2 スイッチ駆動ハイブリッドシステムの安定化*

井村 順一[†]・清水 一寿[‡]・佐伯 正美[‡]

Stabilization of a Class of 2-Switch-Driven Hybrid Systems*

Jun-ichi IMURA[†], Kazutoshi SHIMIZU[‡] and Masami SAEKI[‡]

We consider the two cases to address the stabilization problem of a class of multi-modal hybrid systems with binary-switches. In one case it is reduced to the stabilization problem similar to that for the class of usual continuous linear systems under some condition. In the other case, an approach to find a dynamic state feedback controller that renders the closed loop system well-posed as well as globally asymptotically stable at the equilibrium state is proposed.

1. はじめに

連続ダイナミクスと離散ダイナミクスが混在したハイブリッドシステムは、一般に、不連続な常微分方程式により記述されるために、複数解や解が存在しないなどの現象が生じる。このため、ハイブリッドシステムを議論するうえで、解の一意性 (well-posedness) 問題を解くことは基本的な課題である。しかしながら、ハイブリッドシステムの最も簡単なクラスの一つである区分的アファインシステムの安定化などの研究でさえ、閉ループ系の well-posedness を仮定してきた [1,2]。

これに対して、筆者らはこれまでバイモードの区分的アファインシステムに対して well-posedness 条件を導出し、さらに well-posedness を保証したうえで安定化する手法を提案してきた [3-6]。最近では、スイッチ駆動ハイブリッドシステムと呼ぶマルチモードの区分的アファインシステムに対して、その well-posedness 条件についていくつかの結果を得てきている [7,8]。

これらの延長線上の研究として、本論文では、2 スイ

チを含む、すなわち 4 モードのスイッチ駆動ハイブリッドシステムに対して、well-posedness 条件を満たし、かつ安定化する手法を提案する。スイッチ駆動ハイブリッドシステム、およびその well-posedness について説明した後、フィードバック well-posedness の観点から、対象とするシステムの中で二つのクラスに注目し、おのこのクラスについて安定化法を提案する。また、タンク系と着陸系の例により本手法の有効性を検討する。

以下では、 $M = [M_{ij}]$, $x = [x_i]$ は、それぞれ行列 M の第 (i,j) 要素が M_{ij} , ベクトル x の第 i 要素が x_i であることを表すものとする。

2. 制御対象と問題設定

2.1 スイッチ駆動ハイブリッドシステム

スイッチ駆動ハイブリッドシステム [7] の中で、本論文では次の 2 スイッチの場合について考える。

$$\Sigma: \dot{\bar{x}} = (\bar{A} + \delta_1 \bar{G}_1 \bar{F}_1 + \delta_2 \bar{G}_2 \bar{F}_2) \bar{x} + \bar{B} u \quad (1)$$

$$\delta_i = \begin{cases} 0 & \text{if } \bar{S}_i \bar{x} \geq 0 \\ 1 & \text{if } \bar{S}_i \bar{x} \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

ここで

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{G}_i = \begin{bmatrix} G_i \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \bar{S}_i = \begin{bmatrix} S_i & s_i \end{bmatrix}, \bar{F}_i = \begin{bmatrix} F_i & f_i \end{bmatrix}$$

であり、 $x \in R^n$ は連続状態、 $u \in R^m$ は制御入力、 $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $G_i \in R^{n \times l}$, $S_i \in R^{1 \times n}$, $F_i \in R^{l \times n}$, $a \in R^n$, $s_i \in R$, $f_i \in R^l$ であり、 $S_i = k S_j$, $i \neq j$ を満た

* 原稿受付 2001 年 5 月 31 日

[†] 東京工業大学 大学院 情報理工学研究科 Graduate School of Information Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology; 2-12-1 Oh-Okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, JAPAN

[‡] 広島大学 工学部 Faculty of Engineering, Hiroshima University; 1-4-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima 739-8527, JAPAN

Key Words: hybrid systems, switches, well-posedness, piecewise affine systems.

す定数 k が存在しないものとする。 δ_i をスイッチと呼び、 $\delta = [\delta_1, \delta_2]^\top \in \{0,1\}^2$ とおく。このとき δ の値とモード $I \in \{1,2,3,4\}$ を $\delta_1 + 2\delta_2 + 1 = I$ により同一視する。また、(2) 式により定まるモード I の状態 x に関する領域を C_I と記す。

このシステムの事象遷移ルールは以下のように与えられるものとする [7]。

スイッチベースト遷移ルール： 連続状態 $x(t)$ が少なくとも一つの部分領域 $\bar{S}_i \bar{x} \geq (\leq) 0$ ($i=1,2$) の条件を満たすことができなくなったときに事象生起し、対応するスイッチ δ_i のみ 0 から 1 に (1 から 0 に) 切り替わる。

ここで、このルールのもとでは、事象生起時 ($t=T$ とおく) に遷移先のモードが必ず唯一に定まることに注意されたい。また、時刻 $t=T$ から新しいモードにおいて始まる解 $x(t)$ がすべての対応する条件 $\bar{S}_i \bar{x} \geq (\leq) 0$ ($i=1,2$) を満たすことができないときは続いて事象が生起し、対応するスイッチのみ 0 から 1 に (1 から 0 に) 切り替わる。こうして以後、すべての対応する条件 $\bar{S}_i \bar{x} \geq (\leq) 0$ ($i=1,2$) を満たすまで時刻 $t=T$ で各スイッチが切り替わる (この間、時間は進まない)。この場合、時間が進むことなく永久にモードを遷移し続ける現象が生じうる。これをライブロックと呼ぶ。まとめると、このルールのもとでは解が存在するならば、その一意性は必ず保証されるが、ライブロックの存在が問題となる。

