オンラインで操作可能なパラメータを有する ロバストモデル規範制御系 —出力可到達集合解析に基づく設計*

渡辺 亮[†]・片山 大昌[‡]・内田 健康[†]

Robust Model Reference Control Systems with Online Adjustable Parameters

— A Design Method Based on the Analysis of Output Reachable Sets*

Ryo WATANABE[†], Daisuke KATAYAMA[‡] and Kenko UCHIDA[†]

In this paper, we consider a design of the model reference control systems with adjustable parameters for linear systems with time-varying parametric uncertainties. To discuss this problem, we focus on the output error between the plant and the reference model, and adopt the reachable domain of this error as a performance index. This reachable domain is known as an output reachable set. Based on the analysis technique of output reachable sets, we propose a new design technique of the model reference controller, and demonstrate its efficacy by numerical case studies.

1. はじめに

本論文では、時変なパラメータ変動を持つ線形システムを対象に、オンラインで操作可能なパラメータを有するモデル規範制御系の設計について考察を行う。

モデル規範制御とは、望ましい入出力特性を持たせた規範モデルの出力に制御対象の出力を追従させることを目的とした制御手法である[1–3]。従来のモデル規範制御では、制御対象に不確かさが存在しない等いくつかの条件が満たされる場合に、制御対象と規範モデルの初期状態における状態偏差を原因とする出力の追従誤差を零に収束させる制御が実現される。一方で、制御対象に不確かさが存在する場合には出力の追従誤差を零に収束させることが困難であることが知られている。

そこで本論文では、時変なパラメータ変動を持つ線形システムを対象に、初期状態の偏差に起因する出力の追従誤差ではなく、制御対象の不確かさに起因する出力の追従誤差に注目したモデル規範制御系の設計手法を提案する。制御系は、制御対象の時変なパラメータ変動に対応した調整パラメータと、規範モデルの応答を調整する

ためのパラメータを有するものとし、これらをオンラインで操作可能な構成とする。制御系の性能指標として出力可到達集合[4,5]を用い、出力の追従誤差が有界領域の内部に留まる制御を実現する。

本論文の構成は以下のとおりである。第2節では、時変なパラメータ変動を持つ線形システムに対する可到達集合解析についてまとめる。第3節では、時変なパラメータ変動を持つ線形システムに対するモデル規範制御系の設計について考察する。第4節では、提案手法を用いた制御系設計の数値例を示す。

本論文で用いる記法は次の通りである。行列 P の転置を P' で表す。 $P > (<) 0$ は行列 P が正定 (半負定) であることを、 $P \geq (\leq) 0$ は行列 P が半正定 (負定) であることを表す。また Θ は、 $\Theta = \{[\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \cdots \ \theta_s(t)]' \mid \theta_i(t) \in [0, 1] \ \forall t \in [0, \infty)\}$ で定義される関数のクラス、 Θ^* は、 $\Theta^* = \{[\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_s]' \mid \theta_i \in [0, 1]\}$ で定義される R^s の部分集合を表す。 $\mathcal{E}(P)$ は、 $P > 0$ に対して定義される領域 $\mathcal{E}(P) = \{\zeta \mid \zeta' P \zeta \leq 1\}$ を表す。

2. 可到達集合の解析

2.1 状態可到達集合の解析

次の状態変数表現で定義される、時変なパラメータ変動を持つ線形システム $\Sigma_x(\theta)$ を考える。

$$\frac{d}{dt}x = A(\theta(t))x + B(\theta(t))w(t) \quad (1)$$

ここで、 $x(t) \in R^n$ は状態、 $w(t) \in R^{m_1+m_2+\cdots+m_p}$ は外乱を表すものとする。初期状態は $x(0) = 0$ 、外乱 $w(t) =$

* 原稿受付 2000年12月28日

[†] 早稲田大学 理工学部 School of Engineering, Waseda University; Okubo 3-4-1, Shinjuku, Tokyo 169-8555, JAPAN

[‡] 大阪大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Osaka University; Yamadaoka 2-1, Suita city, Osaka 565-0871, JAPAN

Key Words: model reference control, robust control, reachable set.

$[w'_1(t) \ w'_2(t) \ \cdots \ w'_p(t)]'$, $w_i(t) \in R^{m_i}$ は正定対称行列 $W_1, W_2, \dots, W_p$ に対して次の条件を満たしていると仮定する.

$$w_i(t) \in \mathcal{E}(W_i), \quad \forall t \in [0, \infty), \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (2)$$

また, 時変なパラメータ変動 $\theta(t)$ はクラス Θ に属しているものとする.

【定義 1】 $\xi \in R^n$ に対し, ある時刻 $T \in [0, \infty)$ で $x(T) = \xi$ を実現する (2) 式の条件を満たす外乱 $w(t)$ が存在するとき, ξ は $x(0) = 0$ から状態可到達であるという.

