配位空間上の交叉理論とその応用—II —局所交叉数と零多様体の射影次元*

榎本 隆二[†]・島 公脩[‡]

Intersection Theory on Configuration Spaces and its Applications — II

— Local Intersection Numbers and Projective Dimensions of Null Manifolds*

Ryuji ENOMOTO[†] and Masasuke SHIMA[‡]

This paper is concerned with global control problems for time-independent nonlinear state equations from a view point of an intersection theory on “configuration spaces of control systems”. In this paper, we show a relationship between parity of Morse indices of hyperbolic points on a controlled system and local intersection numbers of an input manifold and a null manifold. We also discuss this result for cases that the closure of a null manifold has self-intersections or intersections to the closure of other unit components. Moreover, we define the projective dimension of the null manifold to discuss the assignability of hyperbolic points on controlled systems.

1. はじめに

本論文は、時不変非線形状態方程式に対する大域的フィードバック制御を制御系の配位空間 [2–4] における交叉理論を中心として論じて、Morse-Smale 制御系の genericity の問題 [5] とそれに関連した検討を進めてゆく一連の論文の第二論文である。

本論文では、議論を状態フィードバック系に限定して、零多様体と入力多様体の局所交叉数および零多様体の射影次元という概念を定義して配位空間における交叉理論を展開する。第一論文 [5] では、零多様体上の各点で不可制御極が虚軸上に存在せず、状態方程式の零点集合がほとんど単純であれば、制御された系の定数解がすべて双曲点であるような制御則の集合は制御則全体の集合の中で開かつ稠密な部分集合を形成している、という結果を得た。本論文では、それらの双曲点に対して

- (i) われわれが望む特性を与え得るか、
- (ii) われわれが指定した位置に配置できるか、

という問題を取り扱う（ここで、虚軸上に固有値を持たないベクトル場の特異点を双曲点という）。

本書の構成は以下のとおりである：

2. において本書で用いる用語や記号に関しての若干の準備を行った後、**3.** では上記の (i) の問題を取り扱う。微分位相幾何学的な交叉理論の観点からわれわれが着目する双曲点の特性はその Morse 指数 (**2.** 参照) の偶奇性である。**3.1** において入力多様体と零多様体の単位成分の局所交叉数を定義し、**3.2** において制御された系の双曲点の Morse 指数の偶奇性との基本的な関係を調べる。**3.3** ではその結果を制御された系の双曲点が零多様体の単位成分の複数の連結成分にわたる場合や零多様体の単位成分の閉包が自己交叉する場合に拡張する。

4. では上記の (ii) の問題を取り扱う。ここでは、零多様体の射影次元という概念を定義して零多様体と入力多様体の局所的な交叉理論を展開する。そして、われわれが指定した位置に任意の有限個の双曲点を配置できるための条件を検討する。

2. 準備

この節では、参考文献 [5] から本論文において必要となる用語・記号を簡単にまとめる。 $\mathbb{X}$ を制御対象系の n 次元状態空間、 $\mathbb{U}$ を m 次元の入力の空間とし、これらは Riemann 計量をもつ向き付け可能な C^{r+1} 多様体 ($r \geq n+m$) とする。自明なファイバー多様体 $\mathcal{Q}_0$ ：

$$\pi_u : \mathcal{Q}_0 := \mathbb{X} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{X}$$

* 原稿受付 2001 年 7 月 18 日

[†] 鳥羽商船高等専門学校 制御情報工学科 Information and Control Engineering Department, Toba National College of Maritime Technology; 1-1 Ikegamicho, Toba city, Mie Prefecture 517-8501, JAPAN

[‡] 北海道大学大学院 工学研究科 Graduate school of Engineering, Hokkaido University; North 13 West 8 Kita-ku, Sapporo city, Hokkaido 060-8628, JAPAN

Key Words: global control, nonlinear system, configuration space, intersection number, Morse index.

を状態フィードバック系の配位空間, $q = (x, u) \in \mathcal{Q}_0$ を制御系の状態 (配位) という. $x := (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{X}$ は制御対象系の状態変数, $u := (u^1, \dots, u^m) \in \mathbb{U}$ は入力である. 状態フィードバック制御則 $u = k(x)$ の幾何学化:

$$\mathcal{M}_u := \{q \in \mathcal{Q}_0 \mid u - k(x) = 0\}$$

を入力多様体という. 接バンドル $T\mathbb{X}$ の $\mathcal{Q}_0$ 上への引き戻しを $(\pi_u)^{-1}T\mathbb{X}$ とする. $C^r(\circ, \bullet)$ を $\circ$ から $\bullet$ への C^r 級の写像の集合とする. C^r 級の状態方程式

$$\dot{x} = f(x, u), \quad f = (f^1, \dots, f^n) \in C^r(\mathbb{X} \times \mathbb{U}, \mathbb{R}^n) \quad (1)$$

は $n+m$ 次元多様体 $\mathcal{Q}_0$ 上の n 次元ベクトルバンドル $(\pi_u)^{-1}T\mathbb{X}$ の C^r 級の断面 $f \in \Gamma^r((\pi_u)^{-1}T\mathbb{X})$ を定める. ただし, $\Gamma^r(\circ)$ でファイバー多様体またはベクトルバンドル $\circ$ の C^r 級の断面の集合を表す. $\ker(f) := f^{-1}(0)$ を f の零点集合とし, この写像 f の正則点の集合

$$K_0^n(f) := \{q \in \mathcal{Q}_0 \mid \dim \mathbb{R}^n - \text{rank}_q(f) = 0\}$$

との交わり $\mathcal{N}_x := \ker(f) \cap K_0^n(f)$ を (1) 式の零多様体という. ただし, $J(f)(q)$ を f の点 q における Jacobi 行列として, $\text{rank}_q(f) := \text{Rank } J(f)(q)$ と表す.