2.2 well-posedness の定義

(1) 式において $u=0$ とした自律系 Σ_0 に対して well-posedness を次のように定義する。

【定義 1】 初期状態 $(I(0), x(0))$ に対して、 $x(t)$ が $[0, t_1]$ 上で $x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(\tau)) d\tau$ (f は $u=0$ とした (1) 式の右辺を表す) を満たし、かつ $[0, t_1]$ 上に事象生起時刻の左集積点が存在しないならば、 $(I(t), x(t))$ をシステム Σ_0 の $[0, t_1]$ 上での解と呼ぶ。また、おのおのの初期状態 $(I(0), x(0)) \in \{1,2,3,4\} \times R^n$ に対して、(1) 式の一意解 $(I(t), x(t))$ が区間 $[0, \infty)$ で存在するならば、システム Σ_0 は well-posed であると呼ぶ。

システム Σ_0 の well-posedness 問題では、 $\bar{S}_i \bar{x} = 0$ での解の存在性や一意性に注目すればよい [3]。これにはつぎの概念が重要な役割を果たす [3–6]。

【定義 2】 閉集合 $\mathcal{D} \subset R^n$ 上で定義されたシステム $\dot{x} = Ax + a$ を考える。 $A \in R^{n \times n}$, $a \in R^n$ は定数である。このとき、初期連続状態 $x_0 \in \mathcal{D}$ において、すべての $t \in [0, \varepsilon]$ に対して $x(t) \in \mathcal{D}$ となる正数 ε が存在するならば、 x_0 は $\mathcal{D}$ 上で滑らかに接続可能であると呼ぶ。すべての滑らかに接続可能な初期連続状態 x_0 の集合を $\mathcal{D}$ の滑らかな接続集合と呼ぶ。

モード I に対応するシステムに関する、 C_I の滑らかな接続集合を S_I と記すものとする、 S_I は各モードにおける局所解が存在する領域を表していることに注意されたい。このとき、次の結果が得られている。

【定理 1】 [7] 解軌道に事象生起時刻の右集積点が存在するとき、 $I(t)$ はその点で一意に確定できるものとする。このとき、システム Σ_0 が well-posed であるための必要十分条件は、 $\bigcup_{I=1}^{2^r} S_I = R^n$ かつ、ライブロックが生じないことである。

事象生起時刻の右集積点 t_∞ では、その時刻以後に解が一意に発展するために $(I(t_\infty), x(t_\infty))$ が一意に確定する必要がある。 $x(t_\infty)$ は常に一意に確定することが示せる [3]。一方、 $I(t_\infty)$ は現段階では不明であり、一意に確定しない例すら得られていない。このため、これ以後は陽に表記しないが、これを常に仮定するものとする。

滑らかな接続集合 S はつぎに示すように辞書式不等式により代数的に特徴づけられる。ここで辞書式不等式とは、 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top \in R^n$ において、 $x_i = 0$, $i=1,2,\dots,k-1$, $x_k > 0$ であるとき、 $x \succ 0$ と記すものである。また、 $x \succ 0$ または $x = 0$ のとき、 $x \succeq 0$ と記すものとする。このときシステム $\dot{x} = \bar{A}x$ の集合 $\mathcal{D} = \{x \in R^n \mid \bar{S}x \geq 0\}$ での滑らかな接続集合 S は、 $y = \bar{S}x$ とおくと $S = \{x \mid [y \ y^{(1)} \dots y^{(\gamma-1)}]^\top \succeq 0\}$, すなわち、

$$S = \{x \in R^n \mid \bar{T}(\gamma) \bar{x} \succeq 0\} \quad (3)$$

$$\bar{T}(\gamma) \triangleq [\bar{S}^\top (\bar{S} \bar{A})^\top \dots (\bar{S} \bar{A}^{\gamma-1})^\top]^\top \quad (4)$$

で与えられる。ここに γ は対 $(\bar{S}, \bar{A})$ の可観測性指数である。

2.3 問題設定

(1) 式のシステム Σ において、 $\bar{B}_i$ ($i=1,2,\dots,m$) を $\bar{B}$ の第 i 列、 $\bar{G}_{jk}$ ($j=1,2; k=1,2,\dots,l_j$) を $\bar{G}_j$ の第 k 列とし、 $\bar{F}_{jk}$ ($j=1,2; k=1,2,\dots,l_j$) を $\bar{F}_j$ の第 k 行とする。 q_{ij}^k ($i,j=1,2; k=1,2,\dots,l_j$) を $(\bar{S}_i, \bar{A}, \bar{G}_{jk})$ の相対次数 ($\bar{S}_i \bar{A}^h \bar{G}_{jk} = 0$, $h=0,1,2,\dots,q_{ij}^k-2$, かつ $\bar{S}_i \bar{A}^{q_{ij}^k-1} \bar{G}_{jk} \neq 0$ を満たす) とする。ここで、次の仮定をおく。

(仮定 1)

- (i) (1) 式において $a=0$, $s_i > 0$ ($i=1,2$) である。
- (ii) $\text{rank } B = m \geq 2$ である。
- (iii) $\bar{S}_i \bar{A}^k \bar{B}_j = 0$ ($i=1,2; j=1,2,\dots,m; k=1,\dots,p_i-1$) であり、かつ $\text{rank } W = 2$ である。ここで

$$W \triangleq \begin{bmatrix} \bar{S}_1 \bar{A}^{p_1-1} \bar{B}_1 & \dots & \bar{S}_1 \bar{A}^{p_1-1} \bar{B}_m \\ \bar{S}_2 \bar{A}^{p_2-1} \bar{B}_1 & \dots & \bar{S}_2 \bar{A}^{p_2-1} \bar{B}_m \end{bmatrix} \in R^{2 \times m}$$

である。

- (iv) $q_{ij}^k < p_i$ を満たす $i \in \{1,2\}$ が少なくとも一つ存在するような (j,k) に対して次式が成り立つ。

$$\bar{F}_{jk} \in \text{span}\{\bar{S}_1, \bar{S}_1 \bar{A}, \dots, \bar{S}_1 \bar{A}^{p_1-1}, \bar{S}_2, \bar{S}_2 \bar{A}, \dots, \bar{S}_2 \bar{A}^{p_2-1}\}$$

仮定 1 の (i) は原点 $x=0$ がモード 1 に割り当てられた領域の内部にあることを仮定している。(ii) は入力数が 2 以上、(iii) の (p_1, p_2) は非線形システムにおいてベクトル相対次数 [9] と呼ばれ、次章で示すシステムへの変換を保証するものである。(iv) によって不連続要素である

$\bar{F}_{jk}$ のクラスを限定している.

