補償器切替えに伴う外乱応答の最悪 $\mathcal{L}_2$ ゲイン解析*

浅井 徹†

Worst-Case $\mathcal{L}_2$ Gain Analysis of Systems with Controller Switching and Dynamic Uncertainty*

Toru ASAI†

This paper deals with analysis of worst-case $\mathcal{L}_2$ gain in terms of bumpy responses due to disturbance for systems with controller switching. Control systems often have bumpy responses caused by switching controllers. Those responses are harmful, since they not only degrade control performance but also may damage plants, actuators and so on. Several methods have been proposed to attenuate bumpy responses. However, most of those methods lack performance and/or robustness guarantee against disturbance and/or uncertainty. In particular, no exact definitions of bumpy responses have been formulated. This paper first defines bumpy responses to be dealt with. Based on the definition, we propose a method to analyze the responses by using LMIs. The method can be applied to the worst-case Hankel norm analysis. The effectiveness of the proposed method is examined by using a numerical example.

1. はじめに

現実の制御対象を制御する場合、さまざまな補償器を切り替えながら制御を行うことがある。たとえば、制御仕様の変更によって補償器を切り替える場合、あるいは新たに設計した補償器を検証するために動作中の制御系に補償器を付加する場合等がその例である。このように補償器を切り替える場合、切替え直後に応答が大きく乱れることがある。このような応答は閉ループ系の制御性能を著しく損い、また、制御対象に物理的な損傷を与えるなどの危険を伴うことがあるので望ましくない。そこで、このような応答を抑制する手法が必要となる。

一般に、切替えによって応答が乱れるのは、閉ループ系の状態が十分減衰していないまま切替えを行うためである。よって、切り離されている補償器（オフライン補償器）に何らかの制御を施し、オフライン補償器を適切な状態にして切替えを行えば、応答の乱れをある程度抑制することができる。従来より、この目的を達成するためのさまざまな手法が提案されている [2–4]。しかしな

がら、従来の手法は閉ループ系の状態が十分に減衰していない原因を陽に考慮していない。また、制御対象のモデル化誤差も考慮されておらず、実用上の適用範囲が限定される可能性が高い。

従来手法の多くは、アンチwindアップの手法を用いて、切替え前のオフライン補償器の応答が動作中の応答に近づくようにオフライン補償器を駆動する手法を与えている [2,4]。しかしながら、これらの手法はあらかじめ定められた性能指標に基づいて設計されたものではないため、手法が間接的であり、また結果に対する理論的な保証がない。

一方、最近 Paxman らによって、切替え後の応答を直接考慮して切替え時の補償器の状態を設定する手法が提案されている [3]。ただし、参考文献 [3] では制御対象の状態が正確に得られることが仮定されており、制御対象にモデル化誤差等が存在する場合に得られる結果については何も保証されていない。

以上のように、従来法は外乱やモデル化誤差が存在する状況に対しては不十分である。よって、外乱やモデル化誤差を陽に考慮して、切替え時の応答の乱れを抑制する手法が必要になる。しかしながら、現在までに「応答の乱れ」の定式化がなされておらず、何を評価指標とすればよいかは明らかでない。そこで本論文では、外乱と不確かさの存在を陽に考慮して、応答の乱れを数学的に

* 原稿受付 2001年6月19日

† 大阪大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Osaka University; 2-1 Yamadaoka, Suita city, Osaka 565-0871, JAPAN

Key Words: bumpless transfer, robust control, LMI, Hankel norm.

定式化する．さらに，その定式化に基づいて，応答の乱れの大きさを解析する手法を提案する．この手法は，実際に切替えが起こるときの挙動を解析するために必要になるだけでなく，そのような応答を抑制するための補償器を設計する際に必要となる予備的な結果としても重要である．また，本論文の結果を用いると，不確かさが存在する場合に，最悪ハンケルノルムの評価が可能となることも示す．

本論文で用いる記法は標準的なものである． $\|x\|_{2(a,b)}$ は区間 (a,b) 上の $\mathcal{L}_2$ ノルム，すなわち

$$\|x\|_{2(a,b)} = \left(\int_a^b \|x(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

を表す． $(a,b]$ 等の場合も同様である．ただし， $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表す． $\Delta \star M$ は Δ と M の線形分数変換 (LFT) を表す．本論文ではシステムと作用素を同義のものとみなし，文脈にしたがっていずれかの表現を用いることとする．ただし，すべてのシステムは因果的であるとする． $\|\cdot\|_i$ はシステムの $\mathcal{L}_2$ 誘導ノルムを表す．すなわち，

$$\|\Delta\|_i = \sup_{w \in \mathcal{L}_2(-\infty, \infty) \setminus \{0\}} \frac{\|\Delta w\|_{2(-\infty, \infty)}}{\|w\|_{2(-\infty, \infty)}}$$

