行列のジョルダン標準形の数値計算法*

大竹 剛[†]・古賀 雅伸[‡]・三平 満司[§]

A Method for Numerical Computation of Jordan Canonical Form of Matrix*

Go Ohtake[†] and Masanobu Koga[‡] and Mitsuji Sampei[§]

The Jordan canonical form of a matrix plays an important role in control system theory. But the numerically stable computation method has not been established. In this paper, we propose a numerical algorithm for the computation of Jordan canonical form of matrix. The transformation matrix consists of principal vectors obtained by the intersection of the kernel of the eigen-vector spaces. And we define the numerical Jordan canonical form of matrix and propose a more stable numerical method. The numerical example shows that the proposed method is more reliable than the well-known commercially available software.

1. はじめに

制御対象を同定する場合、対象を離散時間系として扱うことが多いが、連続時間系の方が極や零点と応答波形の関係が離散時間系よりも詳細に把握できるなどの理由で、離散時間モデルを連続時間モデルに変換したいことがある。

離散時間系を連続時間系へ変換する方法は大きく分けて2通りある。一つは行列の対数を数値的に計算する数値的方法[1,2]、もう一つはシステム行列をジョルダン標準形に変換して求める解析的方法[3-5]である。前者の方法では、[1]で問題とされた、重複固有値をもつ行列の対数関数を正確に計算する方法が[2]で提案されている。一方、後者の方法ではジョルダン標準形を数値的に求め

る方法が必要となるが、ジョルダン標準形に関して構造不安定である行列(付録参照)のジョルダン標準形を数値的に安定に求めることは難しい[6]。ジョルダン標準形はこの変換問題に限らず、状態遷移行列や正準形にも用いられる[7]ことから、これを数値的に求める方法が必要とされている。

本論文では、まずジョルダン標準形を求める数値計算に適したアルゴリズムを提案する。つぎに、ジョルダン標準形を数値的に求める際の問題点について述べる。構造的に不安定な行列は、微小であっても摂動が加わると(次節で説明する)ジョルダン型が変化するので、丸め誤差等の数値計算誤差によって変化し得るジョルダン型の集合を考え、その集合からある評価関数を最小とするものを最適な数値解とする方法を提案する。最後に、数値例題により本論文で提案する方法の有効性を示す。

2. ジョルダン標準形

本節では、後の議論のため行列 A のジョルダン標準形(Jordan canonical form)の数学的定義を復習し、ジョルダン標準形と密接な関係があるジョルダン型について述べる。いま、 A が代数的重複度[8] $t_1, \dots, t_p$ の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ をもつとする。このとき、

$$\det(zI - A) = (z - \lambda_1)^{t_1} (z - \lambda_2)^{t_2} \dots (z - \lambda_p)^{t_p}$$

が成立し、各固有値 λ_k に対して次式を満たす固有ベクトル u_k が $s_k (\geq 1)$ 個存在する。

* 原稿受付 2001年3月26日

[†] 東京工業大学 大学院 情報理工学研究科 Dept. of Mechanical and Environmental Informatics, Tokyo Institute of Technology; 2-12-1 Oh-Okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, JAPAN

[‡] 九州工業大学 情報工学部 Dept. of Control Engineering and Science, Kyushu Institute of Technology; 680-4 Kawazu, Iizuka, Fukuoka 820-8502, JAPAN

[§] 東京工業大学 大学院 理工学研究科 Dept. of Mechanical and Control Engineering, Tokyo Institute of Technology; 2-12-1 Oh-Okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, JAPAN

Key Words: linear system, system identification, numerical method.

$$Au_k = \lambda_k u_k$$

s_k は幾何学的重複度 [8] であり、次式で求めることができる。

$$\text{rank}(A - \lambda_k I) = n - s_k$$

もし、ある固有値 λ (添字 k を省略する) に対し $s < t$ ならば、行列 A は対角化不能である。この場合、ある整数 $\bar{h} \geq 2$ に対し、

$$\text{rank}(\text{Ker}((A - \lambda I)^{\bar{h}})) = t$$

となり、方程式

$$(A - \lambda I)^l x_l = 0, \quad l = 1, 2, \dots, \bar{h} \quad (1)$$

の解が存在する。ただし、 $\text{Ker}(M)$ は行列 M のカーネル空間を張るベクトルから構成される行列である。さらにもし、

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^l v_l &= 0 \\ (A - \lambda I)^{l-1} v_l &\neq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ならば、(1) 式の解を A の主要ベクトル、特に段階 l の主要ベクトルとよび v_l で表す [9]。 (1) 式から

$$(A - \lambda I)^{\bar{h}} v_l = (A - \lambda I)^{\bar{h}-l} [(A - \lambda I)^l v_l] = 0$$

