアプノフ関数候補を

$$V_0(x_1) = x_1^T P x_1 \quad (14)$$

と選ぶならば、その微分は

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(x_1) &= x_1^T (A_{11}^T P + P A_{11}) x_1 \\ &\quad - 2x_1^T (P A_{12} R^{-1} A_{12}^T P) x_1 \\ &= -x_1^T (Q + P A_{12} R^{-1} A_{12}^T P) x_1 \\ &\leq -qx_1^T x_1 \end{aligned} \quad (15)$$

となる。ここで、 $q > 0$ とすると、仮定 1 は満たされる。

上記では状態 x_2 を入力と考えたが、 x_2 は実際の入力ではない。したがって、状態 x_2 とその望ましい値 $-Kx_1$ は一般的には一致せず、以下のようにその誤差を考え、これが零に収束するように実際の入力 u を決定する。

$$z = x_2 - (-Kx_1) \quad (16)$$

ここで、リアプノフ関数候補を

$$V_1 = V_0 + \frac{1}{2}z^2 \quad (17)$$

ととると、その微分は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{\partial V_0}{\partial x_1} (A_{11}x_1 + A_{12}x_2) + z\dot{z} \\ &= \frac{\partial V_0}{\partial x_1} \{A_{11}x_1 + A_{12}(-Kx_1)\} \\ &\quad + z \left(\frac{\partial V_0}{\partial x_1} A_{12} + A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + Bu + K\dot{x}_1 \right) \end{aligned} \quad (18)$$

パラメータ A_{21} , A_{22} , B は未知であるので、安定化制御則を次のようにとることはできない。

$$u = -\frac{1}{B} \left(kz + \frac{\partial V_0}{\partial x_1} A_{12} + A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + K\dot{x}_1 \right) \quad (19)$$

ここで, $k > 0$, $\dot{x}_1$ は (8) 式により与えられる.

そこで, 適応制御を導入し, 以下のように入力をとる.

$$u = -\hat{P} \left(kz + \frac{\partial V_0}{\partial x_1} A_{12} + \hat{A}_{21} x_1 + \hat{A}_{22} x_2 + K \dot{x}_1 \right) \quad (20)$$

ここで, $P = 1/B$ とおき, $\hat{P}$, $\hat{A}_{21}$, $\hat{A}_{22}$ はそれぞれ P , A_{21} , A_{22} の推定値とする.

いま, リアプノフ関数候補をさらに以下のように選ぶ.

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \tilde{A}_{21} \Gamma^{-1} \tilde{A}_{21}^T + \frac{1}{2} \gamma^{-1} \tilde{A}_{22}^2 + \frac{1}{2} \gamma_0^{-1} B \tilde{P}^2 \quad (21)$$

ここで, $\tilde{A}_{2i} = A_{2i} - \hat{A}_{2i}$, $1 \leq i \leq 2$, $\tilde{P} = P - \hat{P}$ とおき, Γ は正定対称行列, γ , γ_0 は正定数とする.

その微分は

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{\partial V_0}{\partial x_1} \{A_{11} x_1 + A_{12} (-K x_1)\} - k z^2 \\ &\quad - \tilde{A}_{21} \Gamma^{-1} \left(\dot{\tilde{A}}_{21}^T - \Gamma z x_1 \right) \\ &\quad - \tilde{A}_{22} \gamma^{-1} \left(\dot{\tilde{A}}_{22} - \gamma z x_2 \right) \\ &\quad - \gamma_0^{-1} B \tilde{P} \left\{ \dot{\tilde{P}} - \gamma_0 z \left(kz + \frac{\partial V_0}{\partial x_1} A_{12} + \hat{A}_{21} x_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \hat{A}_{22} x_2 + K \dot{x}_1 \right) \right\} \\ &\leq -q x_1^T x_1 - k z^2 \end{aligned} \quad (22)$$

ここで, パラメータ調整則を以下のように選んだ.