である．

2. 補償器の切替えと外乱に対する応答

制御系の一部の要素が切り替わるとき，それに伴って応答が大きく乱れることがある．このような応答を定量的に評価するために，ここでは補償器が切り替わる場合を例に挙げ，問題となる応答の定式化を行う．

通常，補償器の切替えを行う場合は，ある補償器を用いて有限な時間だけ制御を行い，その後，別の補償器に切り替えて制御が行われる．また，多数の補償器を切り替えて用いることもある．しかしながら，ここでは問題を簡単にするために，用いる補償器の数は2とし，さらにそれぞれの補償器が制御する時間区間は無限とする．すなわち，ある補償器で時刻 $-\infty$ から 0 まで制御を行い，その後，時刻 0 から ∞ までつぎの補償器を用いて制御を行うと仮定する．この仮定は必ずしも現実に即したものであるが，複数の補償器を有限時間間隔で切り替える場合であっても，切替え間の間隔が十分長ければこの仮定に基づいた議論は実用上は妥当と考えられる．

ここでは，補償器の切替えが生じるシステムの例として Fig. 1 のシステムを考える． M はあらかじめ与えられた線形時不変システムのモデル集合 $\mathbf{M}$ の任意の要素を表す．一方， w は切替えに関係なく外部からシステムに印加される外乱であり， z は応答を評価するための出力である．Fig. 1 では，観測出力と制御入力を評価出力としている．

Fig. 1 Switching of controllers

$K^{(1)}$, $K^{(2)}$ は，各閉ループ系が通常の意味で任意の $M \in \mathbf{M}$ に対してロバスト安定になるように与えられた線形時不変な補償器であり，それらは時刻 0 で $K^{(1)}$ から $K^{(2)}$ へと切り替わるものとする．すなわち，区間 $t \in (-\infty, 0]$ では $K^{(1)}$ で制御が行われ，区間 $t \in (0, \infty)$ では $K^{(2)}$ によって制御されるものとする．ただし，制御対象と補償器を含むすべての状態は $t \rightarrow -\infty$ のとき 0 とし，切替え時の $K^{(2)}$ の状態は 0 とする．このとき， w から z までの切替えも含めた閉ループシステム $\mathcal{G}$ は各 $M \in \mathbf{M}$ に対して時変な線形作用素となる．

Fig. 1 の閉ループ作用素 $\mathcal{G}$ に外乱 w が印加されると，切替え後の評価出力はつぎのように表される．

$$z_- = \mathcal{P}_- z = \mathcal{P}_- \mathcal{G} w \quad (1)$$

ただし， $\mathcal{P}_-$ は切替え後の信号を取り出す射影作用素であり，以下のように定義される．

$$(\mathcal{P}_- z)(t) = \begin{cases} z(t), & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

(1) 式の w を分解することによって， z_- をさらにつぎのように表すことができる．

$$z_- = \mathcal{P}_- \mathcal{G} (w_- + w_+) \quad (2)$$

$$= \mathcal{P}_- \mathcal{G} w_- + \mathcal{P}_- \mathcal{G} w_+ \quad (3)$$

ただし，

$$w_- = \mathcal{P}_- w. \quad (4)$$

$$w_+ = w - w_- \quad (5)$$

である．

(3) 式右辺第 1 項の $\mathcal{P}_- \mathcal{G} w_-$ は切替え後の外乱 w_- に起因し，切替えには無関係に定まる応答である．一方，第 2 項の $\mathcal{P}_- \mathcal{G} w_+$ は切替え前の外乱に基づく応答であり，その振舞いは切替えによって支配される．よって，切替えによって生じる応答の乱れを定量的に評価するためには， $\mathcal{P}_- \mathcal{G} w_+$ の大きさを評価する必要がある．

以上の議論に基づいて，本論文では $\mathcal{L}_2(-\infty, 0]$ から $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ への作用素 $\mathcal{P}_- \mathcal{G}$ に着目し，モデル集合 $\mathbf{M}$ に含

まれるすべてのシステムに対する $\mathcal{P}_G$ の誘導ノルムの上界を解析する手法を考える. すなわち, 本論文では以下のように定義される量の上界を解析する手法を考える.

$$\sup_{\substack{w \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \setminus \{0\} \\ M \in \mathbf{M}}} \frac{\|Gw\|_{2(0, \infty)}}{\|w\|_{2(-\infty, 0]}} \quad (6)$$

3. 問題設定

この節では前節の議論に基づいて具体的に問題設定を行う. (6) 式を考える場合, 切替え前の評価出力は (6) 式に関与しない. 同様に, 切替え後に印加される外乱も (6) 式に関与しない. このことは, 切替え前と切替え後を分離し, 印加される外乱と評価される出力を個別に解析, 評価することが可能であることを示唆している. すなわち, 外乱が印加される際のシステムと応答を評価する際のシステムは必ずしも同じである必要はなく, 切替え時の接続条件さえ与えれば切替え前後で異なるシステムを考えてもよい. そこで本論文では, より一般的な外乱や評価出力を扱うために Fig. 2 に示される切替えシステムを考える. このとき, モデル集合は線形時不変システムとシステム集合の LFT によって与えられる場合を考える.

