修正 Gauss-Newton 法による確率システムの 未知パラメータ同定*

高津 知司[†]・大住 晃[†]・中川 敦史[†]

Parameter Identification for a Class of Stochastic Systems with Unknown Parameters via Modified Gauss-Newton Method*

Tomoji TAKATSU[†], Akira OHSUMI[†] and Atsushi NAKAGAWA[†]

In this paper, an identification problem of uncertain parameters which are involved in the mathematical model is investigated for a class of stochastic uncertain systems. First, it is shown that the parameter identification can be achieved by solving the state estimation and the least-squares problem simultaneously. Secondly, a modified Gauss-Newton method is proposed, showing that it has contraction property. Finally, a numerical example is shown to demonstrate the efficiency of the identification method proposed here for a process modeled by a first-order system with time-delay.

1. 緒言

制御対象となる動的システムのモデルには通常複数個のパラメータが含まれ、それらを正確に決定しなければよりよい制御性能は得られない。したがって、モデルに含まれるパラメータを何らかの得られたデータから同定することが重要となる。システムのパラメータ同定法には種々の方法が存在するが [1], システム状態量についての観測データに基づいて未知パラメータを同定する方法のひとつに非線形最小自乗法がある [2]。最急降下法や Gauss-Newton 法, その変形としての Marquardt 法などはその代表例である。なかでも, Marquardt 法 [3] は Gauss-Newton アルゴリズムの中のヘッシアン行列の逆行列が発散するのを防ぐように正則化パラメータを導入した方法であるが, 評価汎関数がより小さくなるようにそのパラメータ値を調整する必要がある。その正則化パラメータ値を刷新する際に逐一評価汎関数をパラメータごとに計算しなければならない等の欠点が指摘され, 正則化項の計算法が改良されている [4]。しかし, これら Marquardt 法に基づくアルゴリズムでもデジタル計

算機 (以下単に計算機) の情報落ち誤差等で正則化パラメータの値が小さいときにアルゴリズム中のヘッシアン行列の逆行列の計算が不安定になりアルゴリズム全体が不安定になる現象が発生することがある [5] のを著者らも確認している [6]。

本論文では, 不規則外乱をうけるシステムの未知パラメータの同定問題に対して, 不規則観測データに基づいて最小自乗法により同定を行うアルゴリズムを, 従来の Gauss-Newton 法に新たな修正を加えるという観点から提案する。

シミュレーションでは, むだ時間をもつ一次遅れシステムを対象とし, むだ時間をも未知パラメータと考えた同定問題を考察する。

2. 問題の定式化

対象とする動的システムの入出力関係が下記の線形確率微分方程式によって記述されるものとする。

$$dz(t) = A(t; \theta)z(t)dt + B(t; \theta)u(t; \theta)dt + G(t)dw(t) \quad (1)$$

$$dy_0(t) = H(t)z(t)dt + R(t)dv(t) \quad (2)$$

ここで, $z(t)$ および $y_0(t)$ は (適切な次元を持つ) システム状態量および観測量ベクトルであり, $u(t; \cdot)$ は入力ベクトル; $w(t)$, $v(t)$ は互いに独立な標準ウィーナ過程である。行列 $A(t; \cdot)$, $B(t; \cdot)$ および入力 $u(t; \cdot)$ に含まれる θ はベクトル値パラメータで未知定数 (確率変数でない) とする。 $u(t; \theta)$ は, 例えば化学プラントなどにおける

* 原稿受付 2001 年 4 月 26 日

[†] 京都工芸繊維大学 大学院 工芸科学研究科 Department of Mechanical and System Engineering, Graduate School of Engineering and Science, Kyoto Institute of Technology; Matsugasaki, Sakyo, Kyoto 606-8585, JAPAN

Key Words: parameter identification, Gauss-Newton method, stochastic system, Kalman filter.

る未知むだ時間を含んだ入力を表わす。(1)式の解 $z(t)$ は、当然未知パラメータ θ の関数となることから、以後それを $z(t;\theta)$ と表記することにする。

(2)式で与えられる $y_0(t)$ -過程に対して、新しく $y(t)$ -過程を $dy_0(t)=y(t)dt$ (あるいは形式的に $y(t)=\dot{y}_0(t)$)によって導入し、未知パラメータ θ の同定に対する規範として平均自乗誤差規範

$$J(\theta) = \mathcal{E} \left\{ \int_{T_i}^{T_f} \|y(t) - H(t)z(t;\theta)\|^2 dt \right\} \quad (3)$$

を設定する。すなわち、時間区間 $[T_i, T_f]$ で取得された観測データ $\{y(t), T_i \leq t \leq T_f\}$ に基づいて、(3)式の規範 $J(\theta)$ を最小にする最適な $\hat{\theta}$ を求める。ただし、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルム、 $\mathcal{E}\{\cdot\}$ は期待値演算子である。

3. パラメータ同定と状態推定との分離

$\mathcal{Y}_t$ を観測データ $Y_t = \{y(\tau), T_i \leq \tau \leq t\}$ によって生成される σ -代数とすると、(3)式は条件付き期待値演算の性質 $\mathcal{E}\{\cdot\} = \mathcal{E}\{\mathcal{E}\{\cdot|\mathcal{Y}_t\}\}$ によりつぎのように変形される。

$$J(\theta) = \mathcal{E} \left\{ \int_{T_i}^{T_f} \mathcal{E}\{\|y(t) - H(t)z(t;\theta)\|^2 | \mathcal{Y}_t\} dt \right\} \quad (4)$$