以上の仮定のもとで、本論文では、次の二つのクラスのシステムに分けて、各モードごとに切り替わる (動的) 状態フィードバックによる、原点での大域的漸近安定化問題を考える.

クラス A おおのの $i \in \{1, 2\}$ に対して $p_i \leq q_{ij}^k, j =$

$1, 2; k = 1, \dots, l_j$.

クラス B クラス A 以外.

3. well-posedness のもとでの安定化

3.1 クラス A の場合

次式によって与えられる座標変換を考える.

$$\begin{aligned}\xi_1 &= T(p_1)x + \bar{s}_1 \\ \xi_2 &= T(p_2)x + \bar{s}_2 \\ \eta &= Sx\end{aligned}\quad (5)$$

ここで、 $T(p_i) \triangleq [S_i^\top, (S_i A)^\top, \dots, (S_i A^{p_i-1})^\top]^\top \in R^{p_i \times n}$ であり、 $\bar{s}_i \triangleq [s_i \ 0 \dots 0]^\top \in R^{p_i}$ ($i=1, 2$) である. S は、 $[T(p_1)^\top \ T(p_2)^\top \ S^\top]^\top$ が正則で、 $S[B_1 \ B_2] = 0$ を満たすような $(n - p_1 - p_2) \times n$ の行列である. これは、仮定 1(iii) より $T(p_1)$ と $T(p_2)$ が互いに線形独立である (例えば [9] 参照) ことからこれらの条件を満たす S が必ず存在することが導ける. また、以下の入力変換を考える.

$$\begin{aligned}Wu + \begin{bmatrix} \bar{S}_1 \bar{A}^{p_1} \bar{x} + \bar{S}_1 \bar{A}^{p_1-1} \sum_{i=1}^2 \delta_i \bar{G}_i \bar{F}_i \bar{x} \\ \bar{S}_2 \bar{A}^{p_2} \bar{x} + \bar{S}_2 \bar{A}^{p_2-1} \sum_{i=1}^2 \delta_i \bar{G}_i \bar{F}_i \bar{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ SBu &= \hat{B}v_3\end{aligned}\quad (6)$$

ここで $v_i \in R$ ($i=1, 2$), $v_3 \in R^{m-2}$ は新しい入力であり、 $\hat{B}$ はこの変換で定義された行列である.

これらの変換により (1) 式は以下ようになる.

$$\tilde{\Sigma} \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ \dot{\eta} = \hat{A}_1^I (\xi - \bar{s}) + \hat{A}_2^I \eta + \hat{f}^I + \hat{B}v_3 \end{cases} \quad \text{if } \xi \in \tilde{C}_I \quad (7)$$

$I = 1, \dots, 4$

ここで、 $\xi = [\xi_1^\top \ \xi_2^\top]^\top$, $\bar{s} = [\bar{s}_1^\top \ \bar{s}_2^\top]^\top$,

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \in R^{p_i \times p_i}, \quad \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in R^{p_i}$$

であり、 $\hat{A}_j^I$ ($j=1, 2$), $\hat{f}^I$ は上記の変換で定義された行列またはベクトルである (ただし $\hat{f}^1 = 0$ となる). また、この変換による C_I を $\tilde{C}_I$ とすると、 $\tilde{C}_I = \{\xi \in R^{p_1+p_2} \mid (1 - 2\delta_i)\xi_{i,1} \geq 0, i=1, 2\}$ であり、 ξ のみにより表現される.

これより、 Σ の原点 $x=0$ における安定化問題は、システム $\tilde{\Sigma}$ の $(\xi_1, \xi_2, \eta) = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, 0)$ における安定化問題に変換された. $\tilde{\Sigma}$ が、モードの切替えに直接関係しない η のサブシステムと (ξ_1, ξ_2) から成る一つの連続システムから構成されていることに注意すると、次の結果が得られる.

【定理 2】 (1) 式のシステムにおいて仮定 1 が成り立ち、 $(\hat{A}_2^1, \hat{B})$ 可安定とする. このとき、入力 (6) 式と、 $\tilde{A}_i + \tilde{B}_i K_i$ をフルビッツにする入力 $v_i = K_i(\xi_i - \bar{s}_i)$ ($i=1, 2$) と、モード 1 において $\hat{A}_1^1 + \hat{B}K_3$ を安定にする $v_3 = K_3\eta$ (他のモードの v_3 は任意に与える) を用いるならば、閉ループ系は well-posed となり、かつ原点は大域的漸近安定となる.

(証明) $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ はそれぞれすべてのモードで同じであり、また切替え則 $x \in C_I$ は、 (ξ_1, ξ_2) にしか依存しないので、閉ループ系が well-posed であることは明らかである.