$\text{cl}(\diamond)$ を集合 $\diamond$ の閉包, $\text{Imm}^r(\circ, \bullet)$ を $\circ$ から $\bullet$ への C^r 級のはめ込みの集合とする. $\mathcal{N}_x$ に $\mathcal{Q}_0$ の位相から誘導される相対位相を入れておく. $\mathcal{N}_x$ の任意個の連結成分の和 $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ に対してある連結な m 次元 C^r 多様体 $\mathcal{K}_\lambda$ と C^r 級のはめ込み $\varphi \in \text{Imm}^r(\mathcal{K}_\lambda, \mathcal{Q}_0)$ が存在して $\text{cl}(\varphi(\mathcal{K}_\lambda)) = \text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ を満たすものとする. そのとき, $\text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ がこの性質を満たす $\ker(f)$ の部分集合として極大のものであれば, 連結成分の和 $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ を $\mathcal{N}_x$ の単位成分という. 単位成分 $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ について $\ker(f_\lambda) = \text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ なる写像 $f_\lambda = (f_\lambda^1, \dots, f_\lambda^n) \in C^r(\mathcal{Q}_0, \mathbb{R}^n)$ が

$$\ker(f_\lambda^1) \subset \ker(f^1), \dots, \ker(f_\lambda^n) \subset \ker(f^n) \quad (2)$$

を満たすならば, これを $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の大域定義写像という. (2) 式に現れる $\ker(f^i), i=1, \dots, n$ を (1) 式の i 座標に関する半休止集合とよぶ. $\mathfrak{X}^r(\circ)$ を多様体 $\circ$ 上の C^r 級のベクトル場の集合とする. 図式:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} (x, u; v) \\ (\pi_u)^{-1}T\mathbb{X} \end{array} & \xrightarrow{\pi_u^*} & \begin{array}{c} (x; v) \\ T\mathbb{X} \end{array} \\ f \uparrow & & \uparrow \tilde{\sigma} \\ \mathcal{Q}_0 & \xleftarrow{k} & \mathbb{X} \\ (x, u) & & (x) \end{array} \quad (3)$$

を可換とする $T\mathbb{X}$ の断面 $\tilde{\sigma}$ を制御された系とよぶ. π_u の $\mathcal{M}_u$ への制限を $\varpi_u := \pi_u|_{\mathcal{M}_u}$ とするとき, 制御された系 $\tilde{\sigma}$ は $\sigma := \tilde{\sigma} \circ \varpi_u = f|_{\mathcal{M}_u} \in \mathfrak{X}^r(\mathcal{M}_u)$ と同一視できる.

$\bar{q} \in \mathcal{M}_u$ が制御された系の双曲点ならば, $\bar{q}$ は $\mathcal{M}_u$ と $\mathcal{N}_x$ の横断的交点である. 双曲点 $\bar{q}$ の不安定多様体の次元 k をその Morse 指数という. 双曲点の Morse 指数は

その双曲点の不安定固有値の数と一致する (重複を含める). Morse 指数 k の双曲点を Σ^k で表す [1].

状態方程式 (1) 式の零点集合が $\ker(f) = \mathcal{N}_x$ を満たせば単純であるといい, $\ker(f) = \text{cl}(\mathcal{N}_x)$ を満たせばほとんど単純であるという. 以下, 本論文を通して状態方程式の零点集合はほとんど単純であると仮定する.

なお, 本論文では以下の記号を断りなく用いる. A を集合, $B \subset A$ をその部分集合として $A \setminus B := \{a \in A \mid a \notin B\}$ は集合差を表す. V をベクトル空間, W をその部分空間として $W^\perp$ は V における W の直交補空間を表す. $\cong$ はベクトル空間の同型, $\oplus$ はベクトル空間の直和を表す. 多様体 Y の二つの部分多様体を A, B とするとき, A が B に Y において横断的である (参考文献 [5] 付録参照) ことを, $A \pitchfork B$ in Y と表す. また, 交点 $\bar{y} \in A \cap B$ において A が B に横断的ならば $A \pitchfork_{\bar{y}} B$ in Y と表す.

3. 零多様体と入力多様体の局所交叉数

ここでは制御された系の双曲点の Morse 指数の偶奇性と零多様体・入力多様体の交叉との関係を検討する.

3.1 局所交叉数と隣り合う交点

この小節では, いくつかの用語を定義して 3.2 と 3.3 の準備を行う. $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ を零多様体のある単位成分, その大域定義写像を $f_\lambda \in C^s(\mathcal{Q}_0, \mathbb{R}^n)$ とする. $\mathcal{M}_u$ と $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ は, $\mathcal{Q}_0$ において有限 L 個の点 $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_L \in \mathcal{M}_u \cap \mathcal{N}_{x:\lambda}$ で横断的に交わっているものとする:

$$\mathcal{M}_u \pitchfork_{\bar{q}_i} \mathcal{N}_{x:\lambda} \text{ in } \mathcal{Q}_0, \quad i=1, \dots, L$$

$\iota: \mathcal{M}_u \rightarrow \mathcal{Q}_0$ を標準的な埋め込みとして, $\mathcal{M}_u$ と像 $\iota(\mathcal{M}_u)$ を同一視する. $\mathcal{Q}_0$ および $\mathcal{M}_u$ の向き $\langle \mathcal{Q}_0 \rangle$ および $\langle \mathcal{M}_u \rangle$ を固定しておく (付録 1. 参照). 単位成分 $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の各連結成分 $\mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ には, 単位成分ごとに固定された $\text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ の向きから定まるひとつの向き $\langle \mathcal{N}_{x:\lambda}^k \rangle$ を入れておく. $\nu(\mathcal{N}_{x:\lambda}) := (T\mathcal{Q}_0|_{\mathcal{N}_{x:\lambda}})/T\mathcal{N}_{x:\lambda}$ を $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の $\mathcal{Q}_0$ における法バンドル [8] とする (参考文献 [5] 付録参照).

$\dim \mathcal{M}_u = n$ かつ $\dim \mathcal{N}_{x:\lambda} = m$ なるふたつの部分多様体に関する横断性の定義から, 任意の $\bar{q}_i \in \mathcal{M}_u \cap \mathcal{N}_{x:\lambda}$ に対して, つぎのベクトル空間の系列:

$$T_{\bar{q}_i} \mathcal{M}_u \xrightarrow{T_{\bar{q}_i} \iota} T_{\bar{q}_i} \mathcal{Q}_0 \xrightarrow{\varpi_{\bar{q}_i}} \nu_{\bar{q}_i}(\mathcal{N}_{x:\lambda}) \quad (4)$$

における線型写像 $\varpi_{\bar{q}_i} \circ T_{\bar{q}_i} \iota$ は線型同型である [7]. ここで $\varpi_{\bar{q}_i}$ は標準的全射である.