Fig. 2 Analysis problem

Fig. 2 において, $w(t) \in \mathbf{R}^{m_1}$ は外乱, $z(t) \in \mathbf{R}^{p_1}$ は外乱の影響を評価するための評価出力を表し, G_a, G_c はそれぞれ切替え前, 切替え後のシステムをモデル化した一般化プラントである. G_a には制御対象やその不確かさのモデル, 補償器等のほか, 外乱の周波数特性を表す重み関数等が含まれる. 一方, G_c には不確かさを伴う制御対象や補償器のほかに, 評価を重みづけするための周波数重み等も含まれる. 本論文では, G_a と G_c は以下の状態空間実現によって与えられるものとする.

$$G_a: \begin{cases} \dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_{a0} \nu(t) + B_{a1} w(t) \\ \zeta(t) = C_a x_a(t) + D_{a0} \nu(t) + D_{a1} w(t) \end{cases} \quad (7)$$

$$G_c: \begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c \nu(t) \\ \zeta(t) = C_{c0} x_c(t) + D_{c0} \nu(t) \\ z(t) = C_{c1} x_c(t) + D_{c1} \nu(t) \end{cases} \quad (8)$$

ただし, $x_a(t) \in \mathbf{R}^{n_a}$, $x_c(t) \in \mathbf{R}^{n_c}$ はそれぞれ一般化プラント G_a, G_c の状態である. さらに, G_a, G_c は安定, すなわち, A_a と A_c のすべての固有値は左半平面に存在

するものとする.

(7), (8) 式の $\nu(t) \in \mathbf{R}^{m_0}$, $\zeta(t) \in \mathbf{R}^{p_0}$ には不確かさが以下のように接続される.

$$\nu(t) = (\Delta \zeta)(t), \quad \forall t \in (-\infty, \infty)$$

ここで, Δ は不確かさを表す線形時不変なシステムであり, つぎの集合に属する任意の要素であるとする.

$$\Delta = \{\Delta: \|\Delta\|_i \leq 1\} \quad (9)$$

Fig. 2 のシステムでは, $t=0$ で $\Delta \star G_a$ から $\Delta \star G_c$ への切替えが発生する. 切替え前, すなわち, $t=-\infty$ から $t=0$ までは外乱 $w \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$ が $\Delta \star G_a$ に印加される. ただし, $x_a(t)$ はつぎの条件

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_a(t) = 0$$

を満足するものとし, $t \rightarrow -\infty$ で Δ に蓄積されているメモリはないものとする. 一方, $x_c(0_+)$ は

$$x_c(0_+) = S_{ca} x_a(0) \quad (10)$$

により定められ, この初期値によって $t=0_+$ から $t=\infty$ までの $\Delta \star G_c$ の応答が定められる. ここで, S_{ca} は初期値の遷移を定める定数行列である. また, $t=0$ で G_a に接続されている Δ に蓄積されたメモリは, そのまま G_c に接続される Δ に設定される. 視点を変えると, この状況は $t=-\infty$ から $t=\infty$ まで存在する Δ に, $t \in (-\infty, 0]$ では G_a が接続され, $t=0$ で G_a から G_c に切り替わると考えることもできる. Fig. 2 のブロック線図において, ブロックの上下方向の信号は, 状態に対する参照, 設定を意味し, 破線は切替え時に状態またはメモリの設定が行われることを表している.

Fig. 2 の枠組は, 前節で述べた補償器切替えの問題を含むより一般的なものである. たとえば G_a, G_c をそれぞれ Figs. 3, 4 のように設定すれば, Fig. 1 に示されるような補償器切替えの問題を扱うことができる. ここで, $\Delta \star P$ は不確かさを伴う制御対象のモデル集合, W_d は外乱の周波数特性をモデル化した周波数重み関数であり, 一方, W_m, W_c はそれぞれ $K^{(2)}$ に関する観測出力と制御入力の評価するための重み関数である. $\Delta \star P$ は, 高次の制御対象を低次のノミナルモデルと周波数重み関数で近似したものや, 複数の制御対象をモデル化したものなどに対応し, Δ はそのときのモデル化誤差を表す.