が成り立つので、段階 l の主要ベクトル v_l はそれより高い段階の解でもあり、また最高段階 $\bar{h}$ の解でもある。したがって、(1) 式で表される各方程式の解全体は、 $l = \bar{h}$ の方程式の一般解に含まれる。ところが、 v_l を段階 l の主要ベクトルと仮定すると、

$$(A - \lambda I)^l v_l = (A - \lambda I)^{l-\varrho} [(A - \lambda I)^{\varrho} v_l] = 0$$

となるので、 $\varrho < l$ については角括弧の中は段階 $l - \varrho$ の主要ベクトルを表す。すなわち

$$(A - \lambda I)^{\varrho} v_l = v_{l-\varrho} \quad (\varrho < l)$$

である。これより、 $v_0 = 0$ と定義すれば、特に $\varrho = 1$ に対して次の重要な関係を得る。

$$(A - \lambda I)v_l = v_{l-1}, \quad l = 1, 2, \dots, \bar{h}$$

したがって、ある固有ベクトル v_1 に対して主要ベクトルは次の公式から順々に求まる。

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)v_1 &= 0 \\ (A - \lambda I)v_2 &= v_1 \\ &\vdots \\ (A - \lambda I)v_h &= v_{h-1}, \quad (1 \leq h \leq \bar{h}) \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 式の関係をもつベクトル列 $v_1, \dots, v_h$ を主要ベクトル鎖 [9] といい、固有ベクトルの数 s と同数の主要ベクトル鎖が存在する。なお、 h を主要ベクトル鎖の高さ、 v_h

を progenitor とよぶ [8]。

さて、添字 k を付けて (3) 式をまとめると、

$$\begin{aligned} AT_{ki} &= T_{ki} J_{ki} \\ T_{ki} &= [v_1, \dots, v_{h_i}] \quad (i = 1, \dots, s_k) \\ J_{ki} &= \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda_k & 1 \\ & & & & \lambda_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

となる (J_{ki} をジョルダン細胞とよぶ)。すべての主要ベクトル鎖をまとめ、行列 $T_k := [T_{k1}, \dots, T_{ks_k}]$ を作る。この行列を各固有値 λ_k に対して求め、これらをまとめて $n \times n$ 行列 $T := [T_1, \dots, T_p]$ を作ると、 T は正則であり、

$$J = T^{-1}AT = \text{diag}(J_{ki}) \quad \begin{pmatrix} k = 1, \dots, p \\ i = 1, \dots, s_k \end{pmatrix} \quad (5)$$

を得る。(5) 式が行列 A のジョルダン標準形の数学的定義である。また (4) 式より、高さ h の主要ベクトル鎖 1 個に h 次のジョルダン細胞 1 個が対応することが分かる。

さて (2) 式より、主要ベクトル v_l は零空間

$$N_l := \text{nullspace}(A - \lambda I)^l$$

の成分であり、さらに、

$$v_l \in N_l - N_{l-1}$$

の関係を満たす。ただし $N_l - N_{l-1}$ は N_l から N_{l-1} を除いた空間を表す。さらに、 v_l はそれより高い段階の解でもあり、また $N_{\bar{h}} = N_{\bar{h}+1} = \dots = \Psi$ であることから、

$$N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_{\bar{h}} = \Psi \quad (6)$$