(7) 式の $\tilde{\Sigma}$ において、 $w_i = \xi_i - \bar{s}_i$ ($i=1, 2$) と置き換えると、閉ループ系は以下ようになる.

$$\begin{aligned}\text{mode I: } \begin{cases} \dot{w}_1 = (\tilde{A}_1 + \tilde{B}_1 K_1)w_1 \\ \dot{w}_2 = (\tilde{A}_2 + \tilde{B}_2 K_2)w_2 \\ \dot{\eta} = \hat{A}_1^1 w + (\hat{A}_2^1 + \hat{B}K_3)\eta \end{cases} & \text{if } \xi \in \tilde{C}_1 \\ \text{mode I: } \begin{cases} \dot{w}_1 = (\tilde{A}_1 + \tilde{B}_1 K_1)w_1 \\ \dot{w}_2 = (\tilde{A}_2 + \tilde{B}_2 K_2)w_2 \\ \dot{\eta} = \hat{A}_1^I w + \hat{A}_2^I \eta + \hat{f}^I + \hat{B}v_3 \end{cases} & \text{if } \xi \in \tilde{C}_I\end{aligned}\quad (8)$$

ここで、 $I=2, \dots, 4$, $w = [w_1^\top \ w_2^\top]^\top$ である. このとき、 $(\tilde{A}_i + \tilde{B}_i K_i)$ ($i=1, 2$) の安定性よりある時刻以後はモード 1 でありつづけるので、 $(\hat{A}_2^1 + \hat{B}K_3)$ の安定性より、全系の原点は大域的漸近安定である. $\square$

3.2 クラス B の場合

クラス B のシステム (1) 式に対して (5), (6) 式の座標、入力変換を行うと次のようになる.

$$\tilde{\Sigma} \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^I & \Gamma_{12}^I \\ \Gamma_{21}^I & \tilde{A}_2^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ \dot{\eta} = \hat{A}_1^I (\xi - \bar{s}) + \hat{A}_2^I \eta + \hat{f}^I + \hat{B}v_3 \end{cases} \quad \text{if } \xi \in \tilde{C}_I \quad (9)$$

$I = 1, \dots, 4$

ここで、クラス A の場合に比べて $\Gamma_{12}^I, \Gamma_{21}^I$ が加わっている. ただし、 $\Gamma_{12}^1 = 0, \Gamma_{21}^1 = 0, \hat{f}^1 = 0$ であることに注意されたい.

3.2.1 準備: well-posedness 条件

ここでは次節の準備として、モードの切替えに関係する (ξ_1, ξ_2) のサブシステムの well-posedness について、[8] の結果をまとめる. (9) 式において、入力を $v_i = 0, i=1, 2$ とした次のサブシステムを考える.

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^I & \Gamma_{12}^I \\ \Gamma_{21}^I & \tilde{A}_2^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad \text{if } \xi \in \tilde{C}_I \quad (10)$$

ここで、次の行列の集合を定義する.

【定義 3】 要素 (i, j) が、 $i < j$ ならば 0 であるような

$n \times m$ 実行列の集合を $\mathcal{L}^{n \times m}$ とおく. また, すべての L_{ii} が0もしくは正の値である $\mathcal{L}^{n \times m}$ に含まれるすべての行列の集合をそれぞれ $\mathcal{L}_0^{n \times m}$, $\mathcal{L}_+^{n \times m}$ で示す. さらに, $\mathcal{L}_0^{n \times m} \cup \mathcal{L}_+^{n \times m}$ を $\mathcal{L}_{0\vee+}^{n \times m}$ で示す.

【定義 4】 要素 (i, j) が, $i+1 < j$ ならば0であるような $n \times m$ 実行列の集合を $\mathcal{H}^{n \times m}$ とおく. また, すべての $H_{i,i+1}$ が0もしくは正の値である $\mathcal{H}^{n \times m}$ に含まれるすべての行列の集合をそれぞれ $\mathcal{H}_0^{n \times m}$, $\mathcal{H}_+^{n \times m}$ で示す. さらに, $\mathcal{H}_0^{n \times m} \cup \mathcal{H}_+^{n \times m}$ を $\mathcal{H}_{0\vee+}^{n \times m}$ で示す.

以後は, (10) 式が次の仮定を満たすものとする.

(仮定 2) $\tilde{A}_i^I \in \mathcal{H}_+^{p_i \times p_i}$, $i=1, 2$, $I=1, \dots, 4$.

(仮定 3) $\Gamma_{12}^2=0$, $\Gamma_{21}^3=0$, $\Gamma_{21}^2 \in \mathcal{H}_{0\vee+}^{p_2 \times p_1}$, $\Gamma_{12}^3 \in \mathcal{H}_{0\vee+}^{p_1 \times p_2}$.

このとき, (10) 式に対する滑らかな接続集合 $\mathcal{S}_I$ は次のように得られる [8].

【補題 1】 仮定 2, 3 が成り立つとする. このとき, (10) 式に対する滑らかな接続集合 $\mathcal{S}_I$ ($I=1, \dots, 4$) は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \{(\xi_1, \xi_2) | \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0\} \\ \mathcal{S}_2 &= \{(\xi_1, \xi_2) | \xi_1 \leq 0, \xi_2 + M\xi_1 \geq 0\} \\ \mathcal{S}_3 &= \{(\xi_1, \xi_2) | \xi_1 + N\xi_2 \geq 0, \xi_2 \leq 0\} \\ \mathcal{S}_4 &= \{(\xi_1, \xi_2) | \xi_1 + \tilde{N}\xi_2 \leq 0, \xi_2 + \tilde{M}\xi_1 \leq 0\} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで, $M \in \mathcal{L}_{0\vee+}^{p_2 \times p_1}$, $\tilde{M} \in \mathcal{L}_{0\vee+}^{p_2 \times p_1}$, $N \in \mathcal{L}_{0\vee+}^{p_1 \times p_2}$, $\tilde{N} \in \mathcal{L}_{0\vee+}^{p_1 \times p_2}$ であり, かつこれらの行列の (1,1) 要素はすべて0である.

