不確定性のある系に対する離散時間スライディングモード制御*

疋田 弘光[†]・花島 直彦[†]・山下 光久[†]

Discrete-Time Sliding Mode Control for Linear Systems with Uncertainties*

Hiromitsu HIKITA[†], Naohiko HANAJIMA[†] and Mitsuhsa YAMASHITA[†]

1. はじめに

離散時間 SMC (スライディングモード制御) は, 外乱など, 不確定性の影響を 1 ステップ後にしか制御に反映できない. その結果, 瞬時に制御へ反映できる理想的な連続時間 SMC とは状態の超平面への拘束状況が異なってくる. 近年, この拘束状況が不確定性や制御入力と関係づけて研究されつつある [1-3].

本速報では, 不確定性が存在する系に離散時間 SMC を適用すると, 状態は超平面近辺にどのように拘束され, その中でどのように振る舞うのか, また, 制御則とはどのような関連があるのかを考察する. さらに, 連続時間 SMC を用いる場合でも有限時間ごとにしか入力を変更できず実際はデジタル制御系になるのでこれを離散時間 SMC の観点から解析する.

2. 制御入力の存在範囲

離散時間制御対象と状態を拘束する超平面を次とする.

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k) + bd_0(k) \quad (1)$$

$$\sigma(k) = gx(k) = 0 \quad (2)$$

ここで, $x(k) \in R^n$ は状態, $u(k) \in R$ は制御入力である. $d_0(k) \in R$ は外乱を表し, 各時点 k において $|d_0(k)|$ はある値 $\bar{d}_0(k)$ より小さいことがわかると仮定する. また, $\sigma(k) \in R$ で, $g \in R^{1 \times n}$ は $gb \neq 0$ かつ超平面に拘束されたシステムが安定であるように選ばれているとする.

制御入力を $u(k) = u_{eq}(k) + u_s(k)$ とする. $u_{eq}(k)$ は等価制御入力で, $d_0(k) = 0$ とおき連続時間 SMC に準じ $\sigma(k+1) = \sigma(k)$ より $u_{eq}(k) = -(gb)^{-1}g(A-I)x(k)$ と求められる. なお, $\sigma(k+1) = 0$ を満たす入力を等価制御入力としている研究が多いが, それを制御入力に用いるといかなる状態も 1 ステップで超平面に移されるので瞬間的に過大な入力が必要とされ現実的とはいえない.

つぎに, 外乱が存在するとして, $u_s(k)$ によりシステムの状態を超平面近辺へ移し, そこに拘束することを考える. よく知られているように $V(k) = \sigma^2(k)/2$ を定義すると, $V(k+1) < V(k)$ であればよい. したがって, 次が成立すればよい.

$$V(k+1) - V(k) = \{u_s(k) + d_0(k)\} \times \{u_s(k) + d_0(k) + 2(gb)^{-1}\sigma(k)\} < 0 \quad (3)$$

議論の簡単化のため $gb > 0$ と仮定する. 結局, (3) 式を満足するためには $u_s(k)$ を次の範囲でしか選ぶことができない.

$$\bar{d}_0(k) - 2(gb)^{-1}\sigma(k)\text{sgn}\sigma(k) < u_s(k)\text{sgn}\sigma(k) < -\bar{d}_0(k) \quad (4)$$

ここで, (4) 式を満たす $u_s(k)$ が存在する領域を図にしてみる. 横軸を $\sigma(k)$, 縦軸を $u_s(k)$ に取ると, この領域は Fig. 1 の網掛けの部分となる. この部分にあれば $u_s(k)$ はどのようなものでもよいので制御則は無数に存在するが, $|\sigma(k)|$ が小さいほど $u_s(k)$ の存在領域は狭くなる. 特に $\sigma(k)$ が

$$|\sigma(k)| \leq (gb)\bar{d}_0(k) \quad (5)$$

で決まる範囲では $|\sigma(k)|$ より小さな $|\sigma(k+1)|$ を保証

Fig. 1 Relation of $u_s(k)$ to $\sigma(k)$

* 原稿受付 2001 年 8 月 13 日

[†] 室蘭工業大学 Muroran Institute of Technology; 27-1 Mizumoto-cho, Muroran, Hokkaido 050-8585, JAPAN

Key Words: sliding mode control, discrete-time systems, uncertainties, VSS.