である。 $\bar{h} = 3$ の場合における主要ベクトル鎖の関係の例を Fig. 1 に示す。

ここで、 N_l の次元を $m_l := \dim(N_l)$ と定義すると、

Fig. 1 Arrangement of principal vector chains

$$s = m_1 < m_2 < \dots < m_{\bar{h}} = t$$

となるので、たとえば高さ l の主要ベクトル鎖の個数は $(m_l - m_{l-1}) - (m_{l+1} - m_l)$ と求められる。したがって、固有値 λ に対するジョルダン細胞の構造は $(m_1, \dots, m_{\bar{h}})$ や、各主要ベクトル鎖の高さ $(h_1, \dots, h_s)$ などによって一意に決まる。これらを相異なる固有値に対してそれぞれ求めてまとめたものを特性数とよび、これによってジョルダン標準形の構造が決定される。特性数には以下のようなものがある [8,9]。

- Kågström の特性数：零空間 N_l の次元の並び
 $[(m_1, \dots, m_{\bar{h}_1})_1, \dots, (m_1, \dots, m_{\bar{h}_p})_p]$
- Segre の特性数：主要ベクトル鎖の高さの並び
 $[(h_1, \dots, h_{s_1})_1, \dots, (h_1, \dots, h_{s_p})_p]$
- Weyr の特性数：各段階の主要ベクトルの数の並び
 $[(c_1, \dots, c_{\bar{h}_1})_1, \dots, (c_1, \dots, c_{\bar{h}_p})_p]$

簡単のため、(重複) 固有値が 1 個しか存在しない場合を考えると、たとえば Fig. 1 の場合、それぞれの特性数はつぎのようになる。

- Kågström の特性数： $[(4, 7, 8)]$
- Segre の特性数： $[(3, 2, 2, 1)]$
- Weyr の特性数： $[(4, 3, 1)]$

また、固有値と上で述べた特性数の組をジョルダン型とよぶ。たとえば、Kågström の特性数と組み合わせたジョルダン型は以下のようにになる。

$$\beta = [(\lambda_1, m_1, \dots, m_{\bar{h}_1})_1, \dots, (\lambda_p, m_1, \dots, m_{\bar{h}_p})_p]$$

(注意 1) A のジョルダン標準形を求めることは、 A のジョルダン型を求めることに等しく、ジョルダン型 β のジョルダン標準形を $J(\beta)$ と書く。

3. ジョルダン標準形を求めるアルゴリズム

本節では、行列 A のジョルダン標準形を求めるアルゴリズムについて述べる。なお、行列 A とその固有値 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ は与えられるものとする。

ジョルダン標準形を求めるアルゴリズムで問題となるのは、ある固有値 λ に対する主要ベクトル鎖をどのようにして求めるか、ということである。すなわち、代数的重複度 t 、幾何学的重複度 s の固有値 λ に対し、

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)v_1^1 &= 0 & (A - \lambda I)v_1^s &= 0 \\ (A - \lambda I)v_2^1 &= v_1^1 & \dots & (A - \lambda I)v_2^s &= v_1^s \\ & \vdots & & \vdots & \\ (A - \lambda I)v_{h_1}^1 &= v_{h_1-1}^1 & (A - \lambda I)v_{h_s}^s &= v_{h_s-1}^s \end{aligned} \quad (7)$$

と

$$h_1 + \dots + h_s = t \quad (8)$$

を満たす t 個の線形独立なベクトル $v_1^1, \dots, v_{h_1}^1, \dots, v_1^s, \dots, v_{h_s}^s$ (s 個の主要ベクトル鎖) をどのようにして求めればよいかが問題となる。

従来方法 [10] では、(7) 式の連立方程式を解くことにより主要ベクトル鎖を求めているが、一般に (7) 式を連立方程式として解くには試行錯誤が伴うため、アルゴリズム化しにくいという欠点があった。また、(8) 式を満たす $h_1, \dots, h_s$ の組は一般に多数存在するため、(7) 式の連立方程式が一意に決まらない、という問題があった。

そこで、本論文ではこれらの問題点を踏まえ、以下のアルゴリズムを提案する。

step 1 各固有値が重複しているかないかを判定し、各固有値 λ_i の代数的重複度 $t_i (i=1, \dots, p)$ を決定する。

※ 以下の step 2 から step 4 までの計算は、各固有値 λ_i に関して行う。

step 2 N_l から N_{l-1} を引いた空間の次元 (すなわち段階 l の主要ベクトルの数) c_l は、以下のように求められる。

$$c_l = \begin{cases} n - \text{rank}(A - \lambda_i I) & (l=1) \\ \text{rank}(A - \lambda_i I)^{l-1} - \text{rank}(A - \lambda_i I)^l & (l \geq 2) \end{cases}$$