さらに次の集合を定義する.

【定義 5】 行列 $M = [M_{ij}]$ の i 番目の列ベクトルを M_i とおく. このとき, $n \times m$ の実行列 $M = [M_{ij}]$ において, それぞれの $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ で, 任意の $\varepsilon_i \geq 0$ について $M_i - \varepsilon_i M_{i+1} \geq 0$ を満たすならば, $n \times m$ の実行列 M を特殊正下三角行列と呼ぶ. ここで, $M_{n+1} = 0$ である. この $n \times m$ の特殊正下三角行列の集合を $\mathcal{L}_{sp}^{n \times m}$ と表記する. また, $\mathcal{L}_{sp}^{n \times m} \cap \mathcal{L}_0^{n \times m}$ であるすべての行列の集合を $\mathcal{L}_{sp\wedge 0}^{n \times m}$ と表記する.

このとき

(仮定 4) $M_{ii}N_{ii} \neq 1$, $\tilde{M}_{ii}\tilde{N}_{ii} \neq 1$, $i=1, 2, \dots, \min\{p_1, p_2\}$ のもとで次の結果を得る.

【定理 3】 [8] 仮定 2~4 が成り立つとする. このとき, (10) 式のシステムが well-posed であるための必要十分条件は, $\tilde{M} - M \in \mathcal{L}_{sp\wedge 0}^{p_2 \times p_1}$, $\tilde{N} - N \in \mathcal{L}_{sp\wedge 0}^{p_1 \times p_2}$, かつ $I_{p_2} - MN \in \mathcal{L}_+^{p_2 \times p_2}$ である. ここで, $M, \tilde{M}, N, \tilde{N}$ は (11) 式で与えられる.

3.2.2 well-posedness のもとでの安定化

(9) 式の $\tilde{\Sigma}$ の安定化問題は $(\xi_i - \bar{s}_i, \eta) = 0$ での安定化であるので, $w_i = \xi_i - \bar{s}_i$, $i=1, 2$ と置き換える. そして, w_i の系に対して v_i^a , v_i^b を新しい入力として, 次の動的フィードバックコントローラを考える.

$$\begin{cases} \dot{w}_{ci} = v_i^b, & i=1, 2 \\ v_i = w_{ci} + v_i^a \end{cases} \quad (12)$$

このとき, (9) 式を $w_i, i=1, 2$ で置き換えた式と, (12) 式とで構成される拡大系は以下になる.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{w}}_1 \\ \dot{\bar{w}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^I & \tilde{\mathcal{L}}_{12}^I \\ \tilde{\mathcal{L}}_{21}^I & \tilde{A}_2^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1^I \\ a_2^I \end{bmatrix} \\ \quad + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^a \\ v_2^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^b \\ v_2^b \end{bmatrix} \\ \dot{\eta} = \hat{A}_1^I w + \hat{A}_2^I \eta + \hat{f}^I + \hat{B} v_3 \quad \text{if } \xi \in \tilde{\mathcal{C}}_I \end{cases} \quad (13)$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i^I &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_i^I & \tilde{B}_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R^{(p_i+1) \times (p_i+1)} \\ \tilde{\mathcal{L}}_{ij}^I &= \begin{bmatrix} \Gamma_{ij}^I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R^{(p_i+1) \times (p_j+1)} \\ a_i^I &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_i^I \bar{s}_i + \Gamma_{ij}^I \bar{s}_j \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{(p_i+1)}, \quad B_i = \begin{bmatrix} \tilde{B}_i \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{(p_i+1)} \\ D_i &= [0 \dots 0 \ 1]^\top \in R^{(p_i+1)} \\ i, j &= 1, 2 \ (i \neq j) \end{aligned}$$

であり, $\bar{w}_i = [w_i \ w_{ci}]^\top$ である. また, $I=1$ について, $\Gamma_{12}^1=0$, $\Gamma_{21}^1=0$, $\tilde{A}_1^1 \bar{s}_i = 0$ であることに注意されたい.

さらに, (13) 式の $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ のサブシステムを次のようにまとめて表す.

$$\dot{\bar{w}} = A\bar{w} + a^I + Bv^a + Dv^b \quad (14)$$

ここで

$$\begin{aligned} A^I &\triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^I & \tilde{\mathcal{L}}_{12}^I \\ \tilde{\mathcal{L}}_{21}^I & \tilde{A}_2^I \end{bmatrix}, \quad a^I \triangleq \begin{bmatrix} a_1^I \\ a_2^I \end{bmatrix}, \quad \bar{w} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix}, \\ v^a &\triangleq \begin{bmatrix} v_1^a \\ v_2^a \end{bmatrix}, \quad v^b \triangleq \begin{bmatrix} v_1^b \\ v_2^b \end{bmatrix}, \\ B &\triangleq \text{diag}\{B_1, B_2\}, \quad D \triangleq \text{diag}\{D_1, D_2\} \end{aligned}$$

である. ここで, $\text{diag}\{A_1, A_2\}$ は行列 A_1, A_2 のブロック対角行列を表す. また, $e_i = [1 \ 0 \dots 0] \in R^{1 \times p_i}$ を用いて次の $C_i^I \in R^{1 \times (p_i+1)}$, $c_i^I \in R$ を定義する.

$$[C_i^I \ c_i^I] = (1 - 2\delta_i)[e_i \ s_i] \quad (15)$$

このとき, 次の結果を得る.