この場合, $P, W_d, W_m, W_c, K^{(1)}, K^{(2)}$ の状態をそれぞれ $x_p(t), x_d(t), x_m(t), x_c(t), x_k^{(1)}(t), x_k^{(2)}(t)$ とすると, 適当な実現に対して $x_a(t), x_c(t)$ は

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_k^{(1)}(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix}, \quad x_c(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_k^{(2)}(t) \\ x_m(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}$$

Fig. 3 An example of G_a Fig. 4 An example of G_c

によって与えられる．よって， S_{ca} をつぎの行列

$$S_{ca} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

によって与えれば，補償器切替え時の状態の遷移を表すことができる．

Fig. 2 の枠組は，Figs. 3, 4 の例以外にも，新たに補償器を付加する場合 ($K^{(1)} = 0$ の場合)，補償器は不変 ($K^{(1)} = K^{(2)}$) でノミナルシステムだけが切り替わる場合，補償器を取り除く場合 ($K^{(2)} = 0$ の場合) などを統一的に扱うことができる． $K^{(2)} = 0$ の場合は，多重ループ制御系の最も外側の補償器を取り外す場合などに対応する．

以上のように定義されるシステム $\Delta \star G_a$ ， $\Delta \star G_c$ ， S_{ca} に対し，本論文の目的は，切替え前の外乱が切替え後の応答に与える影響の大きさを解析することである．そこで，本論文では以下の問題を考える．

【問題】 G_a ， G_c はそれぞれ (7)，(8) 式で定義される一般化プラントであり， $S_{ca} \in \mathbf{R}^{n_c \times n_a}$ は与えられた行列であるとする．さらに， $\Delta \in \Delta$ に対して， $t \in (-\infty, 0]$ では G_a が，一方， $t \in (0, \infty)$ では G_c が接続され，それらは (10) 式に基づいて切り替えられるものとする．このとき，つぎのように定義される γ の上界を求めよ．

$$\gamma = \sup_{\substack{w \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \setminus \{0\} \\ \Delta \in \Delta}} \frac{\|z\|_{2(0, \infty)}}{\|w\|_{2(-\infty, 0]}} \quad (11)$$

本論文の問題に対する解を与えるためには， $\|w\|_{2(-\infty, 0]}$ を用いて $\|z\|_{2(0, \infty)}$ の上界を評価する必要がある．不確かさが存在しない場合，切替え前の外乱の影響は切替え

時の G_a の状態 $x_a(0)$ に集約され， z は $x_a(0)$ によって完全に決定される．このとき，状態可到達集合の解析手法を用いれば γ の上界を得ることは比較的容易である [1]．また，不確かさが存在する場合であっても，それがメモリレスなものであれば，本質的には状態可到達集合の解析を行うことは可能であり [6]，その結果に基づいて γ の上界を評価することができる．しかし，本論文で扱うような動的な不確かさを考える場合，外乱の影響は $x_a(0)$ だけでなく Δ のメモリとしても蓄積されるため，状態可到達集合の解析だけでは γ の上界を得ることはできない．

4. 主要な結果

Fig. 2 のシステムにおいて，その切替え後の挙動は $x_a(0)$ だけでなく Δ に蓄積されているメモリにも依存する．よって， $\|z\|_{2(0, \infty)}$ の上界を得るためには， Δ に存在する最悪のメモリを評価しなければならない．

つぎの補題は切替え時に Δ に蓄積される最悪メモリを評価する手法を与えている．

【補題 1】 G_a ， G_c はそれぞれ (7)，(8) 式で定義される一般化プラントであり， $S_{ca} \in \mathbf{R}^{n_c \times n_a}$ は与えられた行列であるとする．さらに， $\Delta \in \Delta$ に対して， $t \in (-\infty, 0]$ では G_a が，一方， $t \in (0, \infty)$ では G_c が接続され，それらは (10) 式に基づいて切り替えられるものとする．このとき， $\Delta \star G_c$ が任意の $\Delta \in \Delta$ に対して安定であり，かつ，つぎの不等式

$$\begin{bmatrix} A_a^T Q + Q A_a & Q B_{a0} & Q B_{a1} & C_a^T \\ B_{a0}^T Q & -I & 0 & D_{a0}^T \\ B_{a1}^T Q & 0 & -\beta I & D_{a1}^T \\ C_a & D_{a0} & D_{a1} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

を満足する $\beta > 0$ ， $Q > 0$ ($Q \in \mathbf{R}^{n_a \times n_a}$) が存在するならば，任意の $\Delta \in \Delta$ に対して $\Delta \star G_a$ は安定であり，さらに任意の $w \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$ に対してつぎの不等式が成立する．

$$\begin{aligned} & \|\nu\|_{2(0, \infty)}^2 - \|\zeta\|_{2(0, \infty)}^2 \\ & \leq \|\zeta\|_{2(-\infty, 0]}^2 - \|\nu\|_{2(-\infty, 0]}^2 \\ & \leq \beta \|w\|_{2(-\infty, 0]}^2 \end{aligned} \quad (13)$$

(証明) ν と w に対応して G_a を以下のように分割する．

$$G_a = [G_{a0} \ G_{a1}] \quad (14)$$

このとき，(12) 式より

$$\begin{bmatrix} A_a^T Q + Q A_a & Q B_{a0} & C_a^T \\ B_{a0}^T Q & -I & D_{a0}^T \\ C_a & D_{a0} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

が成立するので，有界実補題より G_{a0} の $\mathcal{L}_2$ 誘導ノルムが 1 未満となる．よって，スモールゲイン定理より G_a と Δ の閉ループ系は任意の $\Delta \in \Delta$ に対して安定となる．