いま、 $\hat{z}(t;\cdot) = \mathcal{E}\{z(t;\cdot) | \mathcal{Y}_t\}$ を θ を固定したときの状態量 $z(t;\cdot)$ の最適推定値とすると、(4)式中の被積分関数はつぎのように変形される。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\|y(t) - H(t)z(t;\theta)\|^2 | \mathcal{Y}_t\} &= \mathcal{E}\{\|y(t) - H(t)\hat{z}(t;\theta)\| \\ &\quad + H(t)[\hat{z}(t;\theta) - z(t;\theta)]\|^2 | \mathcal{Y}_t\} \\ &= \mathcal{E}\{\|y(t) - H(t)\hat{z}(t;\theta)\|^2 | \mathcal{Y}_t\} \\ &\quad + 2\mathcal{E}\{[y(t) - H(t)\hat{z}(t;\theta)]^T \\ &\quad \times H(t)[\hat{z}(t;\theta) - z(t;\theta)] | \mathcal{Y}_t\} \\ &\quad + \mathcal{E}\{\|H(t)[z(t;\theta) - \hat{z}(t;\theta)]\|^2 | \mathcal{Y}_t\} \end{aligned}$$

最終項の第2項は零となる (上つき記号 T はベクトルの転置) ので、結局(4)式はつぎようになる。

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \mathcal{E} \left\{ \int_{T_i}^{T_f} \mathcal{E}\{\|y(t) - H(t)\hat{z}(t;\theta)\|^2 | \mathcal{Y}_t\} dt \right\} \\ &\quad + \mathcal{E} \left\{ \int_{T_i}^{T_f} \mathcal{E}\{\|H(t)[z(t;\theta) - \hat{z}(t;\theta)]\|^2 | \mathcal{Y}_t\} dt \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \int_{T_i}^{T_f} \|y(t) - H(t)\hat{z}(t;\theta)\|^2 dt \right\} \\ &\quad + \mathcal{E} \left\{ \int_{T_i}^{T_f} \|H(t)[z(t;\theta) - \hat{z}(t;\theta)]\|^2 dt \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

(5)式の最右辺第1項は (パラメータを固定した推定

問題で得られる) 最適推定値と観測データとの差を最小にするパラメータ θ を求めるための評価規範、また第2項は (パラメータ θ を固定したときの) 最適推定問題の評価規範とみることができる。

したがって、(5)式で与えられる評価汎関数を最小にする θ を求める問題は、最右辺の二つの項を同時に最小化すればよいことから、

(i) まず、パラメータ θ を任意の値に固定して状態推定問題を解く (これは(1)、(2)式よりカルマン・フィルタを構成することで実現できる)

(ii) ついで、(i)で求めた状態推定値を用いて、(5)式の第1項で与えられる規範をパラメータ θ に関して最小化する

という状態量推定問題とパラメータ同定問題に分離できる。上述の(ii)においては、すでに (パラメータを固定した) 状態量の推定値 $\hat{z}(t;\cdot)$ がステップ(i)で全時間区間にわたって求められていることから、 $y(t)$ および $\hat{z}(t;\cdot)$ はいずれも実現値であるので(5)式最右辺第1項の期待値演算は不要となる。すなわち、ステップ(ii)における同定規範は

$$J_{ii}(\theta) = \int_{T_i}^{T_f} \|y(t) - H(t)\hat{z}(t;\theta)\|^2 dt \quad (6)$$

となる。同定の実施にあたっては、具体的には、ステップ(i)、(ii)を交互に繰り返すアルゴリズムを構築することになる。

また、状態推定値 $\{\hat{z}(t;\cdot), T_i \leq t \leq T_f\}$ は、以下に述べる繰返し計算アルゴリズムで得られる k 回目の同定値 $\hat{\theta}^{(k)}$ が得られたとすると、(1)、(2)式で構成されるカルマン・フィルタによって求められる:

$$\begin{aligned} d\hat{z}(t; \hat{\theta}^{(k)}) &= A(t; \hat{\theta}^{(k)})\hat{z}(t; \hat{\theta}^{(k)})dt \\ &\quad + B(t; \hat{\theta}^{(k)})u(t; \hat{\theta}^{(k)})dt \\ &\quad + P(t)H^T(t)\{R(t)R^T(t)\}^{-1} \\ &\quad \times [y(t) - H(t)\hat{z}(t; \hat{\theta}^{(k)})]dt \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= A(t; \hat{\theta}^{(k)})P(t) + P(t)A^T(t; \hat{\theta}^{(k)}) + G(t)G^T(t) \\ &\quad - P(t)H^T(t)\{R(t)R^T(t)\}^{-1}H(t)P(t) \quad (8) \end{aligned}$$

システムが定常の場合には定常カルマン・フィルタを用いることもある。(共分散行列は同定値に依存するが、記号の煩雑化を防ぐため $P(t)$ と記述する。)

4. 同定アルゴリズム

4.1 同定アルゴリズムの提案

著者のひとり、汎関数(6)式の規範を最小にする同定アルゴリズムとして、Gauss-Newton法に基づいてつぎのようなアルゴリズムを提案した[7,8]:

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} + \left[\int_{T_i}^{T_f} \Psi(t; \hat{\theta}^{(k)}) \Psi^T(t; \hat{\theta}^{(k)}) dt \right]^{-1}$$

$$\times \int_{T_i}^{T_f} \Psi(t; \hat{\theta}^{(k)}) [y(t) - H(t) \hat{z}(t; \hat{\theta}^{(k)})] dt \quad (9)$$

ここで,

$$\Psi(\cdot; \hat{\theta}^{(k)}) = \frac{\partial \hat{z}^T(\cdot; \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta = \hat{\theta}^{(k)}} H^T(\cdot) \quad (10)$$

である. このアルゴリズムを, 柔軟構造物の数学モデルに含まれる未知パラメータの同定問題に適用し, 一定の成果を収めた. しかし, このアルゴリズムでは (9) 式右辺第 2 項の逆行列の存在が保証されず, $\hat{\theta}^{(k)}$ の初期値を真値に近く与えなければ, 場合によってはアルゴリズム自体が発散する現象がみられた [7]. そこで本論文では, (9) 式を変形することによって, 安定して同定値列 $\{\hat{\theta}^{(k)}\}$ が得られるアルゴリズムを提案する.