ただし、 n は A の次数である。この計算を c_l が 0 になるまで行い、その 1 つ手前を $c_{\bar{h}}$ とする。この計算により、主要ベクトルの最高段階 $\bar{h}$ が求まる ((6) 式を参照)。

step 3 $N_l (l=1, 2, \dots, \bar{h})$ を張る基底ベクトルからなる

$$X_l = [x_1, \dots, x_{m_l}] = \text{Ker}(A - \lambda_i I)^l$$

を求める。

step 4 step 3 で求めた X_l から、主要ベクトル鎖を作り、変換行列 T_i を求める。

step 4.1 $\bar{h}=1$ のとき

固有ベクトルのみなので、そのまま X_1 を順番に並べ、変換行列 $T_i = [X_1, \dots, X_{t_i}]$ を作る。

step 4.2 $\bar{h} \geq 2$ のとき

step 4.2.1 $N_{\bar{h}}$ から $N_{\bar{h}-1}$ をのぞいた空間 $N_{\bar{h}} - N_{\bar{h}-1}$ を張る基底ベクトルからなる行列 $U_{\bar{h}}$ を求める。

Fig. 2 に示すように、空間 $N_{\bar{h}} - N_{\bar{h}-1}$ は、 $N_{\bar{h}}$ と $N_{\bar{h}-1}$ の (直交) 補空間の交わりであり、その次元は $c_{\bar{h}}$ なので、

$$X_{\bar{h}} K_a = \text{Ker}(X_{\bar{h}-1}^*) K_b \quad (9)$$

を満たす列フルランクな行列 $K_a \in C^{m_{\bar{h}} \times c_{\bar{h}}}$ と $K_b \in C^{(n-m_{\bar{h}-1}) \times c_{\bar{h}}}$ が存在する (M^* は行列 M の共役転置行列を表す)。(9) 式を変形すると、

$$[X_{\bar{h}}, -\text{Ker}(X_{\bar{h}-1}^*)] \begin{bmatrix} K_a \\ K_b \end{bmatrix} = 0$$

となるので、(9) 式を満たす K_a と K_b は

$$\begin{bmatrix} K_a \\ K_b \end{bmatrix} = \text{Ker}[X_{\bar{h}}, -\text{Ker}(X_{\bar{h}-1}^*)]$$

Fig. 2 Intersection between N_h and complement of N_{h-1}

で与えられる。よって、求める行列 $U_{\bar{h}}$ は

$$U_{\bar{h}} = X_{\bar{h}} K_a = [v_{\bar{h}}^1, v_{\bar{h}}^2, \dots, v_{\bar{h}}^{c_{\bar{h}}}]$$

となる。

step 4.2.2 (3) 式より、step 4.2.1 で求めた $U_{\bar{h}}$ に $(A - \lambda_i I)$ を次々と掛けることによって、各段階の主要ベクトルからなる行列 $U_1, U_2, \dots, U_{\bar{h}}$ を求める。

$$\begin{aligned} (A - \lambda_i I) U_{\bar{h}} &= U_{\bar{h}-1} = [v_{\bar{h}-1}^1, v_{\bar{h}-1}^2, \dots, v_{\bar{h}-1}^{c_{\bar{h}-1}}] \\ (A - \lambda_i I) U_{\bar{h}-1} &= U_{\bar{h}-2} = [v_{\bar{h}-2}^1, v_{\bar{h}-2}^2, \dots, v_{\bar{h}-2}^{c_{\bar{h}-2}}] \end{aligned} \quad (10)$$

...

$$(A - \lambda_i I) U_2 = U_1 = [v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^{c_{\bar{h}}}]$$

step 4.2.3 step 4.2.2 で得られた行列 $U_1, U_2, \dots, U_{\bar{h}}$ に対し、それぞれ $W_1 := U_1, \dots, W_{\bar{h}} := U_{\bar{h}}$ を作る。また、主要ベクトル鎖を順番に並べ、行列 $V_{\bar{h}}$ を作る。

$$V_{\bar{h}} = [v_1^1, v_2^1, \dots, v_{\bar{h}}^1, \dots, v_1^{c_{\bar{h}}}, v_2^{c_{\bar{h}}}, \dots, v_{\bar{h}}^{c_{\bar{h}}}]$$