G_a , G_c と Δ との閉ループ系はそれぞれ安定であるので, $w \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$ に対して $\nu \in \mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$, $\zeta \in \mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ が成立する. このとき Δ の定義より, $\nu = \Delta \zeta$ を満足する任意の ν , ζ , $\Delta \in \Delta$ に対して以下の不等式が成立する.

$$0 \leq \|\zeta\|_{2(-\infty, \infty)}^2 - \|\nu\|_{2(-\infty, \infty)}^2 \quad (16)$$

$$= (\|\zeta\|_{2(-\infty, 0]}^2 - \|\nu\|_{2(-\infty, 0]}^2) + (\|\zeta\|_{2(0, \infty)}^2 - \|\nu\|_{2(0, \infty)}^2) \quad (17)$$

すなわち

$$-(\|\zeta\|_{2(0, \infty)}^2 - \|\nu\|_{2(0, \infty)}^2) \leq \|\zeta\|_{2(-\infty, 0]}^2 - \|\nu\|_{2(-\infty, 0]}^2 \quad (18)$$

一方, (7), (12) 式より, 任意の $t \in (-\infty, 0]$ に対して以下の不等式も成立する.

$$\begin{aligned} 0 &\geq \begin{bmatrix} x_a(t) \\ \nu(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_{a1} & L_{a4} & L_{a5} \\ L_{a4}^T & L_{a2} & L_{a6} \\ L_{a5}^T & L_{a6}^T & L_{a3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ \nu(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{d}{dt} (x_a(t)^T Q x_a(t)) - \beta w(t)^T w(t) \\ &\quad + [\zeta(t)^T \zeta(t) - \nu(t)^T \nu(t)] \end{aligned} \quad (19)$$

ただし

$$\begin{aligned} L_{a1} &= A_a^T Q + Q A_a + C_a^T C_a \\ L_{a2} &= -I + D_{a0}^T D_{a0} \\ L_{a3} &= -\beta I + D_{a1}^T D_{a1} \\ L_{a4} &= Q B_{a0} + C_a^T D_{a0} \\ L_{a5} &= Q B_{a1} + C_a^T D_{a1} \\ L_{a6} &= D_{a0}^T D_{a1} \end{aligned}$$

である. 仮定より $\lim_{t \rightarrow -\infty} x_a(t) = 0$ が成立するので, (19) 式を $t = -\infty$ から $t = 0$ まで積分することによって, さらに以下の不等式を得る.

$$0 \geq x_a(0)^T Q x_a(0) - \beta \|w\|_{2(-\infty, 0]}^2 + (\|\zeta\|_{2(-\infty, 0]}^2 - \|\nu\|_{2(-\infty, 0]}^2) \quad (20)$$

ここで $Q > 0$ より任意の $x_a(0)$ に対して $x_a(0)^T Q x_a(0) \geq 0$ となるので, (20) 式より次式が成立する.

$$\|\zeta\|_{2(-\infty, 0]}^2 - \|\nu\|_{2(-\infty, 0]}^2 \leq \beta \|w\|_{2(-\infty, 0]}^2 \quad (21)$$

よって, (18), (21) 式より (13) 式が成り立つ. $\square$

もし, 切替え時刻において Δ にメモリが蓄積されていなければ, 切替え後の Δ の入力 ζ と出力 ν のノルムの間には, 以下の関係が成立する.

$$\|\nu\|_{2(0, \infty)}^2 \leq \|\zeta\|_{2(0, \infty)}^2 \quad (22)$$

このとき, ν のノルムは ζ のノルムよりも大きくなることはない. しかし, 一般には Δ にメモリが存在する

ため (22) 式は成立しない. これに対し, (13) 式は ν と ζ のノルムの差の上界が $\beta \|w\|_{2(-\infty, 0]}^2$ によって与えられることを示している. すなわち, 補題 1 は切替え時に Δ に蓄積されているメモリの上界が $\beta \|w\|_{2(-\infty, 0]}^2$ によって与えられることを示しており, β は切替え前の外乱 $w \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$ から Δ のメモリへの最悪ゲインの上界を与えている.

(12) 式を満足する β の下限を求めれば, 補題 1 の範囲で Δ のメモリの上界を最もタイトに評価することができる. ここで, (12) 式は Q , β に関する LMI になっており, β を最小化することは容易である.

補題 1 の β を用いれば, (11) 式の上界を与えることができる.