(9) 式に代ってつぎのアルゴリズムを考える:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^{(k+1)} &= \hat{\theta}^{(k)} + \left[\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) + \lambda^2 DI \right]^{-1} \\ &\times \left[\int_{T_i}^{T_f} \Psi(t; \hat{\theta}^{(k)}) \{y(t) - H(t) \hat{z}(t; \hat{\theta}^{(k)})\} dt \right] \\ &+ \lambda^2 D \left[\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) + \lambda^2 DI \right]^{-1} \{\hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)}\} \end{aligned} \quad (11)$$

ただし, λ は正定数, I は単位行列であり, また $D = T_f - T_i$,

$$\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) = \int_{T_i}^{T_f} \Psi(t; \hat{\theta}^{(k)}) \Psi^T(t; \hat{\theta}^{(k)}) dt (\geq 0) \quad (12)$$

である ((11) のアルゴリズムを考えつくに到った理由については付録 1 参照). (11) 式は右辺に求めようとする $\hat{\theta}^{(k+1)}$ が含まれているためこのままでは同定アルゴリズムとして採用できない. そこで, (11) 式を $[\hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)}]$ でまとめると,

$$\begin{aligned} &\left(I - \lambda^2 D \left[\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) + \lambda^2 DI \right]^{-1} \right) [\hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)}] \\ &= \left[\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) + \lambda^2 DI \right]^{-1} \\ &\times \int_{T_i}^{T_f} \Psi(t; \hat{\theta}^{(k)}) [y(t) - H(t) \hat{z}(t; \hat{\theta}^{(k)})] dt \end{aligned} \quad (13)$$

となる. したがって, (13) 式より $[\hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)}]$ を求めるとき,

$$\begin{aligned} &\left(I - \lambda^2 D \left[\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) + \lambda^2 DI \right]^{-1} \right)^{-1} \\ &= I + \lambda^2 D \Gamma^{-1}(D; \hat{\theta}^{(k)}) \end{aligned}$$

を計算する必要がある. これには, (12) 式で定義される準正定行列 $\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)})$ の逆行列演算が必要となり, Gauss-Newton 法と同様の不具合が生じる.

いま,

$$\delta \hat{\theta}^{(k)} = \hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)} \quad (14)$$

とおくと, (11) 式は

$$\delta \hat{\theta}^{(k)} = \mathcal{A}(\delta \hat{\theta}^{(k)}) \quad (15)$$

と表現できる. ただし, $\mathcal{A}$ は $\hat{\theta}^{(k)}$ および $\hat{z}(\cdot; \hat{\theta}^{(k)})$ が与えられたとき

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &:= \lambda^2 D \left[\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) + \lambda^2 DI \right]^{-1} x \\ &+ \left[\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) + \lambda^2 DI \right]^{-1} \\ &\times \int_{T_i}^{T_f} \Psi(t; \hat{\theta}^{(k)}) [y(t) - H(t) \hat{z}(t; \hat{\theta}^{(k)})] dt \end{aligned} \quad (16)$$

によって定義される作用素である.

もし, $\mathcal{A}$ が縮小作用素ならば, $\delta \hat{\theta}^{(k)}$ は作用素 $\mathcal{A}$ の不動点として一意に存在する. しかし, 補題 1 (付録 2(1) 参照) を用いると, 作用素 $\mathcal{A}$ は $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ に対して

$$\|\mathcal{A}(x_1) - \mathcal{A}(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| \quad (17)$$

となり (等号を含むので) 縮小写像ではないので, その不動点が一意に存在することは保証されない.

そこで, 新たに作用素 $\mathcal{A}$ に $\forall \varepsilon > 0$ で摂動を与えた

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\varepsilon(x) &:= \lambda^2 D \left[\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) + (\lambda^2 D + \varepsilon) I \right]^{-1} x \\ &+ \left[\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) + \lambda^2 DI \right]^{-1} \\ &\times \int_{T_i}^{T_f} \Psi(t; \hat{\theta}^{(k)}) [y(t) - H(t) \hat{z}(t; \hat{\theta}^{(k)})] dt \end{aligned} \quad (18)$$

という作用素 $\mathcal{A}_\varepsilon$ を考える.

さて, つぎの定理が成り立つ (証明は付録 2(2) 参照).

【定理 1】 準正定行列 $\Phi \in R^{n \times n}$ およびベクトル $\beta \in R^n$ が, $\|\Phi\| < \infty$ および $\|\beta\| < \infty$ であり, α, ε は正のスカラであると仮定する. そのとき, 次式で定義される作用素 $\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}$ は縮小作用素である.

$$\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}(x) = \alpha [\Phi + (\alpha + \varepsilon) I]^{-1} x + (\Phi + \alpha I)^{-1} \beta \quad (19)$$

ただし, $x \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha})$ である.

【定理 2】 定理 1 で定義された作用素 $\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}$ は, ε に関して連続である.

定理 1, 2 において,

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}), \quad \alpha = \lambda^2 D \\ \beta &= \int_{T_i}^{T_f} \Psi(t; \hat{\theta}^{(k)}) [y(t) - H(t) \hat{z}(t; \hat{\theta}^{(k)})] dt \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

とおくことによって, 作用素 $\mathcal{A}_\varepsilon$ が縮小作用素であることが示される. また, 不動点定理より, 作用素 $\mathcal{A}_\varepsilon$ には不動点 $\delta \hat{\theta}_F^{(k)}$ が一意に存在する. すなわち,

$$\delta \hat{\theta}_F^{(k)} = \mathcal{A}_\varepsilon(\delta \hat{\theta}_F^{(k)}) \quad (21)$$

を満たす $\delta \hat{\theta}_F^{(k)}$ が一意に存在する. さらに,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{A}_\varepsilon(\delta\hat{\theta}_F^{(k)}) = \mathcal{A}(\delta\hat{\theta}^{(k)}) \quad (22)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta\hat{\theta}_F^{(k)} = \delta\hat{\theta}^{(k)} \quad (23)$$

を得る. すなわち, $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限において, 作用素 $\mathcal{A}_\varepsilon$ の不動点 $\delta\hat{\theta}_F^{(k)}$ は (15) 式の解 $\delta\hat{\theta}^{(k)}$ に一致する.