同様にして、step 4.2.1 から step 4.2.3 までの計算を $k = \bar{h} - 1, \bar{h} - 2, \dots, 2$ と降べきの順に行うことにより、高さ k の主要ベクトル鎖を求め、順番に並べて V_k を作る。このとき、step 4.2.1 において、すでに求めた主要ベクトル鎖を形成するベクトルを除くため、(9) 式において $\text{Ker}(X_{k-1}^*)$ の代わりに $\text{Ker}([X_{k-1}, W_k]^*)$ を用いる。また step 4.2.3 において、 $W_1 := [W_1 U_1], \dots, W_k := [W_k U_k]$ とする。

step 4.2.4 これまでに求めた W_1 の列ベクトルの個数が c_1 よりも小さいならば、それらのベクトルと独立するように残りの主要ベクトル（固有ベクトル）を選ぶ。すなわち、

$$U_1 = \text{Ker} \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ W_1^* \end{bmatrix}$$

を求め、 $V_1 = U_1$ とする。以上ですべての主要ベクトル鎖が求まった。 $V_1, \dots, V_{\bar{h}}$ を並べると、変換行列 $T_i = [V_1, \dots, V_{\bar{h}}]$ が求まる。

step 5 各固有値に対応する変換行列 T_i をまとめて、変換行列 $T = [T_1, \dots, T_p]$ が求まる。

(注意 2) 従来方法 [10] では、最初に固有ベクトルに着目し、固有ベクトルのパラメトリゼーションによって (7) 式の連立方程式を試行錯誤的に解いていた。それに対し本論文のアルゴリズムは、最初に progenitor を空間の交わりという観点から求め、それに $(A - \lambda I)$ を次々と掛けていくというシステムティックな方法であり、従来の試行錯誤的な要素がない。したがって、ジョルダン標準形を数値的に求めるのに適したアルゴリズムである。

(注意 3) Step 4.2.1 において、 $N_{\bar{h}}$ と $N_{\bar{h}-1}$ の補空間の交わりを求める際に $N_{\bar{h}-1}$ の直交補空間をとっている理由は、アルゴリズムを簡単化するためである。

(注意 4) Step 4.2.4 が必要な理由は、高さ 1 の主要ベクトル鎖が存在する場合、空間の交わりを用いた Step 4.2.1 の方法では求められないからである。

(注意 5) 本アルゴリズムは、ほとんどの演算で特異値分解を利用する。特異値分解は基本的にユニタリ行列の演算で済ませることができ、信頼性の高いアルゴリズムが存在する [11]。

3.1 例題

固有値 λ に対する主要ベクトルが Fig. 1 のような配置になっている場合、本論文のアルゴリズムを適用すると次のような手順になる。

まず、高さ $\bar{h} = 3$ の主要ベクトル鎖の progenitor v_3^1 を求め、(10) 式より v_2^1, v_1^1 を求めて 1 個目の主要ベクトル鎖 v_1^1, v_2^1, v_3^1 が得られる。つぎに高さ $h = 2$ の主要ベクトル鎖の progenitor v_2^2, v_3^2 を求め、(10) 式より v_1^2, v_3^2 を求めて 2 個目の主要ベクトル鎖 v_1^2, v_2^2 と 3 個目の主要ベクトル鎖 v_1^3, v_2^3 が得られる。最後に、残りの固有ベクトルを v_1^1, v_1^2, v_1^3 に直交するように選び、4 個目の主要ベクトル鎖 v_1^4 が得られる。

4. 数値的ジョルダン標準形

3. では、数学的に定義されたジョルダン標準形を求めるアルゴリズムを提案した。しかし、このアルゴリズムを適用するためには数値計算上いくつかの問題点が残されている。本節ではそれらの問題点について述べるとともに、数値計算を考慮した「数値的ジョルダン標準形」を定義し、ジョルダン標準形を数値的に求める方法を提案する。