$$\dot{\tilde{A}}_{21}^T = \Gamma z x_1 \quad (23)$$

$$\dot{\tilde{A}}_{22} = \gamma z x_2 \quad (24)$$

$$\dot{\tilde{P}} = \gamma_0 z \left(kz + \frac{\partial V_0}{\partial x_1} A_{12} + \hat{A}_{21} x_1 + \hat{A}_{22} x_2 + K \dot{x}_1 \right) \quad (25)$$

最後に, (21), (22) 式により x_1 , z , $\hat{A}_{21}$, $\hat{A}_{22}$, $\hat{P}$ は有界であり, これより x_2 , u も有界である. また, 各信号の 1 階微分, 2 階微分とも, 状態方程式やパラメータ調整則の式を代入することにより微分を含まない形に変形可能であり, 有界となる. つまり, $\dot{V}_2$ は有界であるので, Barbalat の補題より $t \rightarrow \infty$ の時, $z \rightarrow 0$, $x_1 \rightarrow 0$ が示され, さらに $x_2 \rightarrow 0$ となることもわかる.

制御構造を示すと Fig. 1 のようになる.

さらに, このような手法が適用できるシステムのクラスは広げることができる. 入力に近い未知部分 (9) に非線形要素が入っている場合も, バックステッピング [7] の拡張性により対処可能である.

3. 倒立振子・台車系の部分的適応制御

Fig. 2 のような倒立振子・台車系の運動方程式は, 振子の傾き角を θ , 台車の位置を y , 台車に加える制御力を u とすると, 次のように表される.

Fig. 1 Control structure by backstepping

Fig. 2 Inverted pendulum and cart system

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{y} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + F\dot{y} = u \\ (J+ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{y}\cos\theta + c\dot{\theta} - mgl\sin\theta = 0 \end{cases} \quad (26)$$

ただし, M は台車, ベルト, モータ系の等価質量, m は振子の質量, l は振子の軸から重心までの長さ, J は振子の重心まわりの慣性モーメント, F は台車, ベルト, モータ系の等価粘性摩擦係数, c は振子の角粘性摩擦係数, g は重力加速度である.

このシステムを原点まわりで近似線形化することにより, 次式が得られる.

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{y} + ml\ddot{\theta} + F\dot{y} = u \\ (J+ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{y} + c\dot{\theta} - mgl\theta = 0 \end{cases} \quad (27)$$

これより, $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]^T = [\theta, y, \dot{\theta} + \frac{ml}{J+ml^2}\dot{y}, \dot{y}]^T$ とおくと状態方程式は次のようになる.

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu \quad (28)$$

ここで, A , B は以下で与えられる.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{ml}{J+ml^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{mgl}{J+ml^2} & 0 & -\frac{c}{J+ml^2} & \frac{mlc}{(J+ml^2)^2} \\ -\frac{m^2gl^2}{N} & 0 & \frac{mlc}{N} & -\frac{m^2l^2c + (J+ml^2)^2F}{(J+ml^2)N} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{J+ml^2}{N} \end{bmatrix}$$

ただし, $N = (M+m)J + Mml^2$ とおいた.

このシステム (28) を次のような二つのシステムに分離する.

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \quad (29)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{N}(p_1\xi_1 + p_3\xi_3 + p_4\xi_4 + p_u u) \quad (30)$$

ただし, $x_1 = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^T$, $x_2 = \xi_4$ とし,

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{mgl}{J+ml^2} & 0 & -\frac{c}{J+ml^2} \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \frac{ml}{J+ml^2} \\ 1 \\ \frac{mlc}{(J+ml^2)^2} \end{bmatrix}$$

$$p_1 = -m^2gl^2, \quad p_3 = mlc, \\ p_4 = -\frac{m^2l^2c + (J+ml^2)^2F}{(J+ml^2)}, \quad p_u = J+ml^2$$

とおいた.