【定理 1】 G_a , G_c はそれぞれ (7), (8) 式で定義される一般化プラントであり, $S_{ca} \in \mathbf{R}^{n_c \times n_a}$ は与えられた行列であるとする. さらに, $\Delta \in \Delta$ に対して, $t \in (-\infty, 0]$ では G_a が, 一方, $t \in (0, \infty)$ では G_c が接続され, それらは (10) 式に基づいて切り替えられるものとする. このとき, (12) 式を満足する $\beta > 0$, $Q > 0$ ($Q \in \mathbf{R}^{n_a \times n_a}$) が存在し, さらに, つぎの不等式

$$\begin{bmatrix} A_a^T Y_a + Y_a A_a & Y_a B_{a0} & Y_a B_{a1} & \lambda C_a^T \\ B_{a0}^T Y_a & -\lambda I & 0 & \lambda D_{a0}^T \\ B_{a1}^T Y_a & 0 & -\eta I & \lambda D_{a1}^T \\ \lambda C_a & \lambda D_{a0} & \lambda D_{a1} & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} A_c^T Y_c + Y_c A_c & Y_c B_c & \mu C_{c0}^T & C_{c1}^T \\ B_c^T Y_c & -\mu I & \mu D_{c0}^T & D_{c1}^T \\ \mu C_{c0} & \mu D_{c0} & -\mu I & 0 \\ C_{c1} & D_{c1} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

$$Y_a - S_{ca}^T Y_c S_{ca} > 0 \quad (25)$$

を満足する $Y_a > 0$ ($Y_a \in \mathbf{R}^{n_a \times n_a}$), $Y_c > 0$ ($Y_c \in \mathbf{R}^{n_c \times n_c}$), $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\eta > 0$ が存在するならば, 任意の $\Delta \in \Delta$ に対して $\Delta \star G_a$, $\Delta \star G_c$ は安定であり, 次式が成立する.

$$\gamma < \sqrt{\eta + \beta \mu} \quad (26)$$

(証明) (24) 式が成り立てば, 以下の不等式

$$\begin{bmatrix} A_c^T \hat{Y}_c + \hat{Y}_c A_c & \hat{Y}_c B_c & C_{c0}^T \\ B_c^T \hat{Y}_c & -I & D_{c0}^T \\ C_{c0} & D_{c0} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

が $\hat{Y}_c = Y_c / \mu > 0$ に対して成立する. このとき, G_c を ζ と z に対応して

$$G_c = \begin{bmatrix} G_{c0} \\ G_{c1} \end{bmatrix} \quad (28)$$

と分割すると, 有界実補題より G_{c0} の $\mathcal{L}_2$ 誘導ノルムは 1 未満となるので, スモールゲイン定理より $\Delta \star G_c$ は任意の $\Delta \in \Delta$ に対して安定である. さらに, 仮定より (12)

式が成立するので、補題 1 より $\Delta \star G_a$ も安定となる。

(23) 式が成立することから、ある $\varepsilon > 0$ が存在して次の不等式が成立する。

$$\begin{bmatrix} A_a^T Y_a + Y_a A_a & Y_a B_{a0} & Y_a B_{a1} & \lambda C_a^T \\ B_{a0}^T Y_a & -\lambda I & 0 & \lambda D_{a0}^T \\ B_{a1}^T Y_a & 0 & -(\eta - \varepsilon)I & \lambda D_{a1}^T \\ \lambda C_a & \lambda D_{a0} & \lambda D_{a1} & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

ここで、 $w \in \mathcal{L}_{2(-\infty, 0]}$ を任意の外乱とすると、(12), (19), (20) 式の場合と同様にして、(29) 式から以下の不等式を導くことができる。

$$0 \geq x_a(0)^T Y_a x_a(0) - (\eta - \varepsilon) \|w\|_{2(-\infty, 0]}^2 + \lambda (\|\zeta\|_{2(-\infty, 0]}^2 - \|\nu\|_{2(-\infty, 0]}^2) \quad (30)$$

定義より、 $\nu = \Delta \zeta$ を満足する任意の ν , ζ , $\Delta \in \Delta$ に対して $\|\zeta\|_{2(-\infty, 0]}^2 - \|\nu\|_{2(-\infty, 0]}^2 \geq 0$ が成立し、さらに $\lambda > 0$ であることから、

$$\lambda (\|\zeta\|_{2(-\infty, 0]}^2 - \|\nu\|_{2(-\infty, 0]}^2) \geq 0$$

が成立する。よって、(30) 式より次式を得る。

$$x_a(0)^T Y_a x_a(0) \leq (\eta - \varepsilon) \|w\|_{2(-\infty, 0]}^2 \quad (31)$$

一方、(8), (24) 式より任意の $t \in (0, \infty)$ に対して次式が成立する。

$$\begin{aligned} 0 &\geq \begin{bmatrix} x_c(t) \\ \nu(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_{c1} & L_{c3} \\ L_{c3}^T & L_{c2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ \nu(t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{d}{dt} (x_c(t)^T Y_c x_c(t)) + z(t)^T z(t) \\ &\quad + \mu [\zeta(t)^T \zeta(t) - \nu(t)^T \nu(t)] \end{aligned} \quad (32)$$

ただし、

$$\begin{aligned} L_{c1} &= A_c^T Y_c + Y_c A_c + \mu C_{c0}^T C_{c0} + C_{c1}^T C_{c1} \\ L_{c2} &= -\mu (I - D_{c0}^T D_{c0}) + D_{c1}^T D_{c1} \\ L_{c3} &= Y_c B_c + \mu C_{c0}^T D_{c0} + C_{c1}^T D_{c1} \end{aligned}$$