【定義 1】 線型同型 $\varpi_{\bar{q}_i} \circ T_{\bar{q}_i} \iota$ が $\mathcal{M}_u$ の向きを保てば $(\mathcal{M}_u \circ \mathcal{N}_{x:\lambda})_{\bar{q}_i} = 1$, 逆ならば $(\mathcal{M}_u \circ \mathcal{N}_{x:\lambda})_{\bar{q}_i} = -1$ と定義して, 交点 $\bar{q}_i \in \mathcal{M}_u \cap \mathcal{N}_{x:\lambda} \subset \mathcal{Q}_0$ における $\mathcal{M}_u$ と $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の局所交叉数とよぶ. また, 局所交叉数の和

$$\mathcal{M}_u \circ \mathcal{N}_{x:\lambda} := \sum_{i=1}^L (\mathcal{M}_u \circ \mathcal{N}_{x:\lambda})_{\bar{q}_i} \quad (5)$$

を $\mathcal{Q}_0$ における $\mathcal{M}_u$ と $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の交叉数とよぶ [7].

(4) 式の代わりに任意の横断的な交点 $\bar{q}_i \in \mathcal{M}_u \cap \mathcal{N}_{x:\lambda}$ においてつぎのベクトル空間の短完全系列：

$$0 \longrightarrow (T_{\bar{q}_i} \mathcal{M}_u)^\perp \xrightarrow{T_{\bar{q}_i} \iota} T_{\bar{q}_i} \mathcal{Q}_0 \longrightarrow (T_{\bar{q}_i} \mathcal{N}_{x:\lambda})^\perp \longrightarrow 0$$

の分裂 $(T_{\bar{q}_i} \mathcal{M}_u)^\perp \oplus (T_{\bar{q}_i} \mathcal{N}_{x:\lambda})^\perp \cong T_{\bar{q}_i} \mathcal{Q}_0$ を用いる．この系列に現れる直交補空間 $(T_{\bar{q}_i} \mathcal{M}_u)^\perp$ および $(T_{\bar{q}_i} \mathcal{N}_{x:\lambda})^\perp$ は $\{\partial_q f_\lambda^1(\bar{q}_i), \dots, \partial_q f_\lambda^n(\bar{q}_i)\}$ および $\{\partial_q(u^1 - k^1)(\bar{q}_i), \dots, \partial_q(u^m - k^m)(\bar{q}_i)\}$ で張られることから，点 $\bar{q}_i$ における $\mathcal{M}_u$ と $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の局所交叉数は， $n+m$ 次正方行列：

$$J(F_\lambda)(\bar{q}_i) := \begin{bmatrix} \partial_q f_\lambda(\bar{q}_i) & \partial_u f_\lambda(\bar{q}_i) \\ -\partial_x k(\bar{q}_i) & I_m \end{bmatrix} \quad (6)$$

の行列式の符号によっても判定できる．ただし， $F_\lambda := (f_\lambda, u - k)$ ， I_m は m 次単位行列， $\partial_\diamond := \partial/\partial \diamond$ である．

単位成分の定義から， $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ に対してある連結な m 次元 C^r 多様体 $\mathcal{K}_\lambda$ と C^r はめ込み $\varphi \in \text{Imm}^r(\mathcal{K}_\lambda, \mathcal{Q}_0)$ が存在して $\text{cl}(\varphi(\mathcal{K}_\lambda)) = \text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ を満たす． $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ を単位区間， $\mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ および $\mathcal{N}_{x:\lambda}^h$ を $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の異なる連結成分とする．そのとき， $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の異なる 2 点 $\bar{q}_i$ と $\bar{q}_j$ を結ぶ $\text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ における C^r 級の道 $\gamma \in C^r([0, 1], \text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda}))$ が単純であるとは，もし $\gamma(t) \in \text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda}) \setminus \mathcal{N}_{x:\lambda}$ なる $t \in [0, 1]$ が存在するならば，対応する点 $\varphi^{-1}(\gamma(t)) \in \mathcal{K}_\lambda$ (複数存在する場合を許す) の開近傍 U_t が存在して， $\varphi(p) \in \mathcal{N}_{x:\lambda}$ なる各点 $p \in U_t$ に対して $\varphi(p) \in \mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ もしくは $\varphi(p) \in \mathcal{N}_{x:\lambda}^h$ のいずれかが成立することと定義する．ある連結成分 $\mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ の異なる 2 点 $\bar{q}_i$ と $\bar{q}_j$ を $\mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ 上で結ぶ C^r 級の道は $\bar{q}_i$ と $\bar{q}_j$ を結ぶ $\text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ における C^r 級の単純な道であると定義しておく．

【例題 1】 Fig. 1(A) に $m=1$ の場合を例示する．単位成分 $\mathcal{N}_{x:\lambda} = \mathcal{N}_{x:\lambda}^1 \cup \mathcal{N}_{x:\lambda}^2 \cup \mathcal{N}_{x:\lambda}^3 \cup \mathcal{N}_{x:\lambda}^4$ の閉包は自己交叉 q_b をもち，別の単位成分 $\mathcal{N}_{x:\mu} = \mathcal{N}_{x:\mu}^1 \cup \mathcal{N}_{x:\mu}^2$ の閉包との交点 q_a をもつ．ひとつの連結成分上の任意の異なる 2 点は $\text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ における単純な道で結ぶことができる． $\varphi \in \text{Imm}^r(\mathcal{K}_\lambda, \mathcal{Q}_0)$ と $\mathcal{K}_\lambda$ を単位成分 $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ を定義するはめ込みと 1 次元多様体とする． q_b に対して $\varphi^{-1}(q_b)$ なる点は $\mathcal{K}_\lambda$ 上に 2 点現れる． $\text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ の C^r 級の道が $\mathcal{N}_{x:\lambda}^2$ から q_b を通過する際に $\mathcal{K}_\lambda$ 上に現れる点の開近傍を U_t とする． $\varphi(U_t) \subset \text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ 上の点 q が $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ 上に存在すれば，その点は $\mathcal{N}_{x:\lambda}^2$ か $\mathcal{N}_{x:\lambda}^3$ に属するから， $\mathcal{N}_{x:\lambda}^2$ と $\mathcal{N}_{x:\lambda}^3$ の任意の点は $\text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ における単純な道で結ぶことができる．しかし， $\mathcal{N}_{x:\lambda}^2$ の点と $\mathcal{N}_{x:\lambda}^4$ の点は単純な