ここで, (29) 式には台車に関する物理パラメータ M , F が含まれておらず, (30) 式でも p_4 , N にしか含まれていないことに注意する. 振子に関するパラメータは, 直接の計測や自由振動という簡単な実験で測定が可能である一方, 台車に関するパラメータの同定値は測定誤差を含むうえ, 稼働状況により変動することが知られている. そこで, 部分的適応制御手法を適用し, 台車に関するパラメータに不確実性があっても対処可能なように制御系を設計する. ただし, 前節とはシステムが少し異なる.

まず, システム (29) において x_2 を入力とみなして線形フィードバックコントローラ

$$x_2 = -Kx_1 \quad (31)$$

を設計する. ただし, 仮定 1 を満たすとする.

さて, x_2 は状態であり, 実際には $-Kx_1$ とはできないので, その誤差を以下のようにおき, バックステッピング法を適用する. また, 台車のパラメータの不確実性に対処するために適応制御を用いる.

$$z = x_2 - (-Kx_1) = x_2 + Kx_1 \quad (32)$$

この時間微分をとると, 次のようになる.

$$\dot{z} = \frac{1}{N}(p_1\xi_1 + p_3\xi_3 + p_4\xi_4 + p_u u + NK\dot{x}_1) \quad (33)$$

ここで, $\dot{x}_1$ は (29) 式で与えられる.

(33) 式から $\dot{z}$ には未知パラメータ p_4 , N が含まれるので, その推定パラメータをそれぞれ $\hat{p}_4$, $\hat{N}$ とし, 制御入力を以下のように選ぶ.

$$u = -\frac{1}{p_u} \left\{ kz + p_1\xi_1 + p_3\xi_3 + \hat{p}_4\xi_4 + \hat{N} \left(K\dot{x}_1 + \frac{\partial V_0}{\partial x_1} A_{12} \right) \right\} \quad (34)$$

ここで, k は正定数とする.

また, $\hat{p}_4$, $\hat{N}$ のパラメータ調整則を以下とする.

$$\dot{\hat{p}}_4 = \gamma_4 z \xi_4 \quad (35)$$

$$\dot{\hat{N}} = \gamma_N z \left(K\dot{x}_1 + \frac{\partial V_0}{\partial x_1} A_{12} \right) \quad (36)$$

ただし, $\gamma_4, \gamma_N > 0$ とする.

以下の正定関数を選ぶ.

$$V_2 = V_0 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{\gamma_4^{-1}}{2N}\tilde{p}_4^2 + \frac{\gamma_N^{-1}}{2N}\tilde{N}^2 \quad (37)$$

ここで, $\tilde{p}_4 = p_4 - \hat{p}_4$, $\tilde{N} = N - \hat{N}$ とし, N が正数であることは物理的に既知である.

この時間微分をとると, 以下のようになる.

$$\dot{V}_2 \leq -qz^T x_1 - \frac{k}{N}z^2 \quad (38)$$

これより x_1 , z , $\hat{p}_4$, $\hat{N}$ は有界となり, x_2 , u が有界であることが分かる. また前節と同様に $\dot{V}_2$ は有界となり, Barbalat の補題より $z \rightarrow 0$, $x_1 \rightarrow 0$, $x_2 \rightarrow 0$ を示すことができる.

4. 制御実験

前節で得た制御則を用いて実機による実験を行う.

実験機本体はジャパン・イー・エム社製であり, コントローラの実装は dSPACE 社の DSP-CIT, MathWorks 社の MATLAB/SIMULINK を用い, サンプルングタイムは 5[ms] に設定した.

事前の測定実験により得られた倒立振子・台車系の物理パラメータは以下の通りである.

$$\begin{array}{ll} m: & 0.07 \text{ [kg]} & J: & 0.00117 \text{ [kg m}^2\text{]} \\ l: & 0.115 \text{ [m]} & c: & 0.00057 \text{ [kg m}^2\text{/s]} \\ M: & 10.0 \text{ [kg]} & F: & 50.0 \text{ [kg/s]} \end{array}$$

ただし, M や F はこの段階でも測定誤差を含んでいる.

K は $Q = \text{diag}[1, 2, 0.1]$, $R = 1$ として得られた $K = [-4.31, -1.41, -0.735]$ を用いる. また, $k = 0.2$ とする.

推定パラメータの初期値は, M , F が上記の測定値のそれぞれ 0.5, 2 倍として決定する. また, 初期状態は $y(0) = 0.3$, $\theta(0) = \dot{y}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ とした.

Figs. 3-6 に適応制御を行わなかった場合 ($\gamma_4 = \gamma_N = 0$), Figs. 7-12 に適応制御を行った場合 ($\gamma_4 = \gamma_N = 1$) の実験結果を示す. ただし, モデル化誤差や外乱が存在するためパラメータ調整則を σ -修正法 [9] により修正して用いる. これらの実験結果から, パラメータ誤差が適応制御を行わない時には大きな影響を与えることがわかる. また, 適応制御を行うことによりパラメータ誤差の

影響を抑え、望み通りの制御が可能であることがわかる。
 ここで、 y, θ, z などが収束するにつれて、 $\hat{p}_4, \hat{N}$ が 0
 に収束しているが、これは σ -修正法の修正項の影響であ
 る [9]。

以上の実験結果から、提案手法の有効性が確認できる。

 Fig. 3 Non-adaptive control - y

 Fig. 4 Non-adaptive control - θ

 Fig. 5 Non-adaptive control - z

 Fig. 6 Non-adaptive control - u

 Fig. 7 Adaptive control - y

 Fig. 8 Adaptive control - θ

 Fig. 9 Adaptive control - z

 Fig. 10 Adaptive control - u

 Fig. 11 Adaptive control - $\hat{p}_4$

 Fig. 12 Adaptive control - $\hat{N}$

5. おわりに

LQ 制御と適応制御からなる部分的適応制御手法を倒
 立振り子・台車系に適用し、台車に関するパラメータの不
 確かさのもとでも良好な制御が可能であることを示した。
 種々の倒立振り子実験は多く行われており、本手法も簡単
 に実現できるので、適応制御の初学者向けの実験として
 も有効である。また、この方法はモータのダイナミクス

まで考慮したシステムなど、入力に近い側に未知性と非線形性が存在するシステムへの適用が可能である。

参考文献

- [1] S. Mori, H. Nishihara and K. Furuta: Control of unstable mechanical systems: control of pendulum; *Int. J. Control*, Vol. 23, No. 5, pp. 673–692 (1976)
- [2] C. W. Anderson: Learning to control an inverted pendulum using neural networks; *IEEE Contr. Syst. Magazine*, pp. 31–37 (1989)
- [3] T. Yamakawa: Stabilization of an inverted pendulum by a high-speed fuzzy logic controller hardware system; *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 32, pp. 161–180 (1989)
- [4] Q. Wei, W. P. Dayawansa and W. S. Levine: Nonlinear controller for an inverted pendulum having restricted travel; *Automatica*, Vol. 31, pp. 841–850 (1995)
- [5] G. A. Medrano-Cerda: Robust computer control of an inverted pendulum; *IEEE Contr. Syst. Magazine*, pp. 58–67 (1995)
- [6] 武藤, 濱田, 森下: 倒立振子のロバスト適応制御; 計測自動制御学会論文誌, Vol. 26, No. 1, pp. 114–116 (1990)
- [7] M. Krstic, I. Kanellakopoulos and P. Kokotovic: *Nonlinear and Adaptive Control Design*, Wiley-Interscience (1995)
- [8] T. Fukao, A. Yamawaki and N. Adachi: Adaptive control of partially known systems using backstepping: application to H_∞ design of active suspension; *Proc. IEEE Conf. Decision Contr.*, pp. 481–486 (1998)
- [9] P. A. Ioannou and J. Sun: *Robust Adaptive Control*, Prentice Hall (1996)