である。ここで、 $\Delta \star G_c$ が安定であることから $\lim_{t \rightarrow \infty} x_c(t) = 0$ となることに注意して、(32) 式を $t = 0$ から $t = \infty$ まで積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \|z\|_{2(0, \infty)}^2 &\leq x_c(0_+)^T Y_c x_c(0_+) \\ &\quad - \mu (\|\zeta\|_{2(0, \infty)}^2 - \|\nu\|_{2(0, \infty)}^2) \end{aligned} \quad (33)$$

$x_a(0)$ と $x_c(0_+)$ に関しては、(25) 式と (10) 式より

$$\begin{aligned} &x_a(0)^T Y_a x_a(0) \\ &\geq x_a(0)^T S_{ca}^T Y_c S_{ca} x_a(0) \\ &= x_c(0_+)^T Y_c x_c(0_+) \end{aligned} \quad (34)$$

が成立する。

以上のように得られる条件 (31), (33), (34) 式と補題 1 より、以下の不等式が導かれる。

$$\begin{aligned} &\|z\|_{2(0, \infty)}^2 \\ &\leq x_c(0_+)^T Y_c x_c(0_+) + \beta \mu \|w\|_{2(-\infty, 0]}^2 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\leq x_a(0)^T Y_a x_a(0) + \beta \mu \|w\|_{2(-\infty, 0]}^2 \quad (36)$$

$$\leq (\eta + \beta \mu - \varepsilon) \|w\|_{2(-\infty, 0]}^2 \quad (37)$$

よって、 $w \neq 0$ に対して以下の関係が成立する。

$$\frac{\|z\|_{2(0, \infty)}^2}{\|w\|_{2(-\infty, 0]}^2} \leq (\eta + \beta \mu - \varepsilon) \quad (38)$$

ここで、(29) 式の ε は、 w , Δ とは無関係に定まり、さらに w は任意であったので、(38) 式より以下の関係が成立する。

$$\begin{aligned} \gamma &= \sup_{\substack{w \in \mathcal{L}_{2(-\infty, 0]} \setminus \{0\} \\ \Delta \in \Delta}} \frac{\|z\|_{2(0, \infty)}}{\|w\|_{2(-\infty, 0]}} \\ &\leq \sqrt{\eta + \beta \mu - \varepsilon} \\ &< \sqrt{\eta + \beta \mu} \end{aligned}$$

□

(26) 式の右辺は (11) 式の誘導ノルムの上界を与える。ここで、 η は外乱 w が $x_a(0)$ を介して z に与える影響の大きさを表し、一方、 μ は切替え時に Δ に蓄積されているメモリが z に与える影響の大きさを表している。また、定理 1 は、補題 1 の結果に対する S -procedure[1] を用いて z の大きさを評価している。

(26) 式の右辺の下限を求めれば、定理 1 の範囲でよりタイトな評価を得ることができる。このためには、(12), (23)~(25) 式のもとで $\eta + \beta \mu$ を最小化すればよい。このとき、(23)~(25) 式は Y_a , Y_c , λ , η , μ に関する LMI となっており、 $\eta + \beta \mu$ は η , μ に関する一次結合になっている。よって、与えられた β に対して $\eta + \beta \mu$ を最小にする Y_c , Y_a , λ , η , μ を得ることは容易である。さらに、(23)~(25) 式は β に依存しないので、各 β に対する $\eta + \beta \mu$ の下限は β に関して単調非減少である。そこで、補題 1 と定理 1 の枠組の上で $\eta + \beta \mu$ を最小にするためには、まず (12) 式を用いて β を最小化し、その後、(23)~(25) 式を用いて $\eta + \beta \mu$ を最小化すればよい。

(11) 式の誘導ノルムはハンケルノルム [5] の定義をその特別な場合として含むので、定理 1 を用いれば、ただちにロバストハンケルノルムの評価を得ることができる。

【系 1】 $G(s)$ を以下の状態空間実現によって与えられる安定な一般化プラントとする。

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_0 & B_1 \\ C_0 & D_{00} & D_{01} \\ C_1 & D_{10} & D_{11} \end{bmatrix} \quad (39)$$