4.1 ジョルダン標準形を数値的に求めるのが困難な理由

行列 A のジョルダン標準形の中に 2 次以上のジョルダン細胞が含まれているならば、行列 A は重複固有値をもつ。数学的には固有値が重複しているかいないかははっきり区別がつくが、この判定を計算機で行うのは非常に困難である。なぜなら、行列 A を計算機上で表現したとき、行列 A はすでに正しく表現されておらず、計算の段

階で一般に丸め誤差が含まれるからである。

たとえば、 r 次のジョルダン細胞 $J_r(\lambda_i)$ に小さな摂動が入ったときの影響を考える。すなわち、 $J_r(\lambda_i)$ の $(r,1)$ 成分に (本来は0であるが) δ の摂動が入ったと仮定すると、ジョルダン細胞 $J_r(\lambda_i)$ が

$$J'_r(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ \delta & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

に変わる。その結果、特性方程式は

$$(\lambda - \lambda_i)^r = (-1)^r \delta$$

となり、 r 個の重複固有値 λ_i は r 個の相異なる固有値

$$\lambda_i - \delta^{1/r} (\cos(2s\pi/r) + i \sin(2s\pi/r)) \quad (11)$$

$$(s=0,1,\dots,r-1)$$

に変わる。ここで、 λ_i を $O(1)$ とし、 $r=10$ 、 $\delta=10^{-10}$ と仮定すると、(11)式より λ_i に対する δ の影響が $O(10^{-1})$ であることが分かり、もはやそれらの固有値が重複しているとはいえない [12]。

このように、計算機で求められた固有値からその重複度を求める場合は、与えられた A が本当に重複固有値を持っているとしても、それらが重複していると判定するのは難しい。 A が高次のジョルダン細胞をもつときはこの判定はさらに困難になる。なぜなら、 r が大きくなると (11) 式より λ_i に対する δ の影響が大きくなるからである。

また、ジョルダン標準形を数値的に求めるのが困難であるもう一つの理由は、計算過程で用いる、行列の rank と Kernel の計算にある。一般に、行列 A の rank と Kernel を計算するには、行列 A を次のように特異値分解する (U, V はユニタリ行列)。

$$A = UAV, \quad A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_i & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

ここで、 $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$ は A の特異値である。rank(A) や Kernel(A) を計算機で求める場合、特異値が0であるかどうかの判定を行う必要があり、この判定によって rank(A) や Kernel(A) の値が変わる。

以上の問題点を踏まえると、ジョルダン標準形を数値的に求めるには、以下に示す二つのパラメータ ε_1 、 $\varepsilon_2 (>0)$ を決定する必要がある。

- ε_1 : 固有値の重複度を判定するパラメータ ($2 \leq i \leq n$)

$$|\lambda_i - \lambda_{i-1}| < \varepsilon_1 \Rightarrow \lambda_i, \lambda_{i-1}: \text{重複固有値}$$

$$|\lambda_i - \lambda_{i-1}| \geq \varepsilon_1 \Rightarrow \lambda_i, \lambda_{i-1}: \text{相異固有値}$$

- ε_2 : 行列 A の rank を決定するパラメータ

$$\sigma_i < \varepsilon_2 \Rightarrow \sigma_j = 0 \quad (i \leq j \leq n)$$

$$\sigma_i \geq \varepsilon_2 \Rightarrow \sigma_j \neq 0 \quad (1 \leq j \leq i)$$

ここで、 λ_i 、 λ_{i-1} は A の固有値、 σ_i は A の特異値である。

4.2 数値的ジョルダン標準形の定義

ジョルダン型 β をもつ A のジョルダン標準形を計算機によって数値的に求める問題を考える。ジョルダン型 β をもつ行列の集合を M_β とする。2. より、解析的には $A \in M_\beta$ が成り立つはずであるが、4.1 で述べたように、一般に $A \in M_\beta$ かどうかを数値的に決定するのは困難である。そこで、 $A \in M_\beta$ かどうかを判定する代わりに、ある $\epsilon > 0$ に対して

$$A \in M_\beta(\epsilon)$$

$$M_\beta(\epsilon) = \{X: \|X - Y\|/\|X\| < \epsilon, Y \in M_\beta\}$$

が成り立つか調べる。さらに、もし異なるジョルダン型 $\beta' (\neq \beta)$ と十分な大きな値 $\epsilon' (>> \epsilon)$ に対して