【定理 4】 (1) 式において仮定 1~4 が成り立ち, クラス B であり, $v_i = 0$, $i=1, 2$ とした (9) 式の ξ_i のサブシステムが well-posed であり, $(\hat{A}_2^1, \hat{B})$ 可安定とする. このとき, 条件式

$$Q = \text{diag}\{Q_1, Q_2\} > 0, \ \varepsilon^I > 0, \ (1 - 2\delta_i)\hat{h}_i^I > 0 \quad (16)$$

$$\omega_i^I > 0, \ \omega_1^I c_1^I + \omega_2^I c_2^I > 0 \quad (17)$$

$$L_1 < 0 \quad (18)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} L_I & \varepsilon^I a^I + B\hat{h}^I + D\hat{k}^I - \text{col}\{\omega_i^I Q_i (C_i^I)^\top\} \\ \hline * & -2\varepsilon^I (\omega_1^I c_1^I + \omega_2^I c_2^I) \end{array} \right] < 0 \quad (19)$$

$$I = 2, 3, 4$$

$$L_I \triangleq A^I Q + D R^I + (A^I Q + D R^I)^\top$$

($\text{col}\{x_i\}_{i=1,2}$ は $[x_1 \ x_2]^\top$ を表す) を満たす, $Q \in R^{(\bar{p}+2) \times (\bar{p}+2)}$ ($\bar{p} \triangleq p_1 + p_2$), $R_{ij}^I \in R^{1 \times (p_j+1)}$ ($i, j = 1, 2$), $\hat{k}^I = [\hat{k}_i^I] \in R^2$, $\hat{h}^I = [\hat{h}_i^I] \in R^2$, $\varepsilon^I \in R$, $\omega^I = [\omega_i^I] \in R^2$ が存在するならば, 入力 (6) 式と,

$$\begin{aligned} v^a &= \begin{cases} 0 & \text{if } I = 1 \\ \hat{h}^I \varepsilon^{I-1} & \text{if } I = 2, 3, 4 \end{cases} \\ v^b &= \begin{cases} R^1 Q^{-1} \bar{w} & \text{if } I = 1 \\ R^I Q^{-1} \bar{w} + \hat{k}^I \varepsilon^{I-1} & \text{if } I = 2, 3, 4 \end{cases} \\ v_3 &= \begin{cases} K_3 \eta & \text{if } I = 1 \quad (\hat{A}_2^1 + \hat{B} K_3 : \text{安定}) \\ \text{任意} & \text{if } I = 2, 3, 4 \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

を組み込んだ (12) 式の動的状態フィードバックコントローラを用いれば, 閉ループ系は well-posed であり, かつ原点 $(\xi, w_c, \eta) = (\bar{s}, 0, 0)$ で大域的漸近安定となる.

(証明) まず閉ループ系の well-posedness について示す. (9) 式の ξ_i のサブシステムと (12) 式の動的コントローラで構成される拡大系で, $v_i^a = 0$, $v_i^b = 0$, $i = 1, 2$ とした場合についてのモード I の滑らかな接続集合 S_f^I は, (11) 式の ξ_1, ξ_2 の辞書式不等式に状態 w_{ci} を単に挿入することで得られる. こうして, この場合は定理 3 から $\bigcup_{I=1}^4 S_f^I = R^{\bar{p}+2}$ であり, ライブロックは存在しないといえる. さらに (20) 式を組み込んだ (12) 式により構成される閉ループ系の各モードにおける滑らかな接続集合を S_f^{cl} で表すと, $\hat{h}_i^I$ の符号の設定により, 各 I について $S_f^{cl} \supseteq S_f^I$ が成り立つ. これより閉ループ系において $\bigcup_{I=1}^4 S_f^{cl} = R^{\bar{p}+2}$ であり, ライブロックは存在しないことが導ける. ゆえに定理 1 より閉ループ系は well-posed である.

つぎに閉ループ系の原点での大域的漸近安定について示す. (13) 式の $\bar{w}_i$ のサブシステムと (20) 式で構成される閉ループ系

$$\dot{\bar{w}} = (A^I + D R^I Q^{-1}) \bar{w} + (a^I + B \frac{h^I}{\varepsilon^I} + D \frac{k^I}{\varepsilon^I}) \quad (21)$$

に対して, 次のリアプノフ関数を考える.

$$V_I = \bar{w}^\top Q^{-1} \bar{w} + \frac{1}{\varepsilon^I} \quad (22)$$

このとき, 定理の条件式および S-procedure より, $\dot{V}_I(\bar{w}) < 0$ となり $\bar{w}(t)$ は $\bar{w} = 0$ に収束することがいえる. こうしてある時刻以後は $I(t) = 1$ であり続ける. よって $\hat{A}_2^1 + \hat{B} K_3$ の安定性より, 全系の原点は大域的漸近安定である. $\square$

定理 4 における, (9) 式の ξ_i のサブシステムが well-posed であるという条件は, クラス B に対しては閉ループ系をフィードバック制御によって well-posed にするための必要条件である. また, (16), (19) 式の条件式は LMI とはなっていないことに注意されたい. 実際に定理 4 を用いて設計を行う場合, (17) 式の ω_i^I は $\omega_1^I c_1^I + \omega_2^I c_2^I > 0$

となるよう任意の正の値を与えることにより (16), (18), (19) 式は LMI 形式となるので数値計算により解くことができる. ω_i^I をいかに与えるかは今後の課題の一つである.

4. 例

4.1 タンク系

クラス A の場合の例として Fig. 1 のようにバルブとポンプがあらかじめ備わったタンク系の安定化を考える.