【定義 2】 $\Sigma_x(\theta)$ の状態可到達集合 $\mathcal{R}_x(\Sigma_x(\theta))$ を次で定義する.

$$\mathcal{R}_x(\Sigma_x(\theta)) = \{\xi \in R^n : \xi \text{ は } x(0) = 0 \text{ から状態可到達}\} \quad (3)$$

【定理 1】 正定対称行列 $P \in R^{n \times n}$ と, 任意の $\theta^* \in \Theta^*$ に対して非負となる実数関数 $\alpha_1(\theta^*), \alpha_2(\theta^*), \dots, \alpha_p(\theta^*)$ が存在し, 次の行列不等式条件を満たしているとする.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (*) & PB(\theta^*) \\ B'(\theta^*)P & (**) \end{bmatrix} &\leq 0, \quad \forall \theta^* \in \Theta^* \quad (4) \\ (*) &= A'(\theta^*)P + PA(\theta^*) \\ &\quad + (\alpha_1(\theta^*) + \alpha_2(\theta^*) + \cdots + \alpha_p(\theta^*))P \\ (**) &= \text{diag}(-\alpha_1(\theta^*)W_1, -\alpha_2(\theta^*)W_2, \\ &\quad \dots, -\alpha_p(\theta^*)W_p) \end{aligned}$$

このとき, $\Sigma_x(\theta)$ の状態可到達集合 $\mathcal{R}_x(\Sigma_x(\theta))$ は次を満たす.

$$\mathcal{R}_x(\Sigma_x(\theta)) \subset \mathcal{E}(P), \quad \forall \theta \in \Theta \quad (5)$$

(証明) 付録 2. 参照. $\square$

2.2 出力可到達集合の解析

次の状態変数表現で定義される, 時変なパラメータ変動を持つ線形システム $\Sigma_z(\theta)$ を考える.

$$\frac{d}{dt}x = A(\theta(t))x + B(\theta(t))w(t) \quad (6)$$

$$z = Cx \quad (7)$$

ここで, $x(t) \in R^n$ は状態, $w(t) \in R^{m_1+m_2+\dots+m_p}$ は外乱, $z(t) \in R^l$ は出力を表すものとする. 初期状態は $x(0) = 0$, 外乱 $w(t) = [w'_1(t) \ w'_2(t) \ \cdots \ w'_p(t)]'$, $w_i(t) \in R^{m_i}$ は正定対称行列 $W_1, W_2, \dots, W_p$ に対して次の条件を満たしていると仮定する.

$$w_i(t) \in \mathcal{E}(W_i), \quad \forall t \in [0, \infty), \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (8)$$

また, 時変なパラメータ変動 $\theta(t)$ はクラス Θ に属しているものとする.

【定義 3】 $\zeta \in R^l$ に対し, ある時刻 $T \in [0, \infty)$ で $z(T) = \zeta$ を実現する (8) 式の条件を満たす外乱 $w(t)$ が存在するとき, ζ は $Cx(0) = 0$ から出力可到達である

という.

【定義 4】 $\Sigma_z(\theta)$ の出力可到達集合 $\mathcal{R}_z(\Sigma_z(\theta))$ を次で定義する.

$$\mathcal{R}_z(\Sigma_z(\theta)) = \{\zeta \in R^l : \zeta \text{ は } Cx(0) = 0 \text{ から出力可到達}\} \quad (9)$$

【定理 2】 正定対称行列 $Q \in R^{n \times n}$, $S \in R^{l \times l}$ および任意の $\theta^* \in \Theta^*$ に対して非負となる実数関数 $\alpha_1(\theta^*), \alpha_2(\theta^*), \dots, \alpha_p(\theta^*)$ が存在し, 次の行列不等式条件を満たしているとする.

$$\begin{bmatrix} (*) & B(\theta^*) \\ B'(\theta^*) & (**) \end{bmatrix} \leq 0, \quad \forall \theta^* \in \Theta^* \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} Q & QC' \\ CQ & S^{-1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (11)$$

$$(*) = QA'(\theta^*) + A(\theta^*)Q + (\alpha_1(\theta^*) + \alpha_2(\theta^*) + \cdots + \alpha_p(\theta^*))Q$$

$$(**) = \text{diag}(-\alpha_1(\theta^*)W_1, -\alpha_2(\theta^*)W_2, \dots, -\alpha_p(\theta^*)W_p)$$

このとき, $\Sigma_z(\theta)$ の出力可到達集合 $\mathcal{R}_z(\Sigma_z(\theta))$ は, 次の条件を満たす.

$$\mathcal{R}_z(\Sigma_z(\theta)) \subset \mathcal{E}(S), \quad \forall \theta \in \Theta \quad (12)$$

(証明) 付録 3. 参照. $\square$

3. モデル規範制御系の設計

3.1 制御対象

次の微分方程式で定義される, 時変なパラメータ変動 δ を持つ制御対象 $\Sigma(\delta)$ を考える.

$$\begin{aligned} y^{(n)} &+ A_{n-1}(\delta(t))y^{(n-1)} + \cdots \\ &+ A_1(\delta(t))y^{(1)} + A_0(\delta(t))y = B_0(\delta(t))u(t) \end{aligned} \quad (13)$$

ここで, $y(t) \in R^m$ は出力, $y^{(j)}$ は出力 y の j 階微分, $u(t) \in R^m$ は制御入力を表すものとする. 時変なパラメータ変動 δ はクラス Θ に属しているものとする. また, $B_0(\delta)$ は任意の $\delta \in \Theta^*$ に対して正則であるものとする.

(13) 式の微分方程式に対し, 状態変数 $x \in R^{nm}$ を $x = [y' \ (y^{(1)})' \ \cdots \ (y^{(n-1)})']'$ で定義し, $A(\delta) \in R^{(nm) \times (nm)}$, $B(\delta) \in R^{(nm) \times m}$ および $C \in R^{m \times (nm)}$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} A(\delta) &= \begin{bmatrix} 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \\ -A_0(\delta) & -A_1(\delta) & \cdots & -A_{n-1}(\delta) \end{bmatrix} \\ B(\delta) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_0(\delta) \end{bmatrix}, \quad C = [I \ 0 \ \cdots \ 0] \end{aligned} \quad (14)$$

このとき、 $\Sigma(\delta)$ は次の状態変数表現で記述される。

$$\frac{d}{dt}x = A(\delta(t))x + B(\delta(t))u(t) \quad (15)$$

$$y = Cx \quad (16)$$

3.2 規範モデル

規範モデル $\bar{\Sigma}(\theta)$ を次の状態変数表現で定義する。

$$\frac{d}{dt}\bar{x} = \bar{A}(\theta(t))\bar{x} + \bar{B}(\theta(t))r(t) \quad (17)$$

$$\bar{y} = C\bar{x} \quad (18)$$

ただし、 $\bar{x}(t) \in R^{nm}$ は状態、 $\bar{y}(t) \in R^m$ は出力を表す。 $r(t) \in R^m$ は規範入力を表し、 $W > 0$ に対して次の条件を満たしているものとする。

$$r(t) \in \mathcal{E}(W), \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (19)$$

また、 θ は操作可能なパラメータで、クラス Θ に属しているものとする。一方、 $\bar{A}(\theta) \in R^{(nm) \times (nm)}$ および $\bar{B}(\theta) \in R^{(nm) \times m}$ は次で定義されるものとする。

$$\bar{A}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \\ -\bar{A}_0(\theta) & -\bar{A}_1(\theta) & \cdots & -\bar{A}_{n-1}(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{B}_0(\theta) \end{bmatrix} \quad (20)$$

$\bar{A}_0(\theta), \bar{A}_1(\theta), \dots, \bar{A}_{n-1}(\theta)$ および $\bar{B}_0(\theta)$ は $R^{m \times m}$ に属するものとする。また、 $\bar{\Sigma}(\theta)$ の C 行列は、制御対象 $\Sigma(\delta)$ の状態変数表現における C 行列と共通であるものとする。

(注意 1) モデル規範制御における規範モデルは、制御対象がこのような動作して欲しいという理想的な振舞を表すモデルであることから、その意味から考えると、パラメータ θ による調整の必要性は薄いといえる。しかしながら、制御の現場において、制御対象の運転中にオンラインで制御性能を調整したいという要求は十分にあり得るものと考えられる。本論文における調整パラメータ θ は、このような要求をかんがみたものである。

ここで、 $\bar{\Sigma}(\theta)$ の状態可到達集合について考察する。定理 1 ($p=1$) より、任意の $\theta^* \in \Theta^*$ に対して次の行列不等式条件

$$\begin{bmatrix} (*) & \bar{P}\bar{B}(\theta^*) \\ \bar{B}'(\theta^*)\bar{P} & -\bar{\alpha}(\theta^*)W \end{bmatrix} \leq 0 \quad (21)$$

$$(*) = \bar{A}'(\theta^*)\bar{P} + \bar{P}\bar{A}(\theta^*) + \bar{\alpha}(\theta^*)\bar{P}$$

を満たす $\bar{P} > 0$ および $\theta^* \in \Theta^*$ に対して非負となる実数関数 $\bar{\alpha}(\theta^*)$ が存在するならば、規範モデルの状態可到達集合 $\mathcal{R}_x(\bar{\Sigma}(\theta))$ は次の条件を満たす。

$$\mathcal{R}_x(\bar{\Sigma}(\theta)) \subset \mathcal{E}(\bar{P}), \quad \forall \theta \in \Theta \quad (22)$$

3.3 制御系設計の枠組

制御系設計の枠組を Fig. 1 に示す。制御対象、規範モデルおよびコントローラから構成される閉ループ系を $\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta)$ とよぶ。規範モデルの出力 $\bar{y}$ と制御対象の出力 y の偏差 $e_y = \bar{y} - y$ を $\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta)$ の出力とする。制御対象が時変なパラメータ変動 δ に依存していることにかんがみ、コントローラは δ の推定値 $\tilde{\delta}$ により操作可能とする。また、規範モデルの特性はパラメータ θ により操作可能とし、コントローラの特性を θ の操作にも依存させる。

Fig. 1 Structure of control system

3.4 制御系に対する仕様

制御系に対して次の仕様を与える。

- $S > 0$ に対し、閉ループ系 $\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta)$ の出力可到達集合 $\mathcal{R}_z(\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta))$ が次の条件を満たす。

$$\mathcal{R}_z(\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta)) \subset \mathcal{E}(S), \quad \forall \delta, \tilde{\delta}, \theta \in \Theta \quad (23)$$

上記の仕様は、(19) 式の条件を満たす任意の規範入力 r 、クラス Θ に属する任意のパラメータ変動 δ およびクラス Θ に属するパラメータ $\tilde{\delta}, \theta$ の任意の操作に対し、制御対象と規範モデルの出力偏差 e_y が常に有界領域 $\mathcal{E}(S)$ の内部に留まることを要求するものである。

3.5 拡大系の構成

制御系の設計を行うため、制御対象 $\Sigma(\delta)$ および規範モデル $\bar{\Sigma}(\theta)$ から拡大系 $\Sigma_a(\delta, \theta)$ を構成する。 $\Sigma_a(\delta, \theta)$ の状態を

$$\begin{bmatrix} e_x \\ \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} - x \\ \bar{x} \end{bmatrix} \quad (24)$$

入力を r, u 、出力を $e_y = \bar{y} - y$ とすると、 $\Sigma_a(\delta, \theta)$ の状態変数表現は (15)–(18) 式より次で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_x \\ \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\delta(t)) & \bar{A}(\theta(t)) - A(\delta(t)) \\ 0 & \bar{A}(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ \bar{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}(\theta(t)) \\ \bar{B}(\theta(t)) \end{bmatrix} r(t) - \begin{bmatrix} B(\delta(t)) \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (25)$$

$$e_y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ \bar{x} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$\Sigma_a(\delta, \theta)$ に対し, 次の状態フィードバックコントローラ $K(\tilde{\delta}, \theta)$ を考える.

$$u(t) = \begin{bmatrix} F(\tilde{\delta}(t), \theta(t)) & G(\tilde{\delta}(t), \theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ \bar{x} \end{bmatrix} + H(\tilde{\delta}(t), \theta(t)) r(t) \quad (27)$$

このとき, $\Sigma_a(\delta, \theta)$ と $K(\tilde{\delta}, \theta)$ から成る閉ループ系 $\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta)$ の状態方程式は, 次で与えられる.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_x \\ \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (*) & (**) \\ 0 & \bar{A}(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ \bar{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}(\theta) - B(\delta)H(\tilde{\delta}, \theta) \\ \bar{B}(\theta) \end{bmatrix} r(t) \quad (28)$$

$$(*) = A(\delta) - B(\delta)F(\tilde{\delta}, \theta)$$

$$(**) = \bar{A}(\theta) - A(\delta) - B(\delta)G(\tilde{\delta}, \theta)$$

$\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta)$ のブロック線図を Fig. 2 に示す.

Fig. 2 Closed loop system

3.6 $H(\tilde{\delta}, \theta)$, $G(\tilde{\delta}, \theta)$ の設計

状態フィードバックコントローラ $K(\tilde{\delta}, \theta)$ における $H(\tilde{\delta}, \theta)$ と $G(\tilde{\delta}, \theta)$ の設計は, 従来提案されているモデル規範制御系設計の手順に従い, 規範入力 r と状態 $\bar{x}$ が状態偏差の微分値 $\dot{e}_x$ に及ぼす影響を抑える (可能ならば零にする) という観点から行う. そこで, $H(\tilde{\delta}, \theta)$ および $G(\tilde{\delta}, \theta)$ を次で与える.

$$H(\tilde{\delta}, \theta) = B_0(\tilde{\delta})^{-1} \bar{B}_0(\theta) \quad (29)$$

$$G(\tilde{\delta}, \theta) = B_0(\tilde{\delta})^{-1} \begin{bmatrix} A_0(\tilde{\delta}) - \bar{A}_0(\theta) & A_1(\tilde{\delta}) - \bar{A}_1(\theta) \\ \vdots & A_{n-1}(\tilde{\delta}) - \bar{A}_{n-1}(\theta) \end{bmatrix} \quad (30)$$

このとき, $A(\delta), \bar{A}(\theta), B(\delta), \bar{B}(\theta)$ の定義および (28) 式より閉ループ系 $\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta)$ の状態変数表現は次で与えられる.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_x \\ \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \Pi_1 \\ 0 & \bar{A}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ \bar{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Pi_2 \\ \bar{B}(\theta) \end{bmatrix} r(t) \quad (31)$$

$$e_y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ \bar{x} \end{bmatrix} \quad (32)$$

(31) 式における A, Π_1, Π_2 は次式で表される.

$$A = A(\delta) - B(\delta)F(\tilde{\delta}, \theta) \quad (33)$$

$$\Pi_1 = \bar{A}(\theta) - A(\delta) - B(\delta)B(\tilde{\delta})^+ (\bar{A}(\theta) - A(\tilde{\delta})) \quad (34)$$

$$\Pi_2 = \bar{B}(\theta) - B(\delta)B(\tilde{\delta})^+ \bar{B}(\theta) \quad (35)$$

ただし, $B(\tilde{\delta})^+$ は $B(\tilde{\delta})$ の疑似逆行列を表し, この場合 $B(\tilde{\delta})^+ = [0 \cdots 0 \ B_0(\tilde{\delta})^{-1}]$ である.

ここで, $\delta = \tilde{\delta}$ の場合について考えると次が成立する.

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0 \quad (36)$$

したがって, $\tilde{\delta}$ の操作によって, 規範入力 r と状態 $\bar{x}$ が状態偏差の微分値 $\dot{e}_x$ に及ぼす影響を零にすることが可能であることがわかる.

3.7 $F(\tilde{\delta}, \theta)$ の設計

(31), (32) 式に示した閉ループ系 $\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta)$ の状態変数表現より, 制御対象 $\Sigma(\delta)$ と規範モデル $\bar{\Sigma}(\theta)$ の状態偏差 e_x および出力偏差 e_y について, 次の微分方程式が成立する.

$$\frac{d}{dt} e_x = A e_x + \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$e_y = C e_x \quad (38)$$

そこで, (37) 式における $\bar{x}(t)$ および $r(t)$ を, (19), (22) 式よりそれぞれ次の条件を満たす外乱とみなすことにする.

$$\bar{x}(t) \in \mathcal{E}(\bar{P}), \quad r(t) \in \mathcal{E}(W), \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (39)$$

このとき, $F(\tilde{\delta}, \theta)$ の設計問題は, (37), (38) 式で定義されるシステムに対する出力可到達集合の設計問題に帰着される.

【定理 3】 $\bar{P} > 0$ および任意の $\theta^* \in \Theta^*$ に対して非負となる実数関数 $\bar{\alpha}(\theta^*)$ が存在し, 次の行列不等式条件を満たしているものとする.

$$\begin{bmatrix} (*) & \bar{P} \bar{B}(\theta^*) \\ \bar{B}'(\theta^*) \bar{P} & -\bar{\alpha}(\theta^*) W \end{bmatrix} \leq 0, \quad \forall \theta^* \in \Theta^* \quad (40)$$

$$(*) = \bar{A}'(\theta^*) \bar{P} + \bar{P} \bar{A}(\theta^*) + \bar{\alpha}(\theta^*) \bar{P}$$

また, $Q > 0, S > 0, \Theta^* \times \Theta^*$ を定義域とする行列関数 $X(\delta^*, \theta^*)$, および任意の $\delta^*, \tilde{\delta}^*, \theta^* \in \Theta^*$ に対して非負となる実数関数 $\alpha_1(\delta^*, \tilde{\delta}^*, \theta^*), \alpha_2(\delta^*, \tilde{\delta}^*, \theta^*)$ が存在し, 次の行列不等式条件を満たしているものとする.

$$\begin{bmatrix} \Omega & \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi_1' & -\alpha_1 \bar{P} & 0 \\ \Pi_2' & 0 & -\alpha_2 W \end{bmatrix} \leq 0, \quad \forall \delta^*, \tilde{\delta}^*, \theta^* \in \Theta^* \quad (41)$$

$$\begin{bmatrix} Q & QC' \\ CQ & S^{-1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (42)$$

ここで、 Ω, Π_1, Π_2 は次式で表される。

$$\begin{aligned} \Omega &= QA'(\delta^*) + A(\delta^*)Q \\ &\quad + (\alpha_1(\delta^*, \tilde{\delta}^*, \theta^*) + \alpha_2(\delta^*, \tilde{\delta}^*, \theta^*))Q \\ &\quad - X'(\tilde{\delta}^*, \theta^*)B'(\delta^*) - B(\delta^*)X(\tilde{\delta}^*, \theta^*) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \bar{A}(\theta^*) - A(\delta^*) \\ &\quad - B(\delta^*)B(\tilde{\delta}^*)^+(\bar{A}(\theta^*) - A(\delta^*)) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\Pi_2 = \bar{B}(\theta^*) - B(\delta^*)B(\tilde{\delta}^*)^+\bar{B}(\theta^*) \quad (45)$$

これら $Q, X(\tilde{\delta}, \theta)$ に対し、 $F(\tilde{\delta}, \theta)$ を次で定義する。

$$F(\tilde{\delta}, \theta) = X(\tilde{\delta}, \theta)Q^{-1} \quad (46)$$

このとき、拡大系 $\Sigma_a(\delta, \theta)$ と状態フィードバックコントローラ $K(\tilde{\delta}, \theta)$ から構成される閉ループ系 $\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta)$ の出力可到達集合 $\mathcal{R}_z(\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta))$ は、次の条件を満たす。

$$\mathcal{R}_z(\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta)) \subset \mathcal{E}(S), \quad \forall \delta, \tilde{\delta}, \theta \in \Theta \quad (47)$$

(証明) (19) 式の条件のもとで $\bar{P}$ について (40) 式が成立していることから、定理 1 ($p=1$) より規範モデルの状態可到達集合 $\mathcal{R}_x(\bar{\Sigma}(\theta))$ は (22) 式の条件

$$\mathcal{R}_x(\bar{\Sigma}(\theta)) \subset \mathcal{E}(\bar{P}), \quad \forall \theta \in \Theta \quad (48)$$

を満たす。したがって、 $\bar{x}$ および r は (39) 式の条件

$$\bar{x}(t) \in \mathcal{E}(\bar{P}), \quad r(t) \in \mathcal{E}(W), \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (49)$$

を満たす。ここで、制御対象 $\Sigma(\delta)$ と規範モデル $\bar{\Sigma}(\theta)$ の状態偏差 e_x および出力偏差 e_y に関する微分方程式が (37), (38) 式で与えられること、(46) 式より $X(\tilde{\delta}, \theta) = F(\tilde{\delta}, \theta)Q$ であるから (41) 式における Ω が

$$\begin{aligned} \Omega &= QA' + AQ \\ &\quad + (\alpha_1(\delta^*, \tilde{\delta}^*, \theta^*) + \alpha_2(\delta^*, \tilde{\delta}^*, \theta^*))Q \end{aligned} \quad (50)$$

と表現されることに注意する。このとき、(41), (42) 式の行列不等式条件が成立していることから、定理 2 ($p=2$) より閉ループ系 $\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta)$ の出力可到達集合 $\mathcal{R}_z(\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta))$ は次の条件を満たす。

$$\mathcal{R}_z(\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta)) \subset \mathcal{E}(S), \quad \forall \delta, \tilde{\delta}, \theta \in \Theta \quad (51)$$

□

(注意 2) 第 1 節「はじめに」で述べたように、本論文は初期状態の偏差に起因する出力の追従誤差ではなく、制御対象の不確かさに起因する出力の追従誤差に注目したモデル規範制御系の設計を主題としている。し

かしながら、実システムへの適用を考えた場合、初期値の偏差に対する何らかの意味での保証が必要であると考えられる。制御対象と規範モデルの初期状態に偏差が存在することは、(37) 式において $e_x(0)$ が $e_x(0) \neq 0$ である場合に相当する。定理 3 に基づいた設計法では、 $e_x(0) \in \mathcal{E}(Q^{-1})$ の場合、出力偏差 e_y は $\mathcal{E}(S)$ の内部に留まり、また、 $e_x(0) \notin \mathcal{E}(Q^{-1})$ の場合でも、 e_y は発散しないことが保証される。この理由については、付録 2 の (注意 6) を参照のこと。

4. 数値例

4.1 制御対象

(15), (16) 式に示した制御対象 $\Sigma(\delta)$ の状態変数表現において、 $A(\delta(t))$, $B(\delta(t))$ および C 行列を次で与える。

$$\begin{aligned} A(\delta) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(\delta) & -a_1(\delta) \end{bmatrix}, \quad B(\delta) = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0(\delta) \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ a_0(\delta) &= 0, \quad a_1(\delta) = 15.3 + 13.3\delta_1 \\ b_0(\delta) &= (15.3 + 13.3\delta_1)(0.90 + 0.20\delta_2) \end{aligned} \quad (52)$$

ここで、 $\delta = [\delta_1 \ \delta_2]'$ は時変なパラメータ変動を表し、クラス Θ に属しているものとする。

なお、この制御対象は小型の造波実験装置における造波板駆動機構 [9] をモデル化したものである。

(注意 3) この制御対象の特性の直感的理解を与えるため、パラメータ δ を時不変なものとして制御対象を伝達関数を用いて表現すると次のようになる。

$$P(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{k}{\tau s + 1} \quad (53)$$

ここで、 τ および k はそれぞれ δ_1 , δ_2 に対応するパラメータで、 $0.035 \leq \tau \leq 0.065$, $0.90 \leq k \leq 1.10$ を満たす。

4.2 規範モデル

(17), (18) 式に示した規範モデル $\bar{\Sigma}(\theta)$ の状態変数表現において、 $\bar{A}(\theta(t))$, $\bar{B}(\theta(t))$ 行列を次で与える。

$$\begin{aligned} \bar{A}(\theta) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\bar{a}_0(\theta) & -\bar{a}_1(\theta) \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{b}_0(\theta) \end{bmatrix} \\ \bar{a}_0(\theta) &= 2.0 + 8.0\theta \\ \bar{a}_1(\theta) &= 3.0 + 4.0\theta \\ \bar{b}_0(\theta) &= 2.0 + 8.0\theta \end{aligned} \quad (54)$$

ここで、 θ は操作可能なパラメータを表し、クラス Θ に属しているものとする。また、 $\bar{\Sigma}(\theta)$ における規範入力 r は次を満たすものとする。

$$|r(t)| \leq 15, \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (55)$$

この r は、 $W = 1/15^2$ に対して (19) 式の条件を満たすものである。

(注意 4) この規範モデルの特性の直感的理解を与え

るため、パラメータ θ を時不変なものとして規範モデルを伝達関数を用いて表現すると次のようになる。

$$\bar{P}(s) = \frac{1}{(0.5s+1)(\tau s+1)} \quad (56)$$

ここで、 τ は θ に対応するパラメータで、 $0.2 \leq \tau \leq 1.0$ を満たす。

4.3 閉ループ系の極に対する仕様

現実に制御系をデジタルコントローラにより実装する場合には、そのサンプリングタイムに応じて閉ループ系の極の大きさを制限する必要がある。そこで本数値例においては、提案手法の有効性を補償器の実現可能性を考慮した形で検証するために、3.4の仕様に加え、任意の $\delta^*, \tilde{\delta}^*, \theta^* \in \Theta^*$ に対する閉ループ系 $\Sigma_c(\delta^*, \tilde{\delta}^*, \theta^*)$ の極が Fig. 3 の斜線領域内に存在することを要求する。そのうえで、 $\mathcal{E}(S)$ で与えられる $\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta)$ の出力可到達集合の上限を可能な限り小さくすることとする。

Fig. 3 Region for pole placement

4.4 コントローラの計算

3.6の手順に従い、状態フィードバックコントローラ $K(\tilde{\delta}, \theta)$ における $H(\tilde{\delta}, \theta)$ および $G(\tilde{\delta}, \theta)$ を次のように決定する。

$$H(\tilde{\delta}, \theta) = b_0(\tilde{\delta})^{-1} \bar{b}_0(\theta) \quad (57)$$

$$G(\tilde{\delta}, \theta) = b_0(\tilde{\delta})^{-1} [a_0(\tilde{\delta}) - \bar{a}_0(\theta) \quad a_1(\tilde{\delta}) - \bar{a}_1(\theta)] \quad (58)$$

このとき、(31), (32) 式に示した閉ループ系 $\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta)$ の状態変数表現における A, Π_1, Π_2 は次で与えられる。

$$A = A(\delta) - B(\delta)F(\tilde{\delta}, \theta) \quad (59)$$

$$\Pi_1 = \bar{A}(\theta) - A(\delta) - b_0(\delta)b_0(\tilde{\delta})^{-1}(\bar{A}(\theta) - A(\delta)) \quad (60)$$

$$\Pi_2 = \bar{B}(\theta) - b_0(\delta)b_0(\tilde{\delta})^{-1}\bar{B}(\theta) \quad (61)$$

$F(\tilde{\delta}, \theta)$ は、定理 3 の設計条件と極を指定領域に配置するための LMI 条件 [8] とをあわせて設計を行う。設計計算にはパラメータ依存行列不等式を用いることになるが、計算を簡単にするため、実数関数 $\bar{\alpha}(\theta^*)$ については $\bar{\alpha}_0 \geq 0$, $\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 \geq 0$ を満たす実数 $\bar{\alpha}_0$, $\bar{\alpha}_1$ により次で定義する。

$$\bar{\alpha}(\theta^*) = \bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 \theta^* \quad (62)$$

α_1, α_2, X についてはパラメータに依存しないものとする。また、 $b_0(\delta^*)b_0(\tilde{\delta}^*)^{-1}$ に関しては、その値域を考慮し、次に示す ρ^* の関数と置き換える。

$$\tilde{b}(\rho^*) = 0.43 + 1.86\rho^*, \quad \rho^* \in [0, 1] \quad (63)$$

閉ループ系の極に対する仕様に関する LMI 条件は、

$$Z = A(\delta^*)Q - B(\delta^*)X \quad (64)$$

$$p_1 = -250, p_2 = 1/2 \quad (65)$$

とすると次で記述できる。

$$2p_1 I - Z - Z' < 0 \quad (66)$$

$$\begin{bmatrix} p_2(Z + Z') & Z - Z' \\ Z' - Z & p_2(Z + Z') \end{bmatrix} < 0 \quad (67)$$

パラメータ依存行列不等式条件の解法 [6, 7] に基づいた計算の結果、定理 3 の条件を満たす F, S として次を得た。

$$F = XQ^{-1} = \begin{bmatrix} 337 & 8.37 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$S = 1.77 \quad (69)$$

したがって、(57), (58), (68) 式に示したフィードバックゲインを用いるとき、閉ループ系 $\Sigma_c(\delta, \tilde{\delta}, \theta)$ の出力可到達集合に関して (47) 式が成立する。すなわち、(55) 式を満たす任意の規範入力 r , クラス Θ に属するパラメータ $\delta, \tilde{\delta}, \theta$ の任意の変動・操作に対して、閉ループ系の出力 (規範モデルと制御対象の出力偏差) e_y は次を満たす。

$$|e_y(t)| < 0.752, \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (70)$$

(注意 5) 提案手法の有効性を確認するために我々が計算したいくつかの数値例 (本節における数値例も含む) では、極配置に関する制限を外した場合、得られる出力偏差の上限がより小さくなることを確認した。

4.5 シミュレーション

前項までで設計した制御系を用いたシミュレーション結果を示す。

Fig. 4 は、規範モデルの調整パラメータである θ の値を $\theta = 0.0, 0.2, 1.0$ と変えて与えた場合の規範モデルの出力 $\bar{y}$ をそれぞれ示したものである。規範入力 r (点線) には、周期 10 秒、振幅 15 のパルス信号を与えた。Fig. 4 より、規範モデルの速応性が、パラメータ θ により調整できていることがわかる。

Fig. 5 は、規範モデルと制御対象の出力偏差 e_y を示したものである。規範入力 r として周期 10 秒、振幅 15 のパルス信号を与え、制御対象の変動パラメータ δ とコントローラの調整パラメータ $\tilde{\delta}$ はそれぞれ次のように与えた。

- (1) $\delta = [0 \ 0]'$, $\tilde{\delta} = [1 \ 1]'$
- (2) $\delta = [0 \ 0]'$, $\tilde{\delta} = [0.5 \ 0.5]'$
- (3) $\delta = [0 \ 0]'$, $\tilde{\delta} = [0.2 \ 0.2]'$

Fig. 4 Output of reference model

(4) Fig. 6 に示す

(1)–(4) のそれぞれの場合について、規範モデルの調整パラメータ θ を $\theta = 0, 0.2, 1$ と変えてシミュレーションを行った。Fig. 5(a)–(c) に示した (1)–(3) の場合の結果より、 $\tilde{\delta}$ の値が δ の値に近いほど出力偏差 e_y が小さくなっていることが確認できる。これは $\tilde{\delta}$ の操作によってコントローラの調整が可能であることを示している。Fig. 5(d) に示した (4) の場合の結果も含めると、 e_y は (70) 式の条件を満たしており、さらにパラメータの調整が不十分な場合でも十分小さく抑えられているといえる。

5. おわりに

本論文では、時変なパラメータ変動を持つ線形システムを対象に、オンラインで操作可能なパラメータを有するモデル規範制御系の設計について考察し、その有効性を数値例により検証した。

制御系設計においては、性能指標としてモデル規範制御系に対する出力可到達集合を用い、設計条件をパラメータ依存行列不等式により記述した。本論文では、未知パラメータの推定値に相当するパラメータの調整法について、具体的な検討はおこなっていないが、数値例として設計した制御系においては、パラメータの調整が不完全な場合でも出力の偏差を十分小さく抑えることができた。

なお、本論文が提案した制御系の更なる性能向上を図るために、パラメータ調整法の具体的な検討が今後の課題としてあげられる。

最後に、本研究に対し有益な助言を頂きました大阪大学の池田雅夫先生、浅井徹先生に感謝致します。

参考文献

- [1] 大森, 佐野: 適応制御理論の発展; 計測と制御, Vol. 32, No. 12, pp. 981–989 (1993)
- [2] 大森, 宮里: 適応制御理論の潮流; システム/制御/情報, Vol. 42, No. 6, pp. 287–299 (1998)
- [3] R. V. Monopoli: Model reference adaptive control with an augmented error signal; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-19, No. 5, pp. 474–484 (1974)

(a) Case (1)

(b) Case (2)

(c) Case (3)

(d) Case (4)

Fig. 5 Output error

Fig. 6 Parameters

- [4] 渡辺, 内田, 藤田: 2次システムに対する状態可到達集合の解析; 計測自動制御学会論文集, Vol. 34, No. 11, pp. 1590-1595 (1998)
- [5] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Valakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM (1994)
- [6] R. Azuma, R. Watanabe, K. Uchida and M. Fujita: A new LMI approach to analysis of linear systems depending on scheduling parameter in polynomial forms; *Automatisierungstechnik*, 48, pp. 199-204 (2000)
- [7] 東, 渡辺, 内田: 有限個の LMI 条件によるパラメータ依存 LMI 条件の解法; 第26回 制御理論シンポジウム資料, pp. 223-226 (1997)
- [8] 杉江: ロバスト制御と LMI 表現; システム制御情報学会チュートリアル講座'99 「LMI によるロバスト制御系の解析と設計」, pp. 1-47 (1999)
- [9] 片山, 渡辺: 小型造波装置おける造波機構のモデリングとロバスト制御; 電気学会論文誌 D 分冊, Vol. 121-D, No. 4, pp. 445-452 (2001)

付 録

付録 1. $\mathcal{S}$ -procedure [5]

定理 1, 2 の証明に必要となる $\mathcal{S}$ -procedure について述べる.

$F_0, \dots, F_p$ を $\zeta \in R^n$ に対して次で定義する.

$$F_i(\zeta) = \begin{bmatrix} \zeta \\ 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} T_i & u_i \\ u_i' & v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (A1)$$

$$= \zeta' T_i \zeta + 2u_i' \zeta + v_i, \quad (i=0, \dots, p) \quad (A2)$$

ただし, $T_i = T_i'$ であるものとする.

【補題 1】 ($\mathcal{S}$ -procedure) $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$ が存在して次を満たしているとする.

$$F_0(\zeta) - \sum_{i=1}^p \tau_i F_i(\zeta) \geq 0, \quad \forall \zeta \quad (A3)$$

このとき次が成立する.

$$F_0(\zeta) \geq 0, \quad \forall \zeta \text{ s.t. } F_i(\zeta) \geq 0, \quad (i=1, \dots, p) \quad (A4)$$

(証明) $F_i(\zeta) \geq 0, (i=1, \dots, p)$ を満たす任意の ζ に対して次が成立することより明らか.

$$F_0(\zeta) \geq \sum_{j=1}^p \tau_j F_j(\zeta) \geq \tau_i F_i(\zeta) \geq 0 \quad (A5)$$

□

付録 2. 定理 1 の証明

(証明) $\Sigma_x(\theta)$ の状態 x に対し, 二次形式 $V(x) = x' P x$, $P > 0$ を定義する. このとき,

$$V(x) \geq 1, \quad w_i' W_i w_i \leq 1, \quad (i=1, \dots, p) \quad (A6)$$

を満たすすべての $x, w = [w_1' \ w_2' \ \dots \ w_p']'$ に対して

$$\dot{V}(x, w) \leq 0 \quad (A7)$$

が成立すれば, $\Sigma_x(\theta)$ の状態可到達集合は (5) 式の条件

$$\mathcal{R}_x(\Sigma_x(\theta)) \subset \mathcal{E}(P), \quad \forall \theta \in \Theta \quad (A8)$$

を満たす. そこで, 関数 $F_0(\xi), F_1(\xi), \dots, F_p(\xi), F_{p+1}(\xi)$ を次で定義する.

$$F_0(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} (*) & PB \\ B'P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (A9)$$

$$(*) = A'(\theta^*)P + PA(\theta^*)$$

$$F_1(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} - 1 \quad (A10)$$

$$(*) = \text{diag}(W_1, 0, \dots, 0)$$

$$F_2(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} - 1 \quad (A11)$$

$$(*) = \text{diag}(0, W_2, 0, \dots, 0)$$

$\vdots$

$$F_p(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} - 1 \quad (A12)$$

$$(*) = \text{diag}(0, \dots, 0, W_p)$$

$$F_{p+1}(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + 1 \quad (A13)$$

このとき, (A6) 式の条件を満たすすべての x, w に対して (A7) 式が成立するための条件は次式により記述できる.

$$F_0(\xi) \leq 0, \quad \forall \xi, \theta^* \in \Theta^* \quad (A14)$$

$$\text{s.t. } F_i(\xi) \leq 0, \quad (i=1, 2, \dots, p+1)$$

補題 1 より, (A14) 式が成立するための十分条件は $\alpha_1(\theta^*), \alpha_2(\theta^*), \dots, \alpha_p(\theta^*) \geq 0$ が存在して次を満たすことである.

$$F_0(\xi) - \alpha_1(\theta^*)F_1(\xi) \cdots - \alpha_p(\theta^*)F_p(\xi) - \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j(\theta^*) \right] F_{p+1}(\xi) \leq 0, \forall \xi, \theta^* \in \Theta^* \quad (\text{A15})$$

F_i の定義より, (A15) 式は次のように表される.

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} (*) & PB \\ B'P & (**) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \leq 0, \forall \xi, \theta^* \in \Theta^* \quad (\text{A16})$$

$$(*) = A'(\theta^*)P + PA(\theta^*) + \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j(\theta^*) \right] P$$

$$(**) = \text{diag}(-\alpha_1(\theta^*)W_1, \dots, -\alpha_p(\theta^*)W_p)$$

(A16) 式が (4) 式の条件と等価であることから, 定理の結論を得る. $\square$

(注意 6) 定理 1 の証明で構成した $V(x)$ は, (A6) 式を満たす任意の x, w に対して (A7) 式を満たす. したがって, $x(0) \neq 0$ である初期状態に対しても, $x(0) \in \mathcal{E}(P)$ であればシステムの状態は $\mathcal{E}(P)$ の内部に留まる. また, $x(0) \notin \mathcal{E}(P)$ の場合でも, システムの状態が発散することはない.

付録 3. 定理 2 の証明

(証明) まず, $S > 0$ および定理 1 の条件を満たす P に対して関数 $F_0(\xi)$, $F_1(\xi)$ を次で定義する.

$$F_0(\xi) = \xi' C' S C \xi - 1 \quad (\text{A17})$$

$$F_1(\xi) = \xi' P \xi - 1 \quad (\text{A18})$$

このとき, 次の条件

$$F_0(\xi) - F_1(\xi) \leq 0, \quad \forall \xi \quad (\text{A19})$$

が成立すれば補題 1 より

$$(C\xi)' S (C\xi) \leq 1, \quad \forall \xi, \text{ s.t. } \xi' P \xi \leq 1 \quad (\text{A20})$$

が成立し, (12) 式の条件が満たされる. (A19) 式の条件は次のように表される.

$$\xi' (C' S C - P) \xi \leq 0, \quad \forall \xi \quad (\text{A21})$$

(A21) 式の条件は Schur Complement により次の行列不等式として表現することができる.

$$\begin{bmatrix} P & C' \\ C & S^{-1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{A22})$$

ここで, (A22) 式の両側から $\text{diag}(P^{-1}, I)$ を掛け $P^{-1} = Q$ とすると (11) 式を得る. $\square$