$$A \notin M_{\beta'}(\epsilon') \quad (12)$$

ならば、数値的な意味で A が M_β に属していると判定する。すなわち A のジョルダン標準形を求める代わりに A のジョルダン型 β を数値的に求め、 $J(\beta)$ を A の数値的ジョルダン標準形と定義する [8]。そして以下を満たす正則な行列 T を変換行列とする。

$$\|TJ(\beta)T^{-1} - A\| < \epsilon \|A\| \quad (13)$$

4.3 数値的ジョルダン標準形の探索法

4.2 では、すべてのジョルダン型に対して (12) 式を評価することになっているが、ジョルダン型が変化する主な理由は 4.1 で述べた ε_1 、 ε_2 の選び方なので、ジョルダン型の空間を ε_1 、 ε_2 でパラメトリゼーションし、最適なジョルダン標準形を探すことを考える。すなわち、ジョルダン型 β のうち、評価関数

$$L := \|T(\beta)J(\beta)T^{-1}(\beta) - A\|$$

を最小にするジョルダン型

$$\beta_{\text{opt}} = \arg \min_{\beta(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \|T(\beta)J(\beta)T^{-1}(\beta) - A\|$$

を探す。そして、 $J(\beta_{\text{opt}})$ を A の数値的ジョルダン標準形とする。ここで $T(\beta)$ は正則な変換行列である。また、評価関数が0のとき、数値的ジョルダン標準形は解析的ジョルダン標準形と一致する。ただし、実際にはすべての ε_1 、 ε_2 に関して最適なジョルダン標準形を探すことは不可能なので、たとえば ε_1 と ε_2 の区間を

$$\|A\|_{mep} \leq \varepsilon_1 < \|A\|$$

$$\min_i (\|A - \lambda_i I\|)_{mep} \leq \varepsilon_2 < \max_i (\|A - \lambda_i I\|)$$

のように定め、適当なきざみ幅で探す。ただし、 mep は計算機イプシロン (machine epsilon) であり、使用する計算機に対応して浮動小数点数の精度を特徴づける [13]。

(注意 6) 参考文献 [8] は、(12) 式を評価せず、(13) 式のみを評価する方法である。それに対し、本論文で提案する方法は (12) 式と (13) 式の両方を評価するので、4.2 で述べた数値的ジョルダン標準形の定義に近い。

5. 数値例題

【例題 1】 次の行列の数値的ジョルダン標準形を提案方法により求める。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

A の数値的ジョルダン標準形 J と、変換行列 T は

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -0.22 & -0.50 & -0.50 \\ 0.44 & 0.50 & -0.00 \\ -0.87 & -0.50 & 0.50 \end{bmatrix}$$

となる。このとき、 $L = 9.25 \times 10^{-15}$ 、 $\varepsilon_1 = 1.52 \times 10^{-7}$ 、 $\varepsilon_2 = 1.44 \times 10^{-14}$ である。

パラメータ ε_1 、 ε_2 に対する評価関数 L のグラフを Fig. 3 に示す。図中、横軸はそれぞれ ε_1 、 ε_2 の対数をとったものであり、縦軸は見やすいように、 L の対数をとってさらに一定値を加えてある。Fig. 3 に見られる高さの異なる三つの領域のうち、 L がもっとも小さな値をとる領域で数値的ジョルダン標準形が求まる。

Fig. 3 Value of performance index L to $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

【例題 2】 数式処理ソフトウェアとの比較

次の行列のジョルダン標準形を求める問題を考える。この行列は、6 次のジョルダン細胞の (6, 1) 成分に摂動 δ が入った場合である。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

δ を変化させたときの評価関数 L の値およびジョルダン標準形の構造について、本論文の提案方法、Matlab の Jordan 関数 [14]、Mathematica の JordanDecomposition 関数 [15] を比較した結果を Table 1 に示す。ただし、 $\max(\cdot)$ は絶対値が最大である行列成分の大きさを意味する。Matlab の Jordan 関数は Symbolic Math Toolbox に含まれ、Maple [16] の計算エンジンを使用している。Maple と Mathematica のドキュメントにはジョルダン標準形を求めるアルゴリズムに関して詳しい記述がないので、具体的な計算手法は不明である。

Table 1 Value of $\max(TJT^{-1} - A)$

δ	提案方法	Matlab	Mathematica
10^{-10}	1.5×10^{-8}	1.5×10^{-8}	2.3×10^{-10}
10^{-20}	2.8×10^{-3}	2.0	2.0
10^{-30}	6.0×10^{-5}	1.1×10^9	6.3×10^{-2}
10^{-40}	1.3×10^{-6}	2.9×10^{17}	1.4×10^{17}

参考文献 [6] によると、この行列は摂動 δ に対して構造安定であるので、 δ が十分に小さければ、 $\delta = 0$ と同じジョルダン標準形が解となる。しかし、Matlab および Mathematica では、 δ を小さくしてもジョルダン標準形は対角化されてしまう。それに対し、提案方法では、 $\delta = 10^{-10}$ では対角化されてしまうが、 $\delta \leq 10^{-20}$ では 1 次のジョルダン細胞が形成される。さらに、提案方法では、 δ を小さくすると評価関数 L の値は 0 に近づくが、Matlab と Mathematica では、摂動 δ が小さくても、 L は非常に大きな値になる。したがって、本論文で提案する方法は、他の二つの方法より優れていると考えられる。

6. おわりに

本論文では、行列のジョルダン標準形を数値的に求める方法を提案した。なお、今回提案した方法で行列のジョルダン標準形を求めれば、参考文献 [5] の方法で離散時間系から連続時間系へ変換できることがわかっている。

参考文献

- [1] The Math Works, Inc.: *Control System Toolbox User's Guide*, The Math Works, Inc. (1992)
- [2] 古賀, 大竹, 三平: 離散時間系から連続時間系への変換のための数値計算法; 第 28 回制御理論シンポジウム資料, pp. 211-214 (1999)
- [3] 美多, 海津: 多入出力離散時間系から連続時間系への逆変換問題; 電気学会論文誌 C, Vol. 104, No. 11, p. 273

- (1984)
- [4] 舟橋, 伊藤: 離散時間モデルから連続時間モデルへの変換; 第 8 回 SICE D. S. T. シンポジウム資料, p. 159 (1985)
 - [5] 古賀, A. Lugito: 負の実極を持つ離散時間系の連続時間最小実現; 第 27 回制御理論シンポジウム資料, pp. 237–240 (1998)
 - [6] 韓, 伊理: ジョルダン標準形, 東京大学出版会 (1982)
 - [7] 須田: 線形システム理論, システム制御情報ライブラリー 7, 朝倉書店 (1993)
 - [8] B. Kågström and A. Ruhe: An algorithm for numerical computation of the Jordan normal form of a complex matrix; *ACM transactions on mathematical software*, Vol. 6, pp. 398–419 (1980)
 - [9] R. Zurmühl, 瀬川, 高市: マトリクスの理論と応用, pp. 225–252, ブレイン図書出版 (1972)
 - [10] 小郷, 美多: システム制御理論入門, 実教出版 (1979)
 - [11] G. H. Golub and C. F. Van Loan: *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, 2 edition (1989)
 - [12] G. H. Golub and J. H. Wilkinson: Ill-conditioned eigensystems and the computation of the Jordan canonical form; *SIAM Review*, Vol. 18, pp. 578–619 (1976)
 - [13] C. B. Moler, G. E. Forsythe and M. A. Malcom: 計算機のための数値計算法, 科学技術出版社 (1978)
 - [14] The Math Works, Inc.: Symbolic Math Toolbox ユーザーズガイド, The Math Works, Inc. (1993)
 - [15] S. Wolfram: *The Mathematica Book*, Cambridge University Press, 3 edition (1996)
 - [16] A. Heck: *Introduction to Maple*, Springer Verlag (1993)

ての ϵ に対して A のジョルダン型と一致するならば, A のジョルダン標準形は摂動 ϵF に対して構造安定であるといい, そうでないならば構造不安定であるという [6].

付 録

付録 1. ジョルダン標準形の構造安定性

A, F を n 次の定数行列, $\rho > 0$ を十分小さな正数とすると, $A + \epsilon F$ のジョルダン型が $|\epsilon| \leq \rho$ の範囲のすべ