Fig. 1 5-tank system

タンク 1 の下のバルブは Fig. 1 の規則に従って開閉する. また, ポンプは Fig. 1 の規則に従い, 作動時にはタンク 3 からタンク 1 へ水を汲み上げる. このシステムの制御目標は, 各タンクの水位を目標値になるように制御することである. Fig. 1 において, x_i は平衡状態 x_{ie} からの変位, $\bar{u}_i$ は蛇口 i から排出された水の量, u_i は平衡入力 u_{ie} からの変位を示している. また, $\bar{u} = u_e$ は一定である. なお, タンクは十分に深く, バルブ開閉切替え, ポンプ動作の時間遅れなどはないものとする. ここで, 平衡状態と入力 $-x_{1e} + u_e = 0$, $x_{1e} - x_{2e} + u_{1e} = 0$, $x_{2e} - x_{3e} = 0$, $x_{3e} - x_{4e} + x_{5e} = 0$, $-x_{5e} + u_{2e} = 0$, $x_{ie} > 0$, $i = 1, \dots, 5$ を満たす. このとき, (1) 式において各行列は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{G}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{G}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1e} \\ -x_{1e} \\ kx_{4e} \\ -kx_{4e} \end{bmatrix}, \\ \bar{S}_1 &= [0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1], \bar{S}_2 = [0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1] \end{aligned}$$

これより, 仮定 1 を満たし, かつクラス A の場合であることが確認できる. (5), (6) 式の座標, 入力変換により,

(7) 式は次式のように与えられる.

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = v_1 \\ \dot{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} & \text{if } \xi \in \tilde{C}_1 \\ \dot{\eta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{1e} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{if } \xi \in \tilde{C}_2 \\ \dot{\eta} = \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 & -1 & 0 \\ -1 & k & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kx_{4e} \\ -kx_{4e} \end{bmatrix} & \text{if } \xi \in \tilde{C}_3 \\ \dot{\eta} = \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 & 0 & 0 \\ -1 & k & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{1e} + kx_{4e} \\ -kx_{4e} \end{bmatrix} & \text{if } \xi \in \tilde{C}_4 \end{cases}$$

モード1において η に関するダイナミクスは安定であるので, 定理2を適用でき, 例えば安定化制御則は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} v_1 &= -2(\xi_1 - 1) \\ v_2 &= [-1 \ -2] \left(\xi_2 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

制御していない時と, (6), (23) 式による制御入力を用いた時のシミュレーション結果をそれぞれ Fig. 2(a), (b) に示す. また, 制御入力の時間応答を Fig. 2(c) に示した. このときの各値は $k=0.3$, $x_{1e}=0.5$, $x_{4e}=1.0$ とし, 初期値は $x(0)=[8 \ 2 \ 6 \ 2 \ 2]^\top$ とした. 制御していない場合の Fig. 2(a) では, バルブが高速で開閉するチャタリングと呼ばれる現象が起こっている. これは実用上避けるべき現象である. 一方, 提案則を用いた場合の Fig. 2(b) では, 滑らかに切り替わり原点に収束しており, 制御入力が有効に働いていることがわかる. このとき, モードの移り変わりは, 初期状態がモード4であり, 0.347秒でモード3に移り, 3.365秒でモード1となった.

4.2 着陸系

クラスBの場合の例として, Fig. 3のシステムについて考える. これは, 飛行機のような物体に二つの脚がついた着陸系の例である. ここで, $\hat{x}_1$, $\hat{x}_3$ はそれぞれ系の位置とし $\hat{x}_2$, $\hat{x}_4$ はそれぞれの速度である. $\hat{x}_5$, $\hat{x}_6$ はそれぞれ機体の点A, 点Bに働く力であり, これは係数 λ_1, λ_2 の一次遅れ要素の駆動系を通じて u_1 , u_2 により制御できるものとする. k はばね係数, d はダンピング係数, m は系の質量, I は重心まわりの慣性モーメント, l は脚の自然長, L は機体のA-B間の距離である. また, u_1 , u_2 を制御入力とし, $\alpha = -1/m - L^2/(4I)$, $\beta = -1/m + L^2/(4I)$ とする. ここで, x_e , $u_e (=0)$ をそれぞれ平衡状態と平衡入力と置く. また, $2k(l - x_{1e}) = mg$, $x_{1e} = x_{3e}$ に注意する. この場合の制御問題は, 系を滑らかな切替えのもとで x_e

(a) Time response of the state in $u=0$

(b) Time response of the state in the proposed method

(c) Time response of the control input

Fig. 2 Simulation results of a 5-tank system

に着陸させることである. ゆえに, $x = \hat{x} - x_e$, $u = \hat{u} - u_e$ とおくと, (1) 式の各行列は次のように与えられる.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha k & \alpha d & \beta k & \beta d & -\alpha & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta k & \beta d & \alpha k & \alpha d & -\beta & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 0 \\ -\beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \\ 0 \\ -\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Fig. 3 2 d.o.f. landing system

$$\begin{aligned}\bar{F}_1 &= \begin{bmatrix} k & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k(x_{3e} - l) \end{bmatrix}, \\ \bar{F}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & k & d & 0 & 0 \\ k(x_{1e} - l) \end{bmatrix}, \\ \bar{S}_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l - x_{1e} \end{bmatrix}, \\ \bar{S}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ l - x_{3e} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ここで、 $\delta_1=0(\delta_2=0)$ のとき脚 A(B) が地面より離れ、 $\delta_1=1(\delta_2=1)$ のとき脚 A(B) が地面に接地しているとした。これより、仮定1を満たし、かつクラス B の場合であることが示せる。また、(5)、(6) 式の座標、入力変換により (9) 式の各行列は

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1^1 &= \tilde{A}_2^1 = \tilde{A}_2^2 = \tilde{A}_1^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{A}_1^2 &= \tilde{A}_2^3 = \tilde{A}_1^4 = \tilde{A}_2^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\alpha k & -\alpha d & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^3 = 0$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{12}^4 = \Gamma_{21}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\beta k & -\beta d & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられる。これより仮定2, 3を満たす。さらに、 $v_1, v_2 = 0$ とした (9) 式のシステムの滑らかな接続集合は (11) 式において

$$M = \tilde{M} = N = \tilde{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta k & -\beta d & 0 \end{bmatrix}$$