このことより, (11) 式で直接 $\hat{\theta}^{(k+1)}$ を求めるのではなく, (18) 式で定義した作用素の不動点 $\delta\hat{\theta}_F^{(k)}$ を用いて,

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} + \delta\hat{\theta}_F^{(k)} \quad (24)$$

で求める.

4.2 同定アルゴリズムの性質

作用素 $\mathcal{A}_\varepsilon$ の不動点 $\delta\hat{\theta}_F^{(k)}$ は (21) 式を満たすから,

$$\begin{aligned} & \{I - \lambda^2 D[\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) + (\lambda^2 D + \varepsilon)I]^{-1}\} \delta\hat{\theta}_F^{(k)} \\ &= [\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) + \lambda^2 DI]^{-1} \\ & \times \int_{T_i}^{T_f} \Psi(t; \hat{\theta}^{(k)}) [y(t) - H(t)\hat{z}(t; \hat{\theta}^{(k)})] dt \end{aligned}$$

が得られる. ここで, 両辺に左側から $(\Gamma + \lambda^2 DI + \varepsilon I)$ をかけて整理すると

$$\begin{aligned} \delta\hat{\theta}_F^{(k)} &= [\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) + \varepsilon I]^{-1} \\ & \times \left\{ I + \varepsilon [\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) + \lambda^2 DI]^{-1} \right\} \\ & \times \int_{T_i}^{T_f} \Psi(t; \hat{\theta}^{(k)}) [y(t) - H(t)\hat{z}(t; \hat{\theta}^{(k)})] dt \quad (25) \end{aligned}$$

と表わされるので, $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で作用素 $\mathcal{A}_\varepsilon$ の不動点は Gauss-Newton 法 (9) 式による同定値に一致する.

また,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta\hat{\theta}_F^{(k)}}{\partial \varepsilon} &= -\lambda^2 D [\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) + \varepsilon I]^{-1} \\ & \times [\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) + (\lambda^2 D + \varepsilon)I]^{-1} \delta\hat{\theta}_F^{(k)} \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta\hat{\theta}_F^{(k)}}{\partial \lambda} &= -2\lambda D \varepsilon [\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) + \lambda^2 DI]^{-1} \\ & \times [\Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)}) + (\lambda^2 D + \varepsilon)I]^{-1} \delta\hat{\theta}_F^{(k)} \quad (27) \end{aligned}$$

を得る (付録 3 参照) から, これらに補題 1 を適用すると,

$$\left\| \frac{\partial \delta\hat{\theta}_F^{(k)}}{\partial \varepsilon} \right\| \leq \frac{\lambda^2 D}{\varepsilon(\lambda^2 D + \varepsilon)} \|\delta\hat{\theta}_F^{(k)}\| \quad (28)$$

$$\left\| \frac{\partial \delta\hat{\theta}_F^{(k)}}{\partial \lambda} \right\| \leq \frac{2\varepsilon}{\lambda(\lambda^2 D + \varepsilon)} \|\delta\hat{\theta}_F^{(k)}\| \quad (29)$$

という評価を得る. したがって, 不動点 $\delta\hat{\theta}_F^{(k)}$ の ε および λ に対する鋭敏性は, ε と λ を適当に設定することによって小さくすることができるがわかる.

4.3 同定手順

未知パラメータ同定の手順は下記のとおりである.

Step 1 [入出力データの取得] 時間区間 $[T_i, T_f]$ にわた

る入出力データ $\{u(t)\}$, $\{y(t)\}$ を得る.

Step 2 [パラメータおよび初期値の設定] λ および ε を適切に選び, 初期値 $\hat{\theta}^{(0)}$ は何らかの先験的情報により定める. さらに, 収束判定値を設定する.

Step 3 [状態量の推定] ついで, $\theta = \hat{\theta}^{(k)}$ と固定して (最初は Step 2 で得た $\hat{\theta}^{(0)}$), (i) で取得されたデータ $\{y(t)\}$ を用いてカルマン・フィルタ (7), (8) 式によって状態量の推定値 $\{\hat{z}(t; \hat{\theta}^{(k)}), T_i \leq t \leq T_f\}$ を求める.

Step 4 [同定値 $\hat{\theta}^{(k)}$ の更新] Step 3 で得られた $\{\hat{z}(t; \hat{\theta}^{(k)})\}$ を用いて作用素 $\mathcal{A}_\varepsilon$ を定め, (21) 式の不動点 $\delta\hat{\theta}_F^{(k)}$ を逐次代入法で求め, $\hat{\theta}^{(k+1)} (= \hat{\theta}^{(k)} + \delta\hat{\theta}_F^{(k)})$ を得る. ここで, (25) 式は, 右辺第 1 項の逆行列計算で計算機の情報落ち誤差等により不安定になる恐れがあるので用いない.

Step 5 [演算の繰返し] Step 4 で得られた同定値が収束していれば Step 4 を終了して得られた $\hat{\theta}^{(k+1)}$ を最終的な同定値とし, もし収束していなければ Step 3 に戻る.

5. シミュレーション実験

システムのダイナミックスがむだ時間を含んだ一次遅れ系で表わされ, また観測過程が線形であるスカラ系を考える.

$$\begin{aligned} dz(t) &= -\frac{1}{T} z(t) dt + \frac{K}{T} u(t-L) dt \\ &+ g dw(t), \quad z(0) = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$dy_0(t) = z(t) dt + r dv(t), \quad y(0) = 0 \quad (31)$$

ただし, g と r は既知のスカラ定数, 時定数 T , ゲイン定数 K , むだ時間定数 L は未知パラメータ, すなわち, $\theta = [K, T, L]^T$ とする.

$g=0$ とおいたときの (30) 式の解は

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{K}{T} \int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)} u(\tau-L) d\tau \\ &= \frac{K}{T} \int_L^{t+L} e^{-\frac{1}{T}(\tau-L)} u(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (32)$$

で与えられるから, $z(t; \theta) (= z(t))$ の K , T および L に関する偏微分はつぎのように得られる.

$$\frac{\partial z(t; \theta)}{\partial K} = \frac{1}{T} \int_L^{t+L} e^{-\frac{1}{T}(\tau-L)} u(t-\tau) d\tau \quad (33)$$

$$\frac{\partial z(t; \theta)}{\partial T} = \frac{K}{T^2} \int_L^{t+L} (\tau-L-T) e^{-\frac{1}{T}(\tau-L)} u(t-\tau) d\tau \quad (34)$$

$$\frac{\partial z(t; \theta)}{\partial L} = \frac{K}{T} \left[\frac{1}{T} \int_L^{t+L} e^{-\frac{1}{T}(\tau-L)} u(t-\tau) d\tau \right]$$

$$\left. \begin{aligned} & -u(t-L) \end{aligned} \right] \quad (35)$$

ここで、上式の導出には、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial L} \int_L^{t+L} f(\tau, L) d\tau \\ &= \int_L^{t+L} \frac{\partial f(\tau, L)}{\partial L} d\tau + f(t+L, L) - f(L, L) \end{aligned} \quad (36)$$

の公式と $u(-L) \equiv 0$ を用いた。

さらに、 $\theta = \hat{\theta}^{(k)} = [\hat{K}^{(k)}, \hat{T}^{(k)}, \hat{L}^{(k)}]^T$ と固定したときの定常カルマン・フィルタは

$$\begin{aligned} d\hat{z}(t; \hat{\theta}^{(k)}) &= \left[-\frac{1}{\hat{T}^{(k)}} \hat{z}(t; \hat{\theta}^{(k)}) + \frac{\hat{K}^{(k)}}{\hat{T}^{(k)}} u(t - \hat{L}^{(k)}) \right] dt \\ &+ \frac{p}{r^2} \left\{ y(t) - \hat{z}(t; \hat{\theta}^{(k)}) \right\} dt, \quad \hat{z}(0; \hat{\theta}^{(k)}) = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

$$p = r \sqrt{\left(\frac{r}{\hat{T}^{(k)}} \right)^2 + g^2} - \frac{r^2}{\hat{T}^{(k)}} \quad (38)$$

となる。(10) 式中の偏微分 $\partial \hat{z}^T(\cdot; \theta) / \partial \theta$ の計算では、(7) 式と (1) 式とがそれぞれの右辺第 3 項 (雑音項およびイノベーション項) を除いて同じ形であることから、(33)~(35) 式を用いた。

制御入力 $u(t) = 0$ ($t < 0$), $= \sin(1/2)t + 0.5$ ($t \geq 0$) と正弦関数で与える。

パラメータの真値を $[K, T, L] = [0.8, 7.0, 3.0]$, また $r = 10^{-2}$, $g = 10^{-2}$, $\lambda = 1$, $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$, 観測時間幅を $[T_i, T_f] = [0, 20]$ [s], 差分時間幅を $\delta t = 2 \times 10^{-2}$ [s], 同定値の収束規範は三つのパラメータいずれに対しても $|\delta \hat{\theta}_F^{(k)}| / |\hat{\theta}^{(k)}| < 10^{-3}$ とした。Fig. 1 は出力 $y(t)$ と真値 $z(t)$ を示したものである。

Table 1 および Fig. 2 に各未知パラメータの同定結果、Fig. 3 に同定されたパラメータを用いた状態推定の結果

Fig. 1 Observation data $y(t)$ (the see-through line depicts the true system state $z(t)$)

Table 1 Parameter identification

Parameter	True value	Identified value	Error %	k
K	0.8	0.7849	1.8914	34
T	7.0	6.9733	0.3814	34
L	3.0	2.9968	0.1080	34

Fig. 2 Identification results for T , K and L by the proposed algorithm (the dotted lines indicate each true value)

Fig. 3 Estimation of the state $z(t)$ using the identified parameter values (solid line) (the dashed line depicts the true state)

を示す。これらの図表より本論文で提案したアルゴリズムで良好にパラメータ同定が行われていることがわかる。

つぎに、 λ と ε が同定性能に与える影響を調べるために、 $10^{-2} \leq \lambda \leq 10^2$ および $10^{-5} \leq \varepsilon \leq 10^{-1}$ の範囲内でそれぞれ変化させてシミュレーションを行った。Table 2 および Figs. 4~7 に結果を示す。むだ時間の同定は従来

Table 2 The number of iterations for the convergence

λ	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^2
ε					
10^{-5}	34	34	34	34	34
10^{-4}	34	34	34	34	34
10^{-3}	35	37	35	35	35
10^{-2}	37	69	72	73	73
10^{-1}	37	305	418	420	420

Fig. 4 Influence of λ in case of small ε ($=10^{-5}$) for $L=3.0$ Fig. 5 Influence of λ in case of large ε ($=10^{-1}$) for $L=3.0$

あまり行われていないように思われるので、ここでは L の同定について少し詳しくみる。Figs. 4~7が、むだ時間 L の同定に対するパラメータ λ と ε の影響を調べたものである。 ε をより小さく設定した場合には (Fig. 4) λ の変化が同定結果に及ぼす影響はほとんどみられないが、 ε を比較的大きく設定すると (Fig. 5) λ の変化の影響が現れる。すなわち、(29) 式で示されるように “ λ が小さいと λ の変化による同定結果の差異が大きくなる” ことが確認される。 λ を固定したときのパラメータが L の同定結果に及ぼす影響を調べたのが Figs. 6, 7 である。

Fig. 6 Influence of ε in case of small λ ($=10^{-2}$) for $L=3.0$ Fig. 7 Influence of ε in case of large λ ($=10^2$) for $L=3.0$

(28) 式で示されるように、“ ε の変化の同定結果に対する影響は、 λ の値より ε の値による” ことが確認された。さらに、(25) 式からわかるように、“ ε を小さくすれば同定結果は λ の設定値にかかわらない” ことも確認される。

6. 結言

不規則外乱をうけるシステムの不規則観測データからシステムの未知パラメータ (むだ時間をも含めて) を Gauss-Newton 法を修正改良することによって同定するアルゴリズムを提案した。そのキーとなる点は、逐次同定アルゴリズムが不動点をもつように保証したことである。アルゴリズムの有用性はシミュレーション実験によって確認された。本論文で提案したアルゴリズムの特徴は以下のとおりである。

- (i) $1 \gg \varepsilon (> 0)$ と設定することで、ヘッシアン行列の逆行列演算が安定して行えるようにパラメータ λ を自由に設定できる。
- (ii) $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限において、提案したアルゴリズムは Gauss-Newton 法によるものと一致する。
- (iii) ε や λ のパラメータは一定でよく、繰返し演算ごと

に変更しなくてよい。

(iv) (iii) より，修正 Marquart 法と異なり評価汎関数の値を逐次計算ごとに計算しなくてよい。

(v) 同定結果が良好である。

等が挙げられる。

最後に，本研究を行うにあたり筆頭著者は数学的な観点から有用な助言をいただいた京都工芸繊維大学 米谷文男教授に感謝の意を表わす。

参考文献

- [1] 片山：システム同定入門，システム制御情報ライブラリー 9，朝倉書店（1994）
- [2] 中川，小柳：最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会（1982）
- [3] D. W. Marquardt: An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters; *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, Vol. 11, No. 2, pp. 431-441 (1963)
- [4] R. Fletcher: A modified Marquardt subroutine for non-linear least squares; *United Kingdom Atomic Energy Authority Research Group Report* (1971)
- [5] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery: *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press (1988)
- [6] T. Takatsu, A. Ohsumi and A. Nakagawa: Parameter identification of stochastic uncertain systems using a modified Gauss-Newton method; *Proc. 32nd ISIE Symp. Stochastic systems*, Tottori, pp. 225-230 (2001)
- [7] A. Ohsumi, M. Watanabe and A. Shintani: On-line identification of physical parameters involved with dynamic beams: Experimental study; *Proc. 35th IEEE Conf. on Decision and Control*, Kobe, pp. 4204-4209 (1996)
- [8] N. Nakano, A. Ohsumi and A. Shintani: Algorithms for the identification of spatially varying/invariant stiffness and dampings in flexible beams; *Inverse Problems and Related Topics* (Eds: G. Nakamura, et al.), Chapman & Hall/CRC Press, pp. 97-113 (2000)

付 録

付録 1. (11) 式の導出について

(9) 式は

$$\gamma = \Phi^{-1}\beta \quad (\text{A1})$$

のように書くことができる。ここで， $\gamma = \hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)}$ であり，また Φ ， β は (20) 式によって与えられる量である。 $\alpha > 0$ とすると (A1) 式はつぎのように変形できる。

$$\begin{aligned} \gamma &= \Phi^{-1}(\Phi + \alpha I)(\Phi + \alpha I)^{-1}\beta \\ &= (I + \alpha\Phi^{-1})(\Phi + \alpha I)^{-1}\beta \end{aligned}$$

これより

$$(I + \alpha\Phi^{-1})^{-1}\gamma = (\Phi + \alpha I)^{-1}\beta \quad (\text{A2})$$

を得るが， $(I + \alpha\Phi^{-1})^{-1} = I - \alpha(\Phi + \alpha I)^{-1}$ に留意すると (A2) 式より

$$\gamma = (\Phi + \alpha I)^{-1}\beta + \alpha(\Phi + \alpha I)^{-1}\gamma \quad (\text{A3})$$

を得る。ここで， $\alpha = \lambda^2 D$ とおくことによって (A3) 式より (11) 式が得られる。(A1) 式では $\Phi > 0$ の条件が必要であるが，(A3) 式の表現では $\Phi \geq 0$ であってもよい。

付録 2. 補題と定理の証明

(1) 補題

【補題 1】 実正方行列 Φ およびスカラー μ が $\Phi \geq 0$ および $\mu > 0$ と仮定すると，

$$\|(\Phi + \mu I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu} \quad (\text{A4})$$

が成り立つ。

(証明) 行列ノルムの定義より，

$$\begin{aligned} \|(\Phi + \mu I)^{-1}\|^{-1} &= \frac{1}{\max_{x \neq 0} \frac{\|(\Phi + \mu I)^{-1}x\|}{\|x\|}} \\ &= \min_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|(\Phi + \mu I)^{-1}x\|} \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

を得る。さらに，上式において， $x = (\Phi + \mu I)\xi$ を代入し，Schwarz の不等式を適用すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \|(\Phi + \mu I)^{-1}\|^{-1} &= \min_{\xi \neq 0} \frac{\|(\Phi + \mu I)\xi\|}{\|\xi\|} \\ &\geq \min_{\xi \neq 0} \frac{\xi'(\Phi + \mu I)\xi}{\|\xi\|^2} \\ &= \min_{\xi \neq 0} \frac{\xi'\Phi\xi}{\|\xi\|^2} + \mu \geq \mu \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

□

(2) 定理の証明

(a) 定理 1 の証明

(証明) いま， $x_1 \neq x_2$ ； $x_1, x_2 \in R^n$ を与えると，

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}(x_1) - \mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}(x_2)\| \\ &= \left\| \alpha[\Phi + (\alpha + \varepsilon)I]^{-1}x_1 - \alpha[\Phi + (\alpha + \varepsilon)I]^{-1}x_2 \right\| \\ &\leq \alpha \left\| [\Phi + (\alpha + \varepsilon)I]^{-1} \right\| \|x_1 - x_2\| \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

を得る。(A7) 式に補題 1 を適用すると，

$$\|\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}(x_1) - \mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}(x_2)\| \leq \frac{\alpha}{\alpha + \varepsilon} \|x_1 - x_2\| \quad (\text{A8})$$

を得る。ここで， $0 < \alpha/(\alpha + \varepsilon) < 1$ であるから，(A8) 式より作用素 $\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}$ は縮小写像を与える。 □

(b) 定理 2 の証明

(証明) 定理1 および不動点定理より, $\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}$ に対して一意に不動点が存在する. いま, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ ($\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$) が与えられたとき, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ おのおのに対して, x_1 および x_2 が不動点として一意に定まる. すなわち,

$$\mathcal{F}_{\varepsilon_1, \alpha}(x_1) = x_1, \quad \mathcal{F}_{\varepsilon_2, \alpha}(x_2) = x_2 \quad (\text{A9})$$

が成り立つ. これより

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &= \|\mathcal{F}_{\varepsilon_1, \alpha}(x_1) - \mathcal{F}_{\varepsilon_2, \alpha}(x_2)\| \\ &\leq \|\mathcal{F}_{\varepsilon_1, \alpha}(x_1) - \mathcal{F}_{\varepsilon_2, \alpha}(x_1)\| \\ &\quad + \|\mathcal{F}_{\varepsilon_2, \alpha}(x_1) - \mathcal{F}_{\varepsilon_2, \alpha}(x_2)\| \quad (\text{A10}) \end{aligned}$$

である. ここで, (A10) 式の右辺第1項は

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{F}_{\varepsilon_1, \alpha}(x_1) - \mathcal{F}_{\varepsilon_2, \alpha}(x_1)\| \\ &= \left\| \alpha[\Phi + (\alpha + \varepsilon_1)I]^{-1}x_1 - \alpha[\Phi + (\alpha + \varepsilon_2)I]^{-1}x_1 \right\| \\ &\leq \alpha \left\| [\Phi + (\alpha + \varepsilon_1)I]^{-1} - [\Phi + (\alpha + \varepsilon_2)I]^{-1} \right\| \|x_1\| \quad (\text{A11}) \end{aligned}$$

となる.

ところで, 行列ノルムの定義より,

$$\begin{aligned} &\left\| [\Phi + (\alpha + \varepsilon_1)I]^{-1} - [\Phi + (\alpha + \varepsilon_2)I]^{-1} \right\| \\ &= \max_{\xi \neq 0} \frac{\left\| \left([\Phi + (\alpha + \varepsilon_1)I]^{-1} - [\Phi + (\alpha + \varepsilon_2)I]^{-1} \right) \xi \right\|}{\|\xi\|} \\ &= \max_{\eta \neq 0} \frac{\left\| [\Phi + (\alpha + \varepsilon_1)I]^{-1} [\Phi + (\alpha + \varepsilon_2)I] \eta - \eta \right\|}{\|[\Phi + (\alpha + \varepsilon_2)I] \eta\|} \quad (\text{A12}) \end{aligned}$$

を得る. ただし $\eta = [\Phi + (\alpha + \varepsilon_2)I]^{-1} \xi$ である. ここで,

$$\begin{aligned} &[\Phi + (\alpha + \varepsilon_1)I]^{-1} [\Phi + (\alpha + \varepsilon_2)I] \\ &= [\Phi + (\alpha + \varepsilon_1)I]^{-1} [\Phi + (\alpha + \varepsilon_1)I + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)I] \\ &= I + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) [\Phi + (\alpha + \varepsilon_1)I]^{-1} \quad (\text{A13}) \end{aligned}$$

に留意し, 補題1 を適用すると, (A12) 式より

$$\begin{aligned} &\left\| [\Phi + (\alpha + \varepsilon_1)I]^{-1} - [\Phi + (\alpha + \varepsilon_2)I]^{-1} \right\| \\ &\leq \max_{\eta \neq 0} \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \left\| [\Phi + (\alpha + \varepsilon_1)I]^{-1} \right\| \|\eta\|}{\|[\Phi + (\alpha + \varepsilon_2)I] \eta\|} \\ &\leq \max_{\eta \neq 0} \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \left\| [\Phi + (\alpha + \varepsilon_1)I]^{-1} \right\|}{\min_{\eta \neq 0} \frac{\|[\Phi + (\alpha + \varepsilon_2)I] \eta\|}{\|\eta\|}} \\ &= \max_{\eta \neq 0} \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \left\| [\Phi + (\alpha + \varepsilon_1)I]^{-1} \right\|}{\left\| [\Phi + (\alpha + \varepsilon_2)I]^{-1} \right\|^{-1}} \\ &= |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \left\| [\Phi + (\alpha + \varepsilon_1)I]^{-1} \right\| \left\| [\Phi + (\alpha + \varepsilon_2)I]^{-1} \right\| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{(\alpha + \varepsilon_1)(\alpha + \varepsilon_2)} \quad (\text{A14})$$

を得る.

よって, (A14) 式を (A11) 式に代入して,

$$\|\mathcal{F}_{\varepsilon_1, \alpha}(x_1) - \mathcal{F}_{\varepsilon_2, \alpha}(x_1)\| \leq \frac{\alpha |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{(\alpha + \varepsilon_1)(\alpha + \varepsilon_2)} \|x_1\| \quad (\text{A15})$$

を得る.

(A15) 式および (A8) 式を (A10) 式に代入すると,

$$\|x_1 - x_2\| \leq \frac{\alpha |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{(\alpha + \varepsilon_1)(\alpha + \varepsilon_2)} \|x_1\| + \frac{\alpha}{\alpha + \varepsilon_2} \|x_1 - x_2\|$$

となり, 辺々を整理すると

$$\|x_1 - x_2\| < \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{\varepsilon_2} \|x_1\| \quad (\text{A16})$$

を得る. また (A10) 式において x_1, x_2 の役割を入れ換えることによって (A16) 式と同様に

$$\|x_1 - x_2\| < \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{\varepsilon_1} \|x_2\| \quad (\text{A17})$$

を得る.

よって, (A16) 式および (A17) 式より,

$$\|x_1 - x_2\| < \min \left(\frac{\|x_2\|}{\varepsilon_1}, \frac{\|x_1\|}{\varepsilon_2} \right) |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad (\text{A18})$$

となるから, (A10) 式より

$$\lim_{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \rightarrow 0} \|\mathcal{F}_{\varepsilon_1, \alpha}(x_1) - \mathcal{F}_{\varepsilon_2, \alpha}(x_2)\| = 0 \quad (\text{A19})$$

を得る. $\square$

付録 3. (26) 式および (27) 式の導出

(19) 式で定義される作用素 $\mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}$ の不動点 x_F は, $x_F = \mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}(x_F)$ を満たすから

$$x_F = \alpha[\Phi + (\alpha + \varepsilon)I]^{-1}x_F + (\Phi + \alpha I)^{-1}\beta \quad (\text{A20})$$

を得る. この両辺を ε で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_F}{\partial \varepsilon} &= \alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [\Phi + (\alpha + \varepsilon)I]^{-1} x_F \\ &\quad + \alpha [\Phi + (\alpha + \varepsilon)I]^{-1} \frac{\partial x_F}{\partial \varepsilon} \end{aligned}$$

ここで, $\partial[\Phi + (\alpha + \varepsilon)I]^{-1}/\partial \varepsilon = -[\Phi + (\alpha + \varepsilon)I]^{-2}$ に留意し, 上式の両辺に $[\Phi + (\alpha + \varepsilon)I]$ を左側からかけて整理することによって

$$\frac{\partial x_F}{\partial \varepsilon} = -\alpha(\Phi + \varepsilon I)^{-1}[\Phi + (\alpha + \varepsilon)I]^{-1}x_F \quad (\text{A21})$$

を得る.

一方, (A20) より $\{I - \alpha[\Phi + (\alpha + \varepsilon)I]^{-1}\}x_F = (\Phi + \alpha I)^{-1}\beta$ を得るから, この両辺に左側から $[\Phi + (\alpha + \varepsilon)I]$ をかけて整理すると, $(\Phi + \varepsilon I)x_F = \{I + \varepsilon(\Phi + \alpha I)^{-1}\}\beta$, すなわち

$$x_F = (\Phi + \varepsilon I)^{-1} \{I + \varepsilon(\Phi + \alpha I)^{-1}\} \beta \quad (\text{A22})$$

を得る。これより

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_F}{\partial \alpha} &= (\Phi + \varepsilon I)^{-1} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Phi + \alpha I)^{-1} \beta \\ &= -\varepsilon (\Phi + \varepsilon I)^{-1} (\Phi + \alpha I)^{-2} \beta \end{aligned} \quad (\text{A23})$$

となる。(A20) 式から β を求め (A23) 式 に代入することによって

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_F}{\partial \alpha} &= -\varepsilon (\Phi + \varepsilon I)^{-1} (\Phi + \alpha I)^{-1} \\ &\quad \times \{I - \alpha [\Phi + (\alpha + \varepsilon) I]^{-1}\} x_F \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

を得る。ここで、行列 A と B が可換であるとき、 $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 、 $A^{-1}B = BA^{-1}$ が成り立つことに留意し、 $A = \Phi + \alpha I$ 、 $B = \Phi + \varepsilon I$ とおくと (このとき $AB = BA$ となることは明らか)、(A24) 式より

$$\begin{aligned} [\Phi + (\alpha + \varepsilon) I] \frac{\partial x_F}{\partial \alpha} &= -\varepsilon [\Phi + (\alpha + \varepsilon) I] (\Phi + \varepsilon I)^{-1} \\ &\quad \times (\Phi + \alpha I)^{-1} \{I - \alpha [\Phi + (\alpha + \varepsilon) I]^{-1}\} x_F \\ &= -\varepsilon (\Phi + \varepsilon I)^{-1} (\Phi + \alpha I)^{-1} (\Phi + \varepsilon I) x_F \\ &= -\varepsilon (\Phi + \varepsilon I)^{-1} (\Phi + \varepsilon I) (\Phi + \alpha I)^{-1} x_F \\ &= -\varepsilon (\Phi + \alpha I)^{-1} x_F \end{aligned}$$

すなわち、これより $[\Phi + (\alpha + \varepsilon) I]^{-1} (\Phi + \alpha I)^{-1} = (\Phi + \alpha I)^{-1} [\Phi + (\alpha + \varepsilon) I]^{-1}$ に留意して

$$\frac{\partial x_F}{\partial \alpha} = -\varepsilon (\Phi + \alpha I)^{-1} [\Phi + (\alpha + \varepsilon) I]^{-1} x_F \quad (\text{A25})$$

を得る。

(A21) 式において、 $x_F = \delta \hat{\theta}_F^{(k)}$ 、 $\Phi = \Gamma(D; \hat{\theta}^{(k)})$ 、 $\alpha = \lambda^2 D$ とすれば (26) 式が得られる。

また (27) 式については、

$$\frac{\partial \delta \hat{\theta}_F^{(k)}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \delta \hat{\theta}_F^{(k)}}{\partial (\lambda^2 D)} \frac{\partial (\lambda^2 D)}{\partial \lambda} = 2\lambda D \frac{\partial \delta \hat{\theta}_F^{(k)}}{\partial (\lambda^2 D)}$$

に留意して、この最終項の偏微分計算に (A25) 式を適用すれば得られる。