Fig. 1 (A) Simple path and (B) adjacent points on the unit component of a null manifold

道で結べない．■

【定義 2】 $\mathcal{M}_u$ と $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の二つの横断的な交点 $\bar{q}_i$ と $\bar{q}_j$ がつぎの条件 (i), (ii) を満たすならば， $\bar{q}_i$ と $\bar{q}_j$ は $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ において互いに隣り合っているという：

- (i) $(\mathcal{M}_u \circ \mathcal{N}_{x:\lambda})_{\bar{q}_i} = -(\mathcal{M}_u \circ \mathcal{N}_{x:\lambda})_{\bar{q}_j}$,
- (ii) $\text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ における $\bar{q}_i$ と $\bar{q}_j$ を結ぶ C^r 級の単純な道 $\gamma \in C^r([0, 1], \text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda}))$ であって他の交点 $\bar{q} \in \mathcal{M}_u \cap \text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ を含まない道が存在する．■

【例題 2】 Fig. 1 (B) に $m=2$ の場合を例示する． $\mathcal{M}_u$ を 1 次元として図示したが，高次元でもかまわない．この図に現れた $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の七つの単位成分を分ける各線分は別の単位成分の閉包と $\text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ との交わりあるいは $\text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ の自己交叉とする．連結成分 $\mathcal{N}_{x:\lambda}^1$ と $\mathcal{N}_{x:\lambda}^2$ 上の交点 q_1, q_3 における局所交叉数と q_2, q_4 における局所交叉数は互いに反対の符号を持つ． q_1, q_2, q_3, q_4 は互いに $\text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ 上の単純な道で結ぶことができる．したがって， q_1 と q_2 ， q_1 と q_4 ， q_3 と q_2 ， q_3 と q_4 は $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ 上の隣り合う交点である． q_1 と q_6 ， q_5 と q_7 は局所交叉数の符号は互いに反対であるがそれらを単純な道で結べないことから隣り合う交点ではない．■

3.2 零多様体の連結成分上の双曲点の指数

以下では，隣り合う二つの横断的な交点 $\bar{q}_i, \bar{q}_j \in \mathcal{M}_u \cap \mathcal{N}_{x:\lambda}$ がそのひとつの連結成分 $\mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ 上に存在する場合を考察し，それ以外の場合を 3.3 で検討する．

【補題 1】 $f \in \Gamma^r((\pi_u)^{-1}T\mathbb{X})$ および $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の大域定義写像 $f_\lambda \in C^r(\mathcal{Q}_0, \mathbb{R}^n)$ について，ある連続関数 $\eta_j \in C^{r-1}(\text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda}), \mathbb{R})$, $j=1, \dots, n$ を要素とする対角行列

$$\eta(\bar{q}) = \text{diag}(\eta_1(\bar{q}), \dots, \eta_n(\bar{q})) \in \text{Mat}(n)$$

が存在して， $J(f)(\bar{q}) = \eta(\bar{q}) \cdot J(f_\lambda)(\bar{q})$ と書ける．さらに，任意の連結成分 $\mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ 上の各点 $\bar{q}$ で $\det \eta(\bar{q}) > 0$ もしくは $\det \eta(\bar{q}) < 0$ のいずれか一方が成立する．■

(証明) $J(f_\lambda)(\bar{q})$ および $J(f)(\bar{q})$ の各行ベクトルをそれぞれ $\partial_q f_\lambda^1(\bar{q}), \dots, \partial_q f_\lambda^n(\bar{q})$ および $\partial_q f^1(\bar{q}), \dots, \partial_q f^n(\bar{q})$ と書く．各点 $\bar{q} \in \mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ において

$$\begin{aligned} (T_{\bar{q}} \mathcal{N}_{x:\lambda}^k)^\perp &= \text{span}\{\partial_q f_\lambda^1(\bar{q}), \dots, \partial_q f_\lambda^n(\bar{q})\} \\ &= \text{span}\{\partial_q f^1(\bar{q}), \dots, \partial_q f^n(\bar{q})\} \end{aligned}$$

が成立する．さらに， $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の大域定義写像の定義から，各点 $\bar{q} \in \mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ において

$$\begin{aligned} \text{span}\{\partial_q f_\lambda^1(\bar{q})\} &= \text{span}\{\partial_q f^1(\bar{q})\}, \dots, \\ \text{span}\{\partial_q f_\lambda^n(\bar{q})\} &= \text{span}\{\partial_q f^n(\bar{q})\} \end{aligned}$$

が成立する． $f_\lambda, f \in C^r(\mathcal{Q}_0, \mathbb{R}^n)$ かつ $\ker(f_\lambda) \subset \ker(f)$ であるから， $l=1, \dots, n$ についてあるスカラー関数 $\eta_l(\bar{q}) \in C^{r-1}(\text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda}), \mathbb{R})$ が存在して， $\partial_q f^l(\bar{q}) = \eta_l(\bar{q}) \cdot \partial_q f_\lambda^l(\bar{q})$ と書ける (添え字 l について総和しない)．これより， $J(f)(\bar{q}) = \eta(\bar{q}) \cdot J(f_\lambda)(\bar{q})$ なる表式を得る．各点 $\bar{q} \in \mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ において $J(f)(\bar{q})$ および $J(f_\lambda)(\bar{q})$ は共に行フルランクで

あるから, $\det \eta(\bar{q})$ は正または負の値をとる. $\square$

$\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の連結成分 $\mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ について, つぎが成り立つ:

【定理 1】 ある $\mathcal{M}_u$ に対して, $\bar{q}_i \neq \bar{q}_j$ なる二つの双曲点 $\bar{q}_i, \bar{q}_j \in \mathcal{M}_u \cap \mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ が $\mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ において隣り合っていると仮定する. そのとき, 制御された系の双曲点 $\bar{q}_i$ と $\bar{q}_j$ の Morse 指数の偶奇性は互いに異なる. $\blacksquare$