により与えられることがわかるので、仮定4を満たし、かつ定理3を満たすことが確認できる。こうして入力 $v_1 = v_2 = 0$ のシステムは well-posed である。よって定理4を用いて制御系を設計することができる。そこで $w_i = \xi_i - \bar{c}_i$ の座標変換を施し、(13) 式のように拡大系を構成する。各物理量は $k=55$, $d=1$, $m=20$, $l=2$, $L=5$, $g=9.8$ とおいた。これにより、平衡点は $x_{1e} = x_{3e} = 0.2182$ である。また $\lambda_1, \lambda_2 = 1$ とした。さらに (17) 式の ω_i^I は、 $\omega_1^2 = 40$, $\omega_2^2 = 0.1$, $\omega_1^3 = 0.1$,

$\omega_2^3 = 40$, $\omega_1^4 = 40$, $\omega_2^4 = 40$ と与えた。(16), (18), (19) 式を解いて得られた制御則は次のとおりである。

$$\begin{cases} v^a = 0 \\ v^b = \begin{bmatrix} -5603.2 & -1827.5 & -338.9 & -29.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5603.2 & -1827.5 & -338.9 & -29.0 \end{bmatrix} \bar{w} \\ \text{if } x \in C_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^a = \begin{bmatrix} -63.2 \\ 38.5 \end{bmatrix} \\ v^b = \begin{bmatrix} -9367.3 & -3011.8 & -542.4 & -46.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1882.1 & 592.2 & 101.8 & 8.8 \\ -5603.2 & -1827.5 & -338.9 & -29.0 \end{bmatrix} \bar{w} + \begin{bmatrix} 228.8 \\ -0.6 \end{bmatrix} \\ \text{if } x \in C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^a = \begin{bmatrix} 38.5 \\ -63.2 \end{bmatrix} \\ v^b = \begin{bmatrix} -5603.2 & -1827.5 & -338.9 & -29.0 \\ 1882.1 & 592.2 & 101.8 & 8.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9367.3 & -3011.8 & -542.4 & -46.6 \end{bmatrix} \bar{w} + \begin{bmatrix} -0.6 \\ 228.8 \end{bmatrix} \\ \text{if } x \in C_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^a = \begin{bmatrix} -64.9 \\ -64.9 \end{bmatrix} \\ v^b = \begin{bmatrix} -9367.3 & -3011.8 & -542.4 & -46.6 \\ 1882.1 & 592.2 & 101.8 & 8.8 \\ 1882.1 & 592.2 & 101.8 & 8.8 \\ -9367.3 & -3011.8 & -542.4 & -46.6 \end{bmatrix} \bar{w} + \begin{bmatrix} 221.3 \\ 221.3 \end{bmatrix} \\ \text{if } x \in C_4 \end{cases} \quad (24)$$

制御していない時と、(6), (12), (24) 式による制御時のシミュレーション結果を Fig. 4(a), (b) にそれぞれ示す。また、制御入力の時間応答を Fig. 4(c) に示した。初期値は、 $x(0) = [10 \ -2 \ 8 \ 2 \ 0 \ 0]^T$ とした。制御していない場合の Fig. 4(a) では着陸時の振る舞いが振動的であるが（現実的には $\bar{x}_1$, $\bar{x}_3$ が負となる箇所ではストローク制限等を設ける必要があるが、ここでは単純な比較のため、そのような処置はしていない）、制御した場合の Fig. 4(b) では着陸時の振る舞いではチャタリングのような現象もなく、所期の目的を達成している。しかし、Fig. 4(c) に見られるように制御入力はかなり大きい。これは、設計においてシングルリアプノフ関数を使っていることにより、フィードバックゲインが大きくなっていることによるものと推測される。より保守性の少ない制御系設計法に改善することが今後の課題の一つである。

5. おわりに

本研究では、二つのスイッチを含むスイッチ駆動ハイブリッドシステムに対して、well-posedness を保証しつつ、かつ大域的に漸近安定化する手法を、well-posedness の観点からクラス A とクラス B に分けてそれぞれ議論し

(a) Time response of the state in $u = 0$

(b) Time response of the state in the proposed method

(c) Time response of the control input

Fig. 4 Simulation results of a landing system

た。クラス A の場合では、切替えに関するダイナミクスを連続システムに変換することにより、連続な線形システムの制御論を使って安定化できることを示した。クラス B の場合では、動的コントローラを導入することによって設計パラメータの自由度を増やすことにより LMI タイプの可解条件に安定化問題を帰着した。

参考文献

- [1] M. Johansson and A. Rantzer: Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems; *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 43, No. 4, pp. 555–559 (1998)
- [2] A. Hassibi and S. Boyd: Quadratic stabilization and control of piecewise-linear systems; *Proc. of American Control Conference*, pp. 3659–3664 (1998)
- [3] J. Imura and A. J. van der Schaft: Characterization of well-posedness of piecewise linear systems;

IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 45, No. 9, pp. 1600–1619 (2000)

- [4] J. Imura and A. J. van der Schaft: Well-posedness of a class of dynamically interconnected systems; *Proc. of 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3031–3036 (1999)
- [5] J. Imura: Feedback well-posedness and stabilizability of bimodal piecewise affine systems; *CD-ROM Proceedings of MTNS* (2000)
- [6] J. Imura: Classification and stabilizability of bimodal piecewise affine systems; *Proc. of 39th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1409–1414 (2000)
- [7] J. Imura: Well-posedness analysis of switch-driven hybrid systems; *Proc. of American Control Conference*, pp. 862–867 (2001)
- [8] J. Imura, K. Shimizu and M. Saeki: Stabilization with well-posedness of a class of switch-driven hybrid systems (2001) (submitted to)
- [9] A. Isidori: *Nonlinear Control Systems*, 3rd Edition, Springer (1995)