ただし、 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $D_{11} = 0$ であり、また、 $D_{01} = 0$ もしくは $D_{10} = 0$ の少なくともどちらか一方が成立するものとする。このとき、以下の不等式

$$\begin{bmatrix} A^T Q + Q A & Q B_0 & Q B_1 & C_0^T \\ B_0^T Q & -I & 0 & D_{00}^T \\ B_1^T Q & 0 & -\beta I & D_{01}^T \\ C_0 & D_{00} & D_{01} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} A^T Y_a + Y_a A & Y_a B_0 & Y_a B_1 & \lambda C_0^T \\ B_0^T Y_a & -\lambda I & 0 & \lambda D_{00}^T \\ B_1^T Y_a & 0 & -\eta I & \lambda D_{01}^T \\ \lambda C_0 & \lambda D_{00} & \lambda D_{01} & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \quad (41)$$

$$\begin{bmatrix} A^T Y_c + Y_c A & Y B_0 & \mu C_0^T & C_1^T \\ B_0^T Y_c & -\mu I & \mu D_{00}^T & D_{10}^T \\ \mu C_0 & \mu D_{00} & -\mu I & 0 \\ C_1 & D_{10} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (42)$$

$$Y_a > Y_c \quad (43)$$

を満足する $\beta > 0$, $\eta > 0$, $\mu > 0$, $\lambda > 0$, $Q > 0$ ($Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$), $Y_a > 0$ ($Y_a \in \mathbf{R}^{n \times n}$), $Y_c > 0$ ($Y_c \in \mathbf{R}^{n \times n}$) が存在すれば, $\Delta \star G(s)$ は任意の $\Delta \in \Delta$ に対して安定であり, かつ, 以下の不等式が成立する.

$$\sup_{\Delta \in \Delta} \|\Delta \star G\|_H < \sqrt{\eta + \beta \mu} \quad (44)$$

ここで, $\|\cdot\|_H$ はハンケルノルムを表す.

5. 数値例

本節では数値例を用いて提案手法の有効性の検証を行う. ここでは, 与えられたモデル集合に対し, 系 1 の結果を用いたハンケルノルムの上界と, モデル集合から適当に選ばれた要素に対する実際のハンケルノルムを計算し, それらを比較する.

ここでは, 不確かさを伴う以下のシステムを考える.

$$p_\delta(s) = p(s) + w(s)\delta(s) \quad (45)$$

$p(s)$, $w(s)$ は, それぞれ次のように定義されるノミナルシステム, 重み関数である.

$$p(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}, \quad w(s) = \frac{1}{10^{-4}s + 1} \quad (46)$$

一方, $\delta(s)$ は不確かさを表し, $\|\delta\|_\infty \leq 1$ を満足する安定な伝達関数であるとする. ただし, $\|\cdot\|_\infty$ は H^∞ ノルムを表す.

以上のシステムに対して, 系 1 を適用して最悪ハンケルノルムの上界を求めると, 1.603 が上界として得られる. 一方, 各 $\omega_0 \in \mathbf{R}$ によってパラメトライズされる以下の伝達関数

$$\delta_*(s) = \frac{1 - \frac{L(\omega_0)}{2}s}{1 + \frac{L(\omega_0)}{2}s}, \quad L(\omega_0) = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (47)$$

を考えると, 各 $\omega_0 > 0$ に対して $\|\delta_*\|_\infty \leq 1$ となる. よって, (45) 式の $\delta(s)$ に (47) 式の $\delta_*(s)$ を代入し, 各 $\omega_0 > 0$

に対して $p(s) + w(s)\delta_*(s)$ のハンケルノルムを求めると Fig. 5 の結果を得る. Fig. 5 より, この例題に対しては系 1 がタイトな結果を与えていることがわかる.

以上のように, $p(s)$, $w(s)$ が (46) 式によって与えられる場合には本論文の結果はタイトな結果を与えている. 一方, より一般の場合, たとえば $w(s)$ が特に低周波数帯域で小さなゲインをもつ場合や, 切替え前後で $p(s)$ が異なる場合等を数値的に検証した結果では, 少なくとも一次の $\delta(s)$ ではタイトな結果は得られていない. しかしながら, この事実だけから本論文の結果の保守性を議論することはできないため, さらなる解析が必要である.

Fig. 5 Hankel norm analysis

6. おわりに

本論文では, 切替えを伴い, かつ不確かさが存在するシステムに対して, 切替え前の外乱から, 切替え後の応答への最悪 $\mathcal{L}_2$ ゲインの上界を与える手法を示した. 上界は二つの LMI 最適化問題を順次解くことによって得られ, 効率的に解を得ることができる. また, その特別な場合として, ロバストハンケルノルムの上界が得られることも示し, 数値例によってその有効性の検証を行った.

参考文献

- [1] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM (1994)
- [2] R. Hanus, M. Kinnaert and J. -L. Henrotte: Conditioning technique, a general anti-windup and bumpless transfer method; *Automatica*, Vol. 23, No. 6, pp. 729-739 (1987)
- [3] J. Paxman and G. Vinnicombe: Optimal transfer schemes for switching controllers; *Proc. 39th IEEE Conf. Decision Contr.*, pp. 1093-1098 (2000)
- [4] M. C. Turner and D. J. Walker: Linear quadratic bumpless transfer; *Automatica*, Vol. 36, No. 8, pp. 1089-1101 (2000)
- [5] K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover: *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall (1995)
- [6] 片山: 可到達集合解析に基づくロバストモデル規範制御系の設計, 大阪大学修士論文 (2001)