(証明) f を (1) 式の右辺の写像として $F := (f, u - k)$ とおく. f_λ および f の Jacobi 行列の $\bar{q} \in \mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ での値を $G(\bar{q}) := J(f_\lambda)(\bar{q})$ および $H(\bar{q}) := J(f)(\bar{q})$ とおく. 補題 1 から, ある連続関数 $\eta_l \in C^r(\text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda}^k), \mathbb{R}); l = 1, \dots, n$ を要素とする対角行列 $\eta(\bar{q}) = \text{diag}(\eta_1(\bar{q}), \dots, \eta_n(\bar{q})) \in \text{Mat}(n)$ が存在して, $H(\bar{q}) = \eta(\bar{q})G(\bar{q})$ と書ける. 一方, (6) 式の下半分を $L(\bar{q}) := [-\partial_x k(\bar{q}) \ I_m]$ とおくと,

$$\begin{aligned} J(F)(\bar{q}) &= \begin{bmatrix} H(\bar{q}) \\ L(\bar{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta(\bar{q}) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(\bar{q}) \\ L(\bar{q}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \eta(\bar{q}) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} J(F_\lambda)(\bar{q}) \quad (7) \end{aligned}$$

が成り立つ. もし, 交点 $\bar{q}_i$ と $\bar{q}_j$ が隣り合っていれば

$$(\mathcal{M}_u \circ \mathcal{N}_{x:\lambda}^k)_{\bar{q}_i} = -(\mathcal{M}_u \circ \mathcal{N}_{x:\lambda}^k)_{\bar{q}_j}$$

より, $\det J(F_\lambda)(\bar{q}_i)$ と $\det J(F_\lambda)(\bar{q}_j)$ の符号は互いに異なる. $\bar{q}_i, \bar{q}_j \in \mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ より補題 1 によって $\det \eta(\bar{q}_i)$ と $\det \eta(\bar{q}_j)$ の符号は一致する. (7) 式より $\det J(F)(\bar{q}_i)$ と $\det J(F)(\bar{q}_j)$ は互いに逆の符号をもつ. 双曲点 $\bar{q} \in \mathcal{M}_u \cap \mathcal{N}_x$ における行列式 $\det J(F)(\bar{q})$ は, 制御された系 $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}_u)$ の点 $\varpi_u(\bar{q}) = \bar{x} \in \mathbb{X}$ における Jacobi 行列 $P(\bar{x}) := J(\sigma)(\varpi_u(\bar{q})) = J(\sigma)(\bar{x})$ に関する特性多項式:

$$\begin{aligned} \phi_{P(\bar{x})}(\mu) &= \mu^n + p_{n-1}(\bar{x})\mu^{n-1} + \dots \\ &\quad + p_1(\bar{x})\mu + p_0(\bar{x}) \end{aligned}$$

の項 $p_0(\bar{x})$ と一致する. この $\det J(F)(\bar{q})$ は $\phi_{P(\bar{x})}(\mu)$ の Routh 列の最終行の要素とも一致する. したがって, $\det J(F)(\bar{q})$ の符号が変化すれば, $\bar{q}$ の Morse 指数は偶数から奇数へ, あるいは奇数から偶数へと変化する. $\square$

Morse 指数が 0 を含む偶数の双曲点を Σ^+ , 奇数の場合を Σ^- で表しておく. 定理 1 から, 直ちに つぎの結果が得られる. この結果は 3.3 で詳細に検討する.

【系 1】 制御された系の双曲点 $\bar{q} \in \mathcal{N}_{x:\lambda}^k \cap \mathcal{M}_u$ における局所交点数 $(\mathcal{M}_u \circ \mathcal{N}_{x:\lambda}^k)_{\bar{q}} \in \{1, -1\}$ と $\bar{q}$ の双曲点としての型 $\{\Sigma^+, \Sigma^-\}$ の間には交点の位置によらず $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の各連結成分ごとに定まるひとつの同型対応

$$\theta(\mathcal{N}_{x:\lambda}^k): \{1, -1\} \longrightarrow \{\Sigma^+, \Sigma^-\} \quad (8)$$

が存在する. $\blacksquare$

【例題 3】 支点に入力トルク u の作用する剛体単振子の運動を, 制御開始からの回転回数を問うことなく考察する [3]. すなわち,

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = g \sin x^1 + \zeta x^2 + u$$

を配位空間 $\mathcal{Q}_0 \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ($\approx$ は同相) において考察する. ただし, g, ζ は定数, $\mathbb{S}^1$ は 1-球面 (円) である. この状態方程式の零多様体:

$$\mathcal{N}_x = \{q = (x^1, x^2, u) \in \mathcal{Q}_0 \mid g \sin x^1 + u = 0, x^2 = 0\}$$

は $\mathbb{S}^1$ に同相であり, 任意の $\mathcal{M}_u \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (開円筒) は中空開円盤に同相であるから, $\mathcal{M}_u$ と $\mathcal{N}_x$ の交点数は 0 である. したがって, $\mathcal{M}_u \cap \mathcal{N}_x$ in $\mathcal{Q}_0$ ならば交点の数は 0 または偶数である. $\mathcal{N}_x$ の任意の点で線形化された状態方程式は可制御であるから, Σ^+ および Σ^- は

$$\Sigma^+ = \{\Sigma^0, \Sigma^2\}, \quad \Sigma^- = \{\Sigma^1\}$$

なる集合である. $\mathcal{N}_x$ の連結成分はひとつであるから, 定理 1 より Fig. 2 において $\mathcal{M}_u$ との横断的な交点 q_2 と q_4 , q_1 と q_3 の局所交点数は互いに等しく, それゆえ Morse 指数の偶奇性も等しい. たとえば q_2 と q_4 においてそれが Σ^+ であれば隣り合う交点 q_1 と q_3 にはサドル点 Σ^1 のみが出現する. 適当な $\mathcal{M}_u$ を設計することにより q_2 と q_4 に現れる双曲点は Σ^0 および Σ^2 のいずれにも指定できる. q_2 と q_4 における局所交点数は $\mathcal{N}_x$ の向きの取り方に依存するが, たとえば, 上記の状況においてそれがもし 1 ならば系 1 の同型対応は

$$\theta(\mathcal{N}_x)(1) = \Sigma^+, \quad \theta(\mathcal{N}_x)(-1) = \Sigma^-$$