する $u_s(k)$ は存在しない。それゆえ、適当な離散時間 SMC により $|\sigma(k)|$ が減少していき、(5) 式の領域に入ると、この領域に閉じこめておくことができれば最良の制御といえる。この制御は

$$u_s(k) = -(gb)^{-1}\sigma(k) \quad (6)$$

で与えられる。これを用いれば、 $|\sigma(k+1)| = (gb)|d_0(k)| \leq (gb)\bar{d}_0(k)$ が成立することから明らかである。実は、この場合、 $u(k) = u_{eq}(k) + u_s(k) = -(gb)^{-1}gAx(k)$ となっていて、この $u(k)$ は $\sigma(k+1)=0$ から求める（ここでは採用しなかった）等価制御入力になっている。 $d_0(k)=0$ なら、1 ステップで $\sigma(k+1)=0$ を達成する制御であるが、(5) 式の範囲では $|\sigma(k)|$ は小さな値であるので $u(k)$ が過大になる心配はない。

つぎに、 $\sigma(k)$ が(5)式の外にある場合の制御入力について考察する。当然のことながら、 $u_s(k) = -\lambda(gb)^{-1}\sigma(k)$ 、 $(0 < \lambda < 1)$ とすると、 $\sigma(k)$ は振動することなく徐々に減衰し、過大な制御入力も押さえることが可能である。しかし、 $|\sigma(k)|$ は(5)式で決まる範囲より大きな $|\sigma(k)|$ までしか減衰を保証できない。たとえば、簡単のため $d_0(k) = \bar{d}_0 = \text{一定} (> 0)$ とし、 $\sigma(k)$ の定常状態を調べると、 $\sigma(\infty) = (gb)\bar{d}_0/\lambda > (gb)\bar{d}_0$ となる。

以上の解析より $u_s(k)$ を選ぶ一つの現実的な方法として以下のものが考えられる。

$$u_s(k) = \begin{cases} -\lambda(gb)^{-1}\sigma(k) + (\lambda-1)\bar{d}_0(k)\text{sgn}\sigma(k) \\ \quad , \text{ if } |\sigma(k)| > (gb)\bar{d}_0(k) \\ -(gb)^{-1}\sigma(k), \text{ if } |\sigma(k)| \leq (gb)\bar{d}_0(k) \end{cases} \quad (7)$$

(7) 式で決まる $\sigma(k)$ と $u_s(k)$ の関係を図に示すと Fig. 1 の PQORS のラインとなる。いま、このライン上の任意の点 $(\sigma(k), u_s(k))$ と原点を結ぶ直線を

$$u_s(k) = -\mu(gb)^{-1}\sigma(k) \quad (8)$$

と表す。 $-\mu(gb)^{-1}$ はその直線の勾配である。さて、上で述べた $u_s(k)$ の決定法に従えば、たとえば $\bar{d}_0(k) = \bar{d}_0 = \text{一定}$ で $\sigma(k) > 0$ の場合を想定すると、 $\sigma(k)$ が時間とともに小さくなるに従い $(\sigma(k), u_s(k))$ はライン上を P から Q へ移動する。このことは、 $\sigma(k)$ と $u_s(k)$ の関係を(8)式で表せば、 μ は徐々に大きくなっていき Q で $\mu=1$ となり QO 間でその値が保たれるとも解釈できる。したがって、(8)式の関係が、 $\sigma(k)$ から $u_s(k)$ へのフィードバックを表していると考え、このフィードバックゲインは可変で、 $|\sigma(k)|$ が大きいときゲインは小さく、逆に $\sigma(k)$ が原点に近づくに従いゲインは大きくなり、最終的には μ が 1 に固定されることを意味する。その結果、制御入力は抑制され過大な入力が要求されないとともに、最終的には(5)式が保証される。なお、 $\bar{d}_0(k)$ が k により変化すれば Q、R の位置が k とともに変わるが、常に(5)式を満足するまで $|\sigma(k)|$ は減少する。

3. パラメータ変動がある場合

$A \rightarrow A + \Delta A$ と適合条件を満足する変動があるとすると、簡単のためシステムは可制御正準系で表されているとする。したがって、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ a \end{bmatrix}, \quad b = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T \quad (9)$$

で $a = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_{n-1}]$ とすると、 $a_i \rightarrow a_i + \Delta a_i$ 、 $i = 0, 1, \dots, n-1$ と変動することとなる。ここで、 $|\Delta a_i| \leq \Delta \bar{a}_i$ 、 $i = 0, 1, \dots, n-1$ で、 $\Delta \bar{a}_i$ は既知とする。また、

$$\Delta a = [\Delta a_0 \ \Delta a_1 \ \cdots \ \Delta a_{n-1}] \in R^{1 \times n} \quad (10)$$

$$\Delta \bar{a} = [\Delta \bar{a}_0 \ \Delta \bar{a}_1 \ \cdots \ \Delta \bar{a}_{n-1}] \in R^{1 \times n} \quad (11)$$

を定義する。さらに、

$$d(k) = \Delta a x(k) + d_0(k) \quad (12)$$

を定義する。すると、制御対象において外乱のほかにパラメータ変動も考慮すると(1)式で、 $d_0(k)$ の代わりに $d(k)$ を用いればよい。また、 Δa_i 、 $i = 0, 1, \dots, n-1$ 、 $d_0(k)$ に関する仮定より次の $\bar{d}(k)$ に対し $|d(k)| \leq \bar{d}(k)$ が成立することがわかる。

$$\bar{d}(k) = \Delta \bar{a} |x(k)| + \bar{d}_0(k) \quad (13)$$

以上のことから、前節の議論が $\bar{d}_0(k)$ を $\bar{d}(k)$ に変更してすべて成立する。したがって、(5)式のかわりに

$$|\sigma(k)| \leq (gb)\bar{d}(k) \quad (14)$$

の範囲ではより小さな $\sigma(k+1)$ を保証する $u_s(k)$ を見いだすことができない。前節と同様 $\sigma(k)$ が(14)式の領域に入れば(6)式により $u_s(k)$ を決めるので $\sigma(k+1)$ は(14)式の領域にとどまる。結局、 $u_s(k)$ は $\bar{d}_0(k)$ を $\bar{d}(k)$ で置き換えた(7)式を用いればよい。

さて、 $\sigma(k)$ が(14)式のように拘束されると、

$$\sigma(k+1) = (gb)d(k) \quad (15)$$

が成り立っているが、前節と異なり、 $d(k)$ は $x(k)$ の関数であるので必ずしも $k \rightarrow \infty$ で $x(k)$ 自体が 0 の近辺へ収束することが保証されるわけではない。これは離散時間 SMC 固有の問題であり、確実に安定性を確保するには以下の解析が必要である。(15)式は

$$\sum_{i=0}^n (g_i - (gb)\Delta a_i)x_1(k+i) = (gb)d_0(k) \quad (16)$$

と書くことができる。ただし $g_0=0$ 、 $\Delta a_n=0$ とする。したがって、(16)式の特性方程式を

$$\beta_n z^n + \beta_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \beta_1 z + \beta_0 = 0 \quad (17)$$

とすると、 $|\Delta a_i| \leq \Delta \bar{a}_i$ であるので、各係数は

$$g_i - (gb)\Delta\bar{a}_i \leq \beta_i \leq g_i + (gb)\Delta\bar{a}_i \quad (18)$$

の範囲にある。この不確定性のもとで (17) 式が Schur 多項式ならよく、これを調べるには、連続時間系の Kharitonov の弱定理に相当する定理や、その発展形 [4] を利用することができよう。

4. 連続時間 SMC 適用時の注意

連続時間 SMC を適用する場合、ある時間周期ごとにしか制御入力を変更できず実際にはデジタル制御系になっている。その結果、どのような不都合が生じるのか、また、どう改善すべきかについて検討する。

連続時間制御対象と状態を拘束する超平面を次とする。

$$\dot{x}[t] = A_c x[t] + b_c u[t] + b_c d_c[t] \quad (19)$$

$$\sigma_c[t] = g x[t] = 0 \quad (20)$$

制御入力を $u[t] = u_{eq}[t] + u_s[t]$ とする。よく知られているように以下の議論が成立する。 $\dot{\sigma}_c[t] = 0$ より等価制御入力を求めると、 $u_{eq}[t] = -(g_c b_c)^{-1} g_c A_c x[t]$ である。また、 $\sigma_c[t] \dot{\sigma}_c[t] = (g_c b_c)(d_c[t] + u_s[t])\sigma_c < 0$ より、

$$u_s[t] = -\gamma \operatorname{sgn} \sigma_c[t], \quad \gamma > |d_c[t]| \quad (21)$$

が用いられている。ただし、 $g_c b_c > 0$ を仮定している。

さて、この制御則が時間周期 T ごとに適用される場合について考察する。まず、(19), (20) 式を差分式に変換する。ここでは T の 1 次の項までで近似したものをを用いる。したがって、これらは

$$x(k+1) = (I + A_c T)x(k) + b_c T(u(k) + d_c(k)) \quad (22)$$

$$\sigma_c(k) = g_c x(k) = 0 \quad (23)$$

となる。ただし、 $d_c(k) = d_c[kT]$ である。他の記号も同様である。 $|d_c(k)|$ はある値 $\bar{d}_c(k)$ より小さいことがわかっていると仮定する。すると、(5) 式より $\sigma_c(k)$ が

$$|\sigma_c(k)| \leq (g_c b_c T) \bar{d}_c(k) \quad (24)$$

の範囲に入ったとき、 $|\sigma_c(k+1)| \leq |\sigma_c(k)|$ を保証する入力は存在しない。それにもかかわらず、 $u_s(k)$ はこれを無視し、たとえば (21) 式で与えられるので $|\sigma_c(k+1)| > |\sigma_c(k)|$ になりうる。つまり、この場合、状態を超平面からより離す入力がわざわざ加えられたことになり、無意味なチャタリングを発生させることになる。これを避けることについて検討する。当然 $|\sigma_c(k)|$ が大きくなるときは問題なく (21) 式を利用できる。問題なのは $\sigma_c(k) = 0$ に近づいたときで、 $\sigma_c(k)$ が (24) 式の範囲に入ったとき、あるいは $\sigma_c(k)$ が (24) 式の範囲を飛び越えて符号が変わる場合である。このとき、前の議論からわかるように $d_c(k) = 0$ なら 1 サンプルステップで $\sigma_c(k+1) = 0$ を実現する制御方式を用い、 $\sigma_c(k)$ を (24) 式の範囲に閉じこめておいたほうがよいことがわかる。したがって、

$\sigma_c(k+1) = 0$ よりこの入力を求めると次が得られる。

$$\begin{aligned} u(k) &= -(g_c b_c T)^{-1} g_c (I + A_c T)x(k) \\ &= -(g_c b_c)^{-1} g_c A_c x(k) - (g_c b_c T)^{-1} \sigma_c(k) \end{aligned} \quad (25)$$

(25) 式の第 1 項は連続時間系の等価制御入力であるので、この部分は変更せず $u_s(k)$ を第 2 項に変更すればよいことになる。以上より、時間周期 T ごとに $u_{eq}[t]$ は連続時間等価制御をそのまま用い、 $u_s[t]$ は以下の制御とするのが望ましいことがわかる。 $t (= kT)$ が制御を変更する時刻であるとし、

$$u_s[t] = \begin{cases} -(g_c b_c T)^{-1} \sigma_c[t], & \text{if } |\sigma_c[t]| \leq (g_c b_c T) \gamma \\ -\gamma \operatorname{sgn} \sigma_c[t], & \text{otherwise} \end{cases} \quad (26)$$

ところで、連続時間 SMC では入力的高速切換えによるチャタリングを抑制するため、制御入力を連続化することが行われている。よく知られている方法は $|\sigma_c[t]| \leq \epsilon$ を境界層とし、この領域で

$$u_s[t] = -\frac{\gamma}{\epsilon} \sigma_c[t] \quad (27)$$

とするものである。実は、もし境界層 ϵ を $\epsilon = (g_c b_c T) \gamma$ と選ぶなら (26) 式の $|\sigma_c[t]| \leq (g_c b_c T) \gamma$ の場合の制御則と (27) 式の制御則は一致する。つまり、飽和関数型制御則 (21), (27) 式の中で (26) 式で決まる制御則が一番好ましいものであるともいえる。 ϵ がそれ以外の値にとられると、チャタリングが生じたり $\sigma_c[t]$ の減衰が保証できない領域が大きくなる。

5. おわりに

離散時間 SMC システムの状態が超平面近辺へ接近し拘束される状況と、そこでの状態の振る舞いについて考察し、離散時間 SMC を不確定性のある系へどのように適用すべきかを検討した。また、その結果をもとに連続時間 SMC を実際に用いる場合、離散時間 SMC の視点が欠かせないことも示した。なお、本速報の結果はシミュレーションでも容易に確認できることを付言する。

参考文献

- [1] 野村, 正田, 花島, 山下: 離散時間スライディングモード制御系の構成; 日本機械学会 D&D Conference'98, pp. A629-631 (1998)
- [2] S. Hui and S. H. Žak: On discrete-time variable structure sliding mode control; *Syst. Control Lett.*, Vol. 38, pp. 283-288 (1999)
- [3] C. -C. Cheng, M. -H. Lin and J. -M. Hsiao: Sliding mode controllers design for linear discrete-time systems with matching perturbations; *Automatica*, Vol. 36, No. 8, pp. 1205-1211 (2000)
- [4] 木村, 藤井, 森: ロバスト制御, コロナ社, pp. 164-168 (1994)