一般化正準変換を用いた安定化法のロバスト性に関する 考察

—二輪車両系の実験と解析*

藤本 健治[†]・石川佳太郎[†]・杉江 俊治[†]

On Robustness of a Stabilization Method Based on Generalized Canonical Transformations

—Experimental Evaluation and Analysis for a Two-Wheeled Vehicle System*

Kenji FUJIMOTO[†], Keitaro ISHIKAWA[†] and Toshiharu SUGIE[†]

This paper studies the robustness analysis of feedback systems for two-wheeled vehicle systems which are designed based on generalized canonical transformations. Firstly the relation between the design parameter in the stabilization procedure and the sensitivity against external disturbances is discussed. Secondly a sufficient condition for the robust stability against unknown physical parameter variations is derived. Finally the effectiveness of our method is demonstrated by experiments.

1. はじめに

物理システムの受動性を利用した非線形制御の手法の一つにハミルトニアンシステムの形式を用いたものがある。ハミルトニアンシステムとは古典力学で用いられているハミルトンの正準方程式を拡張したもので、系の全エネルギーを表すハミルトニアンを storage 関数として入出力が受動的になるように定式化されている。この形式では力学的なシステムだけでなく電気的なシステム、およびそれらを結合したシステム、さらにあるクラスの非ホロノミックなシステムも記述できることが知られている [1]。また、この形式を用いた安定化法はシステムの受動性を利用したものであることから、ロバスト性が期待されている。

非ホロノミックな拘束を持つシステムの安定化手法の多くは、本来加速度入力の力学系を簡単のため速度を入力として扱っており、実機の制御においてシステムの物理量を考慮したり、システムのロバスト性などを考慮することが難しいと考えられる。一方、ハミルトニアンシステムの形式は加速度を入力とした表現となっており、この形式を用いた安定化法ではそのような考察も容易になる。

本報告では、あるクラスの非ホロノミックなハミルトニアンシステムに対して筆者らが提案している不連続補償器を、シンプルではあるが非ホロノミック系の根本的な制御の難しさを持っている二輪車両に適用し、実験と解析の両面からロバスト性について考察する。

本論文の構成は以下の通りである。まず 2. で非ホロノミックなハミルトニアンシステムの安定化手法 [2-5] を概説し、3. で二輪車両をハミルトニアンシステムの形式でモデル化し提案法を用いて安定化補償器を設計する。4. では、構成された制御系のロバスト性について考察する。具体的には、4.1 で外乱に対するロバスト性、4.2 でモデル化誤差のあるハミルトニアンシステムの漸近安定性について考察する。具体的にはモデル化誤差のあるシステムの漸近安定化可能なパラメータ誤差の範囲を解析的に求める。最後に 5. で実験による検証を行う。

2. 非ホロノミックなハミルトニアンシステムに対する漸近安定化補償器

2.1 ハミルトニアンシステム

ハミルトニアン $H(x, t)$ を持つハミルトニアンシステムとは、次式で表されるような系である [1]。

$$\begin{cases} \dot{x} = J(x, t) \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) + g(x, t)u \\ y = g^T(x, t) \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $u, y \in \mathbf{R}^m$, $x \in \mathbf{R}^n$ で J は構造行列と呼ばれる歪対称行列である。

* 原稿受付 2000 年 7 月 24 日

[†] 京都大学 大学院 情報学研究科 Graduate School of Informatics, Kyoto University; Uji city, Kyoto 611-0011, JAPAN

Key Words: nonlinear control, generalized Hamiltonian systems, canonical transformation, two-wheeled vehicle system, robustness.

2.2 一般化正準変換と安定化

一般化正準変換とは古典力学で広く用いられている正準変換を拡張したもので、(1)式のハミルトニアンシステムの構造を保つような、(2)式で表される一連の変換の組である[6]。ただし $\bar{x}, \bar{H}$ などバーがついたものは変換後のシステムの変数や関数を表すものとする。この一般化正準変換に対して以下の定理が得られている。

$$\begin{cases} \bar{x} = \Phi(x, t) \\ \bar{H} = H(x, t) + U(x, t) \\ \bar{y} = y + \alpha(x, t) \\ \bar{u} = u + \beta(x, t) \end{cases} \quad (2)$$

【定理1】[6] (1)式のシステムに対する変換(2)式において、任意に与えられたスカラー関数 U 、ベクトル値関数 β に対して、ベクトル値関数 α 、座標変換 Φ が存在し、(2)式は一般化正準変換となる。なお、 α は、 $\alpha = g^T(\partial U / \partial x)^T$ で、 Φ は次式の解で与えられる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial(x, t)} \left(J \frac{\partial U^T}{\partial x} + g\beta + K \frac{\partial(H+U)^T}{\partial x} \right) = 0 \quad (3)$$

ここで、 K は任意に選べる歪対称行列である。また次の3条件を満たせば変換後のシステムは受動的になり、フィードバック $\bar{u} = -P\bar{y}$ によって原点が漸近安定となる。ただし、 P は任意の正定行列とする。

- 変換後のシステムが零状態可検出

$$H + U \geq 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial(H+U)}{\partial(x, t)} \left(J \frac{\partial U^T}{\partial x} + g\beta \right) \geq 0 \quad (5)$$

2.3 非ホロノミックなハミルトニアンシステム

あるクラスの非ホロノミックな拘束を持つ機械システムは、 $x = (q^T, p^T)^T$ を状態、 u を入力、 y を出力とする以下のようなハミルトニアンシステムとして記述されることが知られている[1]。

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S(q) \\ -S^T(q) & S_{22}(q, p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H^T}{\partial q} \\ \frac{\partial H^T}{\partial p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix} u \quad (6)$$

$$y = G^T(q) \frac{\partial H^T}{\partial p}, \quad H = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p$$

ただし、 $q \in \mathbf{R}^l$, $p, u \in \mathbf{R}^m$ ($l > m$)で、 $S(q)$ は列フルランク、 $S_{22}(q, p)$ は歪対称行列、 $G(q)$ は正則、 $M(q)$ は正定対称行列である。

2.4 非ホロノミックなハミルトニアンシステムの安定化

(6)式のシステムに対してなめらかなポテンシャル U を用いて一般化正準変換を行うと、変換後のシステムは必ず零状態可検出でなくなってしまう、漸近安定化することはできない。しかし、(4)、(5)式を満たしかつ、入

出力を零にする状態の集合である入出力零化集合 Ω を原点のみにするなめらかなでないポテンシャル $U(q)$ と、不連続な $\beta(q)$ を用いて一般化正準変換することで、システムの状態は原点に漸近安定化可能になる。ここで Ω は $\Omega := \{(q^T, p^T)^T \mid u \equiv 0, y \equiv 0\}$ で定義される集合である。また、ハミルトニアンシステムの構造行列 S に正準構造を導入して、入出力零化集合を特定するための以下のような補題が得られている。

【補題1】[3,4] $l=3$, $m=2$ で正定なハミルトン関数 $H = (1/2)p^T M(q)^{-1}p + U(q)$ を持つ(6)式のシステムを考える。構造行列の(1,2)-ブロック行列 $S(q)$ は一般性を失うことなく $q_{12} := (q_1, q_2)^T \in \mathbf{R}^2$, $S_1(q), S_2(q) \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ を用いて、

$$S(q) = \begin{pmatrix} I \\ q_{12}^T S_2(q) \end{pmatrix} S_1(q) \quad (7)$$

のように表される。

ここで S_2 が

$$4\det S_2 - (\text{tr} S_2)^2 > 0 \quad (8)$$

を満たし、 U は $U = U(\|q_{12}\|, q_3)$ と表されかつ、 $q_{12} \neq 0 \Rightarrow \partial U / \partial q \neq 0$ が成立するとする。この時入出力零化集合は

$$\Omega = \Omega_0 := \{(q^T, p^T)^T \mid q_{12} = p = 0\} \quad (9)$$

で与えられる。

よって、一般化正準変換の際に Ω_0 上でなめらかなでないポテンシャルを用いて $\Omega_0 \setminus \{0\}$ の点を不安定化し、 $\Omega = \{0\}$ としてやれば、変換後のシステムに対してフィードバック $\bar{u} = -P\bar{y}$ を施すことによって漸近安定性が達成される[2]。ここで $q \in \mathbf{R}^3$, $p \in \mathbf{R}^2$ の時の漸近安定化補償器が求まっており、最終的な補償器は、

$$u = -PG^T \frac{\partial H^T}{\partial p} - G^{-1} S^T \frac{\partial U^T}{\partial q} \quad (10)$$

である[2-4]。なめらかなでないポテンシャル U の具体的な構成法は3.3で述べる。

3. 二輪車両のモデル化

本論文では、Fig.1のような二輪車両系を考える。

この二輪車は、両輪が車軸により平行に拘束されており、左右の車輪にそれぞれ入力トルクが与えられて駆動する。両輪が横滑りおよび空回りしないとすると、車両は車軸と垂直な方向にしか移動できない。これが、位置と速度で表される非ホロノミックな拘束である。本章ではこのシステムのモデル化を行う。

3.1 二輪車両

まず変数を定義する。二輪車の重心から車軸に下ろした垂線の足の位置を (z_1, z_2) 、二輪車の進行方向と z_1 軸とのなす角を θ 、右の車輪の回転角を ϕ_r 、左の車輪の

Fig. 1 A model of the two-wheeled vehicle

回転角を ϕ_l とし、入力は、左右の車輪にトルク u_1 (右), u_2 (左) を与える。車両の重心周りの拘束トルクを τ , 車両の重心における z_1, z_2 軸方向の拘束力を f_1, f_2 とする。つぎに定数パラメータについて、二輪車の質量を m , 慣性モーメントを j , 重心から車軸に下ろした垂線の足と左右の車輪の距離を w_r, w_l , 左右の車輪の半径を r_r, r_l , 左右の車輪の慣性モーメントを i_r, i_l と定義する。

3.2 ハミルトニアンシステム

配位座標 $q = (\theta, z_1, z_2, \phi_r, \phi_l)^T$, 拘束力 $\lambda = (\tau, f_1, f_2)^T$, 入力 $u = (u_1, u_2)^T$ とすると、この系の運動方程式は

$$M(q)\ddot{q} = A(q)\lambda + G(q)u \quad (11)$$

$$A^T(q)\dot{q} = 0 \quad (12)$$

となる。ただし、

$$A(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{r_r}{w_r} & -\frac{r_r w_l}{w_r + w_l} \cos \theta & -\frac{r_r w_l}{w_r + w_l} \sin \theta \\ \frac{r_l}{w_l} & -\frac{r_l w_r}{w_r + w_l} \cos \theta & -\frac{r_l w_r}{w_r + w_l} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$M = \text{diag}(j, m, m, i_r, i_l), \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \quad (14)$$

である。また、拘束条件と系の運動エネルギーは、 $p := M\dot{q}$ とすると以下ようになる。

$$A^T(q)M^{-1}p = 0, \quad H = \frac{1}{2}p^T M^{-1}p \quad (15)$$

ここで、非線形の座標変換 $(q^T, p^T)^T \rightarrow (q^T, \tilde{p}^T, \tilde{p}_\perp^T)^T$ を参考文献 [1, 5] で述べているように選ぶ。また、今回安定化するのは、 θ, z_1, z_2 , の3変数なので、 ϕ_r, ϕ_l を除いた変数 $\tilde{q} = (\theta, z_1, z_2)^T$ を用いて、以下のような非ホロノミックなハミルトニアンシステムで表すことができる。

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{p}} \end{pmatrix} = \bar{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \tilde{q}} \\ \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{G} \end{pmatrix} u \quad (16)$$

$$\tilde{p}_\perp = 0 \\ y = \bar{G}^T \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}}$$

ただし、

$$\bar{J} := \begin{pmatrix} 0 & \bar{J}_{12} \\ -\bar{J}_{12}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{J}_{12} := \begin{pmatrix} 2r_r r_l & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} \frac{r_l w_r}{w_r + w_l} & -\frac{r_r w_l}{w_r + w_l} \\ \frac{2r_r w_l}{2r_r w_l} & \frac{2r_l w_r}{2r_l w_r} \end{pmatrix} \quad (18)$$

である。

3.3 一般化正準変換と安定化

つぎに (16) 式を一般化正準変換する。変換後のシステムが補題 1 の (8) 式を満たすように、座標変換 $(\tilde{q}^T, \tilde{p}^T)^T \rightarrow (\xi^T, \eta^T)^T := (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2)^T$ を

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi(\tilde{q}) \\ N(\tilde{q})\tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan \theta \\ x \\ 2y - x \tan \theta \\ 1 \\ \frac{2(\tan^2 \theta + 1)r_r r_l}{\sqrt{(1 + \tan^2 \theta)}} \tilde{p}_1 \\ \sqrt{(1 + \tan^2 \theta)} \tilde{p}_2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

と選ぶと (16) 式は、以下のように変換され、

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \hat{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial \eta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{G} \end{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{y} = \hat{G}^T \frac{\partial \bar{H}}{\partial \eta} \quad (20)$$

$\hat{J}, \hat{G}$ は次式のようなものである。

$$\hat{J} := \begin{pmatrix} 0 & \hat{J}_{12} \\ -\hat{J}_{12}^T & \hat{J}_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_{12} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\hat{J}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\xi_1 \eta_2}{\xi_1^2 + 1} \\ \frac{\xi_1 \eta_2}{\xi_1^2 + 1} & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\hat{G} := \begin{pmatrix} \frac{w_r}{2(1 + \xi_1^2)r_r} & -\frac{w_l}{2(1 + \xi_1^2)r_l} \\ \frac{(w_r + w_l)\sqrt{1 + \xi_1^2}}{2r_r w_l} & \frac{(w_r + w_l)\sqrt{1 + \xi_1^2}}{2r_l w_r} \end{pmatrix} \quad (23)$$

(21) 式より (8) 式の成立が確認できる。また、付加するポテンシャル U は次式とし、 β は (5) 式の不等号を等号に置き換えた式から求める。また、定数 $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0, \gamma \geq 0$ は設計パラメータである。 $\xi_{12} := (\xi_1, \xi_2)^T$ として、

$$U = \frac{1}{2}(C_1 \|\xi_{12}\|^2 + C_2 \xi_3^2) + \frac{C_3 |\xi_3|^{2+\gamma}}{(\|\xi_{12}\| + C_4 |\xi_3|)^2} \quad (24)$$

のように選ぶと、変換後の系において補題1が成立し零状態可検出となり定理1の条件を満たす。よって、(20)式のシステムに対しフィードバック $\bar{u} = -P\bar{y}$ を施すとシステムの原点を漸近安定化することができる。この時の元のシステムに対する制御則は以下になる。

$$u = P\bar{G}^T \bar{M}^{-1} \bar{p} - \bar{G}^{-1} \bar{J}_{12} \frac{\partial U(\Psi(\bar{q}))}{\partial \bar{q}}^T \quad (25)$$

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}$$

$$m_{11} = 4r_r^2 r_l^2 j + r_l^2 w_r^2 i_r + r_r^2 w_l^2 i_l$$

$$m_{22} = m + \frac{(w_r + w_l)^2 i_r}{4r_r^2 w_l^2} + \frac{(w_r + w_l)^2 i_l}{r_l^2 w_r^2}$$

$$m_{12} = \frac{r_l w_r i_r (w_r + w_l)}{2r_r w_l} - \frac{r_r w_l i_l (w_r + w_l)}{2r_l w_r}$$

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} 2r_r r_l & 0 & 0 & r_l w_r & -r_r w_l \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & \frac{w_r + w_l}{r_r w_l} & \frac{w_r + w_l}{r_l w_r} \end{pmatrix} p \quad (26)$$

とくに $\gamma=0$ の場合、状態は原点近傍で指数的に収束し、 $\gamma>0$ の場合、 $H+U$ をリアプノフ関数として系の原点は漸近安定である [3-5]。

4. ロバスト安定性

4.1 付加するポテンシャルの形と外乱に対するロバスト性

以下のような不等式を満たす class- $\mathcal{K}$ 関数 ϕ が存在するとき、系の原点はリアプノフの意味で安定であるという。

$$\|x(t)\| \leq \phi(\|x(t_0)\|), \quad \forall t \geq t_0 \quad (27)$$

ここで付加しているポテンシャルは、(24)式で与えられるが、 γ を変化させるとその形が原点近傍で大きく変化する。 $\gamma=1$ のときのポテンシャルの概形を Fig. 2 に示す。ただし ξ は本来3次元であるため、この図は $\xi_1 = \xi_2$ として描いた概略図である。 $H+U$ はリアプノフ関数であり U は $\xi_1 = \xi_2 = 0$ でなめらかでなく、原点近傍では U の形状が系のふるまいに大きく影響する。そこで、 U の概形より、 ϕ と γ の関係が Fig. 3 のように得られる¹。 $\gamma=0$ の時は $\phi(s)$ が class- $\mathcal{K}$ 関数でないのでリアプノフの意味での安定性は保証できなくなる。いま、本手法で制御しているシステムの状態が原点にあるとすると、外乱などによって状態が原点から Δ だけ摂動したとすると、リアプノフの意味での安定性の条件から状態は $\|x\| \leq \phi(\|\Delta\|)$ を満たすが、その時の $\phi(\|\Delta\|)$ の原点近傍での大きさは付加するポテンシャルによって異なる。Fig. 3 から、 $\gamma=0$ の時は状態の摂動がどんなに小さくても $\phi(\|\Delta\|)$ をある一定量より小さくすることができな

Fig. 2 Shape of the function U with $\gamma=1$

Fig. 3 Shape of the functions ϕ

いため、摂動に対する感度の高い、すなわち外乱に弱い制御系と考えられる。また $\gamma \geq 2$ では線形システムの場合のリアプノフの意味での安定と同じように $\phi(s)$ が s の一次関数となるので $\gamma \geq 2$ の場合の方が $\gamma=0,1$ の場合に比べて外乱に強いことが期待できる。

4.2 パラメータ誤差に対するロバスト安定性

ここではノミナルモデルから設計した漸近安定化補償器を、モデル化誤差のあるシステムに対して適用した場合に、許容できるパラメータ誤差の範囲について考察する。

• 問題設定

実対象と公称モデルの間にモデル化誤差のある、次式のような系 ($l=3, m=2$) を考える。公称モデルは (6) 式で表される。

— 実対象

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \check{S}(q) \\ -\check{S}^T(q) & \check{S}_{22}(q,p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \check{H}^T}{\partial q} \\ \frac{\partial \check{H}^T}{\partial p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \check{G} \end{pmatrix} u \quad (28)$$

$$\check{H} = \frac{1}{2} \check{p}^T \check{M}^{-1}(q) \check{p} \quad (29)$$

— 仮定

1. $q, \dot{q}$ が観測可能, 2. $\check{S}_{22}(q,p)$ は常に半負定²
上記の問題設定のように、モデル化誤差がある場合でもシステムが公称モデルと同じ物理的な特性を持つと仮

¹ $\phi(s)$ は、 $V=H+U$ とすると、 $V(x) \leq \sup_{\|x^0\| \leq s} V(x^0)$ である x のノルム $\|x\|$ の最大値を返す関数。

² ここでは摩擦も考慮に入れるため、歪対称ではなく半負定という条件にしている。

定すると、(28)式のように記述でき、実際のモデル化誤差を持つシステムの多くはこの形で表されていると考えられる。

いま、(28)式に(6)式に対して求まるフィードバック則(10)式を用い、さらに $\dot{q} = \check{S}(\partial \check{H} / \partial \check{p})^T = S(\partial H / \partial p)^T$ の関係から $\dot{q}$, $\dot{\check{p}}$ それぞれについて書き下す。

$$\begin{cases} \dot{q} = \check{S} \frac{\partial \check{H}}{\partial \check{p}} \\ \dot{\check{p}} = -\check{S}^T \frac{\partial \check{H}}{\partial q} + \check{G}u + \check{S}_{22} \frac{\partial \check{H}}{\partial \check{p}} \\ = -\check{S}^T \frac{\partial \check{H}}{\partial q} + \check{S}_{22} \frac{\partial \check{H}}{\partial \check{p}} - \check{G}G^{-1}S^T \frac{\partial U}{\partial q} \\ - \check{G}PG^T S^\dagger \check{S} \frac{\partial \check{H}}{\partial \check{p}} \end{cases} \quad (30)$$

ただし $S^\dagger := (S^T S)^{-1} S^T$ は S の疑似逆行列である。また U は q のみに依存する関数なので $\dot{H} + \dot{U}$ は、

$$\begin{aligned} \dot{H} + \dot{U} &= \frac{\partial \check{H}}{\partial \check{p}} (\check{S}_{22} - \check{G}PG^T S^\dagger \check{S}) \frac{\partial \check{H}}{\partial \check{p}} \\ &+ \frac{\partial U}{\partial q} (\check{S} - SG^{-T} \check{G}^T) \frac{\partial \check{H}}{\partial \check{p}} \end{aligned} \quad (31)$$

である。ここでモデル化誤差がなければ、(31)式の右辺第一項は負または零、右辺第二項が零より、 $\dot{H} + \dot{U} \leq 0$ となり、フィードバック系は安定である。しかし、モデル化誤差がある場合には、 $\dot{H} + \dot{U} \leq 0$ とならない。

4.2.1 安定性の十分条件

モデル化誤差があるシステムに対して、公称モデルと同じ U , β で正準変換を施したとする。いま、この U , β が実際の系に対しても時不変な座標変換を持つ一般化正準変換であると仮定する、すなわち(3)式が時不変な座標変換を持つとする。この仮定は、公称モデルと同様 $\dot{H} + U$ が実際の系に対しても storage 関数となることを意味する。この条件は(3)式より

$$\check{S} = SG^{-T} \check{G}^T \quad (32)$$

となる。これを(31)式に代入すると右辺第二項目が0となり、 $\dot{H} + U$ を storage 関数として受動的となることが確認できる。よって公称モデルと同じ補償器を用いた場合でも安定性が保証される。

つぎにシステムの漸近安定性について考察する。本手法では一般化正準変換する際、補題1を適用し入出力零化集合を特定してその領域を不安定化するポテンシャルを用いて漸近安定化を達成している。いま、モデル化誤差があるシステムに対して、公称モデルと同じ座標変換を持つ一般化正準変換を施すと入出力零化集合が公称モデルとは異なった集合になり、同じポテンシャルでは漸近安定化できなくなる可能性がある。しかしその場合でも、(28)式に公称モデルと同じ座標変換を施して構成された $\check{S}(\xi)$ が(7)式のように分割でき、さらにそのとき構

成される $\check{S}_2(\xi)$ が(8)式を満たせば入出力零化集合が一致し、同じポテンシャルで漸近安定化が達成される。

以上の議論をまとめると次のようになる。

【命題1】 (28)式のシステムが次の二条件を満たすと仮定する。

$$\check{S} = SG^{-T} \check{G}^T \quad (33)$$

$$4\det \check{S}_2 - (\text{tr} \check{S}_2)^2 > 0 \quad (34)$$

ただし $\check{S}_2$ は一般化正準変換した後のシステムを(7)式のように分解することにより得られる。この時、(10)式の補償器は(28)式の系の原点を漸近安定化する。

4.2.2 二輪車両のモデル化誤差への適用

上記の命題を二輪車両に適用する。ここでは設計時には定数パラメータを左右対称にしている ($r_r = r_l = r$ など)。実モデルの定数パラメータを $\check{r}_r$ など $\check{\cdot}$ で表し、ノミナル値と真の値との比を表す定数 ($a_1 \sim a_8$) を用いて、 $\check{r}_r = a_1 r$, $\check{r}_l = a_2 r$, $\check{w}_r = a_3 w$, $\check{w}_l = a_4 w$, $\check{m} = a_5 m$, $\check{j} = a_6 j$, $\check{i}_r = a_7 i$, $\check{i}_l = a_8 i$, であるとする。

まず命題1の(33)式の条件を二輪車両系に適用する。二輪車両の場合 $\check{S} = ST_1$, $\check{G} = T_2 G$ と書けるのでこの関係式を用いて安定性の条件を書き直すと

$$T_1 = T_2^T \quad (35)$$

となる。ただし、

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} \frac{a_1 a_4 + a_2 a_3}{2} & \frac{r^2 w (a_2 a_3 - a_1 a_4)}{2} \\ \frac{(a_3 + a_4)(a_2 a_3 - a_1 a_4)}{4 a_1 a_2 a_3 a_4 r^2 w} & \frac{(a_3 + a_4)(a_1 a_4 + a_2 a_3)}{4 a_1 a_2 a_3 a_4} \end{pmatrix}$$

である。この条件を実際に計算してみると、

$$a_1 = a_3, \quad a_2 = a_4, \quad a_1 + a_2 = 2a_1 a_2 \quad (37)$$

となる。

次に命題1の(34)式の条件を二輪車両系に適用すると、

$$\check{S}_2(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 a_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

したがって(34)式は常に成立する。よってこの範囲のどんなパラメータ誤差がある場合でも入出力零化集合はノミナルモデルと一致するので(24)式のポテンシャルを付加することで漸近安定化される。

以上から二輪車両の物理パラメータに誤差がある場合でも、(37)式が満たされる範囲であれば漸近安定性が保証される。この条件式には、幾何学的なパラメータのみで、二輪車の質量、慣性モーメント、車輪の質量、慣性モーメントのパラメータが含まれていない。つまり、幾

何学的な構造さえ正確に設計しておけば、他の誤差は許容できるということである。

5. 実験

5.1 実験装置の概略

本実験に用いる装置の構成をFig.4に、二輪車両の写真をFig.5に示す。二輪車両の位置と姿勢角は、車両本体に付けた二つのLEDの位置を約3[m]の高さに取り付けたポジションセンサで読み取ることによって測定する。分解能は2.5[mm]、LED間の距離は22[cm]である。二つの車輪（車輪間の距離15[cm]）にはそれぞれ独立したモータとエンコーダを取り付け、それぞれの車輪（半径4[cm]）の回転角を測り、またトルクを与える。速度情報はポジションセンサの情報を数値微分したものである。なお、サンプリングタイムは5[ms]である。これは、ポジションセンサの信号が300[Hz]で送られてくるための制約である。また、入力制約と、車輪の滑りをおさえるため速度の制約を与えている。

Fig. 4 Configuration of the experimental system

Fig. 5 Picture of the two-wheeled vehicle

5.2 実験結果と考察

実験では特に観測ノイズに対するロバスト性について検証する。

5.2.1 実験1

(24)式の付加するポテンシャルのパラメータを $C_1=1$, $C_2=1$, $C_3=4$, $C_4=1$, 状態フィードバックのパラメー

タを $P=50I$ として、 γ を0~3と変化させ実験を行った。 $\gamma=0, 3$ に対する系の応答の z_1 - z_2 グラフ（横軸 z_1 座標, 縦軸 z_2 座標 単位[cm]）をそれぞれFig.6, Fig.7に、 $\tilde{q}$ の時間応答（横軸時間[s], 縦軸配位座標, θ :実線0.1[rad], z_1 :鎖線, z_2 :破線[cm]）をFig.8, Fig.9に示す。

これらの結果から、4.1で行った外乱に対するロバスト性の考察のとおり γ が増すと観測ノイズの影響と思われる原点近傍での振動が小さくなっている。なお γ が3以上ではあまり変化がなかった。

5.2.2 実験2

つぎに実機で他の手法との比較をおこなった。比較する対象としては、Astolfiの手法[8]にバックステッピング[10]を施したものを用いた。本手法とほぼ同じ初期値からスタートさせたときの z_1 - z_2 グラフと配置座標の時

Fig. 6 Experiment: proposed method: z_1 - z_2 graph($\gamma=0$)

Fig. 7 Experiment: proposed method: z_1 - z_2 graph($\gamma=3$)

Fig. 8 Experiment: proposed method: response($\gamma=0$)

Fig. 9 Experiment: proposed method: response($\gamma=3$) Fig. 10 Experiment: Astolfi's method: z_1 - z_2 graph

Fig. 11 Experiment: Astolfi's method: response

間応答を、それぞれ Fig. 10, Fig. 11 に示す。この時のパラメータは実験での試行錯誤による調整で決定した。Fig. 11 より、Astolfi の手法は原点付近でかなり応答が暴れていることが分かる。また初期値を原点から遠ざけると入力が大きくなりすぎ、応答が発散してしまうが、本手法ではかなり広範囲で安定化できた。

5.2.3 考察

実験 1 では γ が大きいほど原点近傍での振動が少なくなるため、 γ が大きいほどノイズに強いといえる。しかし γ が 3 以上ではあまり変化がなかったのは、Fig. 3 で与えられるような (27) 式の ϕ の形が、 γ が 3 以上では大きく変化しないためだと考えられる。実験 2 では、Astolfi の手法は原点付近でかなり応答が暴れ、観測ノイズに弱いことがわかる。この結果は、参考文献 [7] に述べられている不連続補償器は観測ノイズに弱いという結果と一致するが、本手法ではこの欠点が改善されている

ことがわかる。また Astolfi の手法ではかなりの偏差が残っている。とくに姿勢角の偏差が本手法に比べて顕著である。さらに、本手法では Astolfi の手法に比べ収束の速さにおいて遜色はない。以上のことから、本手法はロバスト性に優れかつ実用上収束も速い安定化手法であると考えられる。

6. おわりに

本論文では従来より筆者らが提案している一般化正準変換に基づく非ホロノミックなハミルトニアンシステムの安定化手法の有効性について、二輪車両系を対象としてロバスト性の観点からの解析とその実験検証を行った。まず設計パラメータである不可微分なポテンシャルの概形と観測外乱等による状態の摂動に対する感度との関係を考察した。また制御対象の受動性を用いた考察により物理パラメータ変動に対するロバスト安定性の十分条件を与えた。さらに実験を行い、他の手法との比較をまじえて提案手法の有効性を検証した。

最後に、本論文に対して有益な意見を下さった匿名の査読者の方々に感謝の意を表します。

参考文献

- [1] A. J. van der Schaft: L_2 -gain and passivity techniques in nonlinear control; Vol. 218 *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag (1996)
- [2] 藤本, 杉江: 一般化正準変換を用いたあるクラスの非ホロノミック系の安定化; 計測自動制御学会論文集, Vol. 36, No. 9, pp. 749-756 (2000)
- [3] 藤本, 杉江: 一般化ハミルトニアンシステムの安定化—正準変換によるアプローチ; システム制御情報学会論文誌, Vol. 11, No. 11, pp. 616-622 (1998)
- [4] K. Fujimoto and T. Sugie: Stabilization of Hamiltonian systems with nonholonomic constraints via canonical transformations; *Proc. ECC* (1999)
- [5] K. Fujimoto, K. Ishikawa and T. Sugie: Stabilization of a class of hamiltonian system with nonholonomic constraints and its experimental evaluation; *Proc. IEEE CDC'99*, pp. 3478-3483 (1999)
- [6] K. Fujimoto and T. Sugie: Canonical transformation and stabilization of generalized hamiltonian systems; *Systems and Control Letters*, 42, pp. 217-227 (2001)
- [7] 三平: 非ホロノミック系のフィードバック制御; 計測と制御, Vol. 36, No. 6, pp. 396-403 (1997)
- [8] A. Astolfi: Discontinuous control of nonholonomic systems; *Systems and Control Letters*, 27, pp. 37-45 (1996)
- [9] 中村: 非ホロノミックロボットシステム 1-5 回; 日本ロボット学会誌, Vol. 11, Nos. 4, 5, 6, 7 (1993), Vol. 12, No. 2 (1994)
- [10] R. Fierro and F. L. Lewis: Control of a nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynam-

ics; *Proc. of the 34th CDC*, Vol. 4, pp. 3805–3810
(1995)