と定まる. この対応はこの $\mathcal{N}_x$ の各点で同一である. $\blacksquare$

Fig. 2 Local intersection number and Morse index

3.3 零多様体の単位成分上の双曲点の指数

各連結成分 $\mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ には $\langle \text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda}^k) \rangle$ から誘導された向き $\langle \mathcal{N}_{x:\lambda}^k \rangle$ が与えられていることと系 1 の結果を踏まえて つぎを定義しておく:

【定義 3】 写像 $\kappa: \{\Sigma^+, \Sigma^-\} \rightarrow \{1, -1\}$ を

$$\kappa(\Sigma^+) = 1, \quad \kappa(\Sigma^-) = -1 \quad (9)$$

と定めておく. そのとき, 合成写像

$$\Theta(\mathcal{N}_{x:\lambda}^k) := \kappa \circ \theta(\mathcal{N}_{x:\lambda}^k) \quad (10)$$

を Morse 指数の偶奇性に関する連結成分 $\mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ の向き $\langle \mathcal{N}_{x:\lambda}^k \rangle$ の標準化とよぶ. $\blacksquare$

(注意 1) $\text{id}_{\{1, -1\}}$ を集合 $\{1, -1\}$ 上の恒等写像とする. (10) 式の $\Theta(\mathcal{N}_{x:\lambda}^k)$ は $\text{id}_{\{1, -1\}}$ か $-\text{id}_{\{1, -1\}}$ のいずれかである. $\Theta(\mathcal{N}_{x:\lambda}^k) = \text{id}_{\{1, -1\}}$ とすると, $(\mathcal{M}_u \circ \mathcal{N}_{x:\lambda}^k)_{\bar{q}} = 1$

ならば双曲点 $\bar{q}$ の Morse 指数は偶 Σ^+ , -1 ならば奇 Σ^- である. ■

以下, この節では $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の各連結成分において $\Theta(\mathcal{N}_{x:\lambda}^k)$ の値がどのように分布しているかを考察する.

【定義 4】 $\mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ および $\mathcal{N}_{x:\lambda}^h$ を $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の異なる連結成分として, $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda}^k) \cap \text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda}^h) \neq \emptyset$ を満たすものとする. そのとき, ある 2 点 $q_i \in \mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ および $q_j \in \mathcal{N}_{x:\lambda}^h$ を結ぶ $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ における C^r 級の単純な道が存在するならば, $\mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ と $\mathcal{N}_{x:\lambda}^h$ は隣り合っているという. ■

【例題 4】 例題 2 の Fig. 1 (B) において, $\mathcal{N}_{x:\lambda}^1$ と $\mathcal{N}_{x:\lambda}^2$, $\mathcal{N}_{x:\lambda}^1$ と $\mathcal{N}_{x:\lambda}^4$, $\mathcal{N}_{x:\lambda}^4$ と $\mathcal{N}_{x:\lambda}^5$, $\mathcal{N}_{x:\lambda}^4$ と $\mathcal{N}_{x:\lambda}^6$ などは隣り合う連結成分である. $\mathcal{N}_{x:\lambda}^1$ と $\mathcal{N}_{x:\lambda}^3$ などは隣り合う連結成分ではない. ■

$\mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ と $\mathcal{N}_{x:\lambda}^h$ を $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の隣り合うふたつの連結成分とする. 与えられた状態方程式の零点集合がほとんど単純であっても, 危点 $q \in \text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda}^k \cup \mathcal{N}_{x:\lambda}^h) \setminus (\mathcal{N}_{x:\lambda}^k \cup \mathcal{N}_{x:\lambda}^h)$ には様々な型を考え得る [6]. 以下では, つぎの定義 5 および定義 6 に示すある種の横断性条件が満たされている場合を考察する.

$f_\lambda = (f_\lambda^1, \dots, f_\lambda^n), f_\mu = (f_\mu^1, \dots, f_\mu^n) \in C^r(\mathcal{Q}_0, \mathbb{R}^n)$ を単位成分 $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ および $\mathcal{N}_{x:\mu}$ の大域定義写像とする.

【定義 5】 異なる単位成分の閉包 $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ および $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\mu})$ が条件 (i)(ii) を共に満たすとき, $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ は $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\mu})$ と交点 $\bar{q} \in B_{\lambda:\mu} := \text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda}) \cap \text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\mu}) \neq \emptyset$ において余次元 $n-1$ で横断的に交叉するという.

(i) $\bar{q}$ を含む $\mathcal{Q}_0$ の開集合 U_k が存在して, ある番号 j を除く $\mathbb{X}$ の各座標番号 $i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ について $\ker(f_\lambda^i|U_k) = \ker(f_\mu^i|U_k)$ が成立する,

(ii) $\bar{q}$ において $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda}) \pitchfork_{\bar{q}} \ker(f_\mu^j)$ in $\mathcal{Q}_0$. ■

明らかに, $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ が $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\mu})$ と交点 $\bar{q}$ において余次元 $n-1$ で横断的に交叉するという性質は, $\mathcal{Q}_0$ の局所座標の取り方によらない. また,

$$P := \bigcup_{i=1, i \neq j}^n \ker(f_\lambda^i|U_k) \quad (11)$$

とおくと, P は $\mathcal{Q}_0$ の余次元 $n-1$ の部分多様体であり, $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda}) \pitchfork_{\bar{q}} \text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\mu})$ in P が成り立つ (Fig. 3 参照).

Fig. 3 Transversal intersection with codimension $n-1$

つぎに, $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ の自己交叉の横断性を定義する. $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ が自己交叉 $B_\lambda \subset \text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda}) \setminus \mathcal{N}_{x:\lambda}$ を持てば, $\mathcal{K}_\lambda$ および φ を単位成分 $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ を定義する多様体およびはめ込みとして, 各点 $\bar{q} \in B_\lambda$ に対して $\mathcal{K}_\lambda$ 上に対応する点 $\varphi^{-1}(\bar{q})$ が少なくとも 2 点存在する. B_λ に $\mathcal{Q}_0$ の位

相から誘導される相対位相を入れておく. B_λ^k を自己交叉 B_λ のひとつの連結成分とする. 各点 $\bar{q} \in B_\lambda^k$ について $\varphi^{-1}(\bar{q})$ が 2 点のみからなるとき, B_λ^k は 3 重点を持たないという. たとえば, Fig. 4 の (A)(B) の自己交叉は横断的であるが (C) は横断的ではない. (B) の自己交叉は 3 重点をもつ.

Fig. 4 Examples of self intersection for $m=1$

$\varphi^{-1}(\bar{q}) = \{p_1, p_2\}$ とする. $\mathcal{K}_\lambda$ 上に $p_1 \in U_K^1$ および $p_2 \in U_K^2$ なる $\mathcal{K}_\lambda$ の開集合で $U_K^1 \cap U_K^2 = \emptyset$ かつ $\varphi(U_K^1) \cap \varphi(U_K^2) = B_\lambda^k$ を満足するものとする:

【定義 6】 単位成分の閉包 $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ が条件 (i)(ii) および (iii) を共に満たすとき, $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ は $\bar{q}$ で余次元 $n-1$ で横断的に自己交叉するという:

- (i) $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ は 3 重点をもたない自己交叉 B_λ をもつ,
- (ii) B_λ^k を B_λ のひとつの連結成分, U_k を $B_\lambda^k \subset U_k$ なる $\mathcal{Q}_0$ の開集合とすると, $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda}) \cap U_k$ を含む $\mathcal{Q}_0$ の余次元 $n-1$ の部分多様体 P : (11) 式が存在する,
- (iii) 点 $\bar{q} \in B_\lambda^k$ において $\varphi(U_K^1) \pitchfork_{\bar{q}} \varphi(U_K^2)$ in P . ■

【補題 2】 定義 6 の記号のもとで, $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ は点 $\bar{q} \in B_\lambda^k$ で余次元 $n-1$ で横断的に自己交叉すると仮定する. U_K^1 および U_K^2 を $\varphi(U_K^1) \cap \varphi(U_K^2) = B_\lambda^k$ なる $\mathcal{K}_\lambda$ の開集合とする. そのとき, $\mathbb{X}$ のある座標番号 j と

$$\text{cl.}(\varphi(U_K^2)) = \ker((f_\lambda^1, \dots, f_\lambda^{j-1}, g_2^j, f_\lambda^{j+1}, \dots, f_\lambda^n))$$

なる関数 $g_2^j \in C^r(\mathcal{Q}_0, \mathbb{R})$ が存在して,

$$\varphi(U_K^1) \pitchfork_{\bar{q}} \ker(g_2^j) \text{ in } \mathcal{Q}_0$$

が成り立つ. ■

(証明) $\text{cl.}(\varphi(U_K^2))$ は $\mathcal{Q}_0$ の余次元 $n-1$ の部分多様体 P の閉集合であるから, $q \in \text{cl.}(\varphi(U_K^2))$ ならば $g_2^j(q) = 0$, $q \in \mathcal{Q}_0 \setminus \text{cl.}(\varphi(U_K^2))$ ならば $g_2^j(q) \neq 0$ となる関数 g_2^j が存在する [7]. $\hat{f}_\lambda := (f_\lambda^1, \dots, f_\lambda^{j-1}, g_2^j, f_\lambda^{j+1}, \dots, f_\lambda^n)$ とおくと, $\text{cl.}(\varphi(U_K^2)) = \ker(\hat{f}_\lambda)$ が成立する. このような関数 $g_2^j \in C^r(\mathcal{Q}_0, \mathbb{R})$ はいくらでも存在するが, 零多様体の連結成分の大域定義写像の存在に関する議論 [5] から, $\ker(g_2^j) \subset \ker(f^j)$ となるように g_2^j を選ぶことができる. 零多様体の定義 $\mathcal{N}_x = \ker(f) \cap K_0^n(f)$ から, $\ker(f^j) \pitchfork P$ in $\mathcal{Q}_0$ であるから, $\ker(g_2^j) \subset \ker(f^j)$ を満足する g_2^j に対して, 定義 6 より $\varphi(U_K^1) \pitchfork_{\bar{q}} \ker(g_2^j)$ in $\mathcal{Q}_0$ が成り立つ. □

【定理 2】 $\mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ および $\mathcal{N}_{x:\lambda}^h$ を $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の隣り合う連結成分とする. もし, 各点 $\bar{q} \in B_{\lambda:k}^h := \text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda}^k) \cap \text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda}^h)$ において, $\text{cl.}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ が他の単位成分の閉包と余次元 $n-1$ で横断的に交わっているか, 余次元 $n-1$ で横断的に自

已交叉しているならば、 $\mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ および $\mathcal{N}_{x:\lambda}^h$ 上で定義 3 の Morse 指数の偶奇性に関する向きの標準化は互いに逆符号をもつ。■

(証明) $\mathcal{N}_{x:\lambda}^k$ と $\mathcal{N}_{x:\lambda}^h$ は隣り合う連結成分であることと、この定理の横断性条件および補題 1 から、ある点 $\bar{q} \in B_{\lambda}^{k:h}$ の近傍の局所的な考察で十分である。 $\bar{q}$ の開近傍としてその閉包が $n+m$ 次元球体 $\mathbb{B}^{n+m}$ と C^r 同相であるような開部分多様体 $U_{k:h} \subset Q_0$ をとることができる。十分小さな $U_{k:h}$ を取ると、定義 5 および補題 2 より、 Q_0 の余次元 1 の閉部分多様体 $K_{k:h}^j$ (定義 5 の $\ker(f_{\mu}^j)$ あるいは補題 2 の $\ker(g_2^j)$) が存在して $(\text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda}^k \cup \mathcal{N}_{x:\lambda}^h) \cap U_{k:h}) \cap_{\bar{q}} K_{k:h}^j$ in Q_0 が成り立つ。さらに、適当な $U_{k:h}$ を選べば $n+m-1$ 次元多様体 $K_{k:h}^j$ は境界をもつ多様体 $\text{cl}(U_{k:h})$ の境界としての $n+m-1$ 次元球面と同相な多様体 $\partial(\text{cl}(U_{k:h}))$ と横断的に交叉しており、 $K_{k:h}^j$ は $U_{k:h}$ をふたつの連結成分に分ける。 $g_{k:h}^j \in C^r(Q_0, \mathbb{R})$ を $K_{k:h}^j = \ker(g_{k:h}^j)$ なる関数として、写像 $g_{k:h} \in C^r(Q_0, \mathbb{R}^n)$ を各点 $q \in Q_0$ において

$$g_{k:h}(q) := (f_{\lambda}^1(q), \dots, f_{\lambda}^{j-1}(q), f_{\lambda}^j(q)g_{k:h}^j(q), f_{\lambda}^{j+1}(q), \dots, f_{\lambda}^n(q))$$

で定義すると、 $\ker(f) \cap U_{k:h} = \ker(g_{k:h})$ が成立している。一方、補題 1 より各点 $\bar{q} \in \text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda}) = \ker(f_{\lambda})$ においてある関数 $\eta_i \in C^r(\text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda}) \cap U_{k:h}, \mathbb{R})$, $i=1, \dots, n$ を要素とする対角行列

$$\eta(q) := \text{diag}(\eta_1(q), \dots, \eta_{j-1}(q), \eta_j(q)g_{k:h}^j(q), \eta_{j+1}(q), \dots, \eta_n(q))$$

が存在して、 $J(f)(\bar{q}) = \eta(\bar{q}) \cdot J(f_{\lambda})(\bar{q})$ と書ける。 $\mathcal{N}_{x:\lambda}^k \cap U_{k:h}$ および $\mathcal{N}_{x:\lambda}^h \cap U_{k:h}$ は $U_{k:h} \setminus (K_{k:h}^j \cap U_{k:h})$ のそれぞれ別の連結成分に属する。そして、 $\bar{q} \in \mathcal{N}_{x:\lambda}^k \cap U_{k:h}$ に対する $g_{k:h}^j(\bar{q})$ と $\bar{q} \in \mathcal{N}_{x:\lambda}^h \cap U_{k:h}$ に対する $g_{k:h}^j(\bar{q})$ の符号は互いに異なる。それゆえ、 $\det(\eta(\bar{q}))$ の符号、したがって (7) 式の符号も互いに異なる。□

【例題 5】 Fig. 5 に $\mathcal{N}_{x:\lambda} = \mathcal{N}_{x:\lambda}^1 \cup \mathcal{N}_{x:\lambda}^2 \cup \mathcal{N}_{x:\lambda}^3$ の閉包が結節点を自己交叉としてもつ場合を例示する。 $\text{cl}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ の向きを $\mathcal{N}_{x:\lambda}^1, \mathcal{N}_{x:\lambda}^2, \mathcal{N}_{x:\lambda}^3$ の順序にとる。左図において、双曲点 p_1 における局所交叉数は 1, Morse 指数は偶 Σ^+ であったとすると、定義 3 の Morse 指数の偶奇性に関する向きの標準化は $\Theta(\mathcal{N}_{x:\lambda}^1) = \text{id}_{\{1, -1\}}$ である。したがって、定理 2 より他の連結成分について

$$\Theta(\mathcal{N}_{x:\lambda}^2) = -\text{id}_{\{1, -1\}}, \quad \Theta(\mathcal{N}_{x:\lambda}^3) = \text{id}_{\{1, -1\}}$$

が成立する。 q_3 の局所交叉数は 1 であり、 q_2 と q_4 では -1 であるから、注意 1 より q_1 と q_2 には Σ^+ , q_3 と q_4 には Σ^- の双曲点が現れる。右図では逆に q_1 と q_2 には Σ^- , q_3 と q_4 には Σ^+ の双曲点が現れる。■

Fig. 5 An example for a null manifold with a node

4. 零多様体の射影次元と交叉理論への応用

ここでは制御された系の双曲点を零多様体上の指定された位置に配置できるか、という問題を考察する。

制御された系 $\sigma \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}_u)$ の双曲点はこの系の零多様体 $\mathcal{N}_x$ と入力多様体 $\mathcal{M}_u$ との横断的交点であり、 $\mathcal{M}_u$ はファイバー多様体 Q_0 の $\mathbb{X}$ 上の断面である。それゆえ、直ちにつぎの結果が得られる (例題 6 参照) :

【補題 3】 1 点 $\bar{q} \in \mathcal{N}_x$ で $\pi_u^{-1}(\pi_u(\bar{q})) \cap \mathcal{N}_x \neq \{\bar{q}\}$ ならば $\bar{q}$ と他の点 $\bar{q}' \in \pi_u^{-1}(\pi_u(\bar{q})) \cap \mathcal{N}_x$ を同時に $\mathcal{M}_u$ との交点として指定することはできない。■

4.1 零多様体の射影次元

補題 3 の状況を局所的に考察する。多くの場合、この検討を $\mathcal{N}_x$ の単位成分 $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ ごとに進めることが効率的である。そこで $\pi := \pi_u|_{\mathcal{N}_{x:\lambda}}$ とおく。 $J^1(\mathcal{N}_{x:\lambda}, \mathbb{X})$ で $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ から $\mathbb{X}$ への写像の 1-ジェットバンドル (付録 2. 参照) を表す。 $p=0, 1, \dots$ に対してつぎを定義する :

$$\mathcal{S}_p(\mathcal{N}_{x:\lambda}, \mathbb{X}) := \{(q, x, \mu) \in J^1(\mathcal{N}_{x:\lambda}, \mathbb{X}) \mid \text{Corank}(\mu) = p\}$$

とおく [6]。ただし、 $\mu \in J_{(q,x)}^1(\mathcal{N}_{x:\lambda}, \mathbb{X})$ に対して

$$\text{Corank}(\mu) := \min\{\dim \mathcal{N}_{x:\lambda}, \dim \mathbb{X}\} - \text{Rank}(\mu)$$

は μ の余階数である。 $j^1\pi: \mathcal{N}_{x:\lambda} \rightarrow J^1(\mathcal{N}_{x:\lambda}, \mathbb{X})$ を π の 1-ジェット拡大とする。

【補題 4】 $j^1\pi \cap \bigcup_{p>0} \mathcal{S}_p(\mathcal{N}_{x:\lambda}, \mathbb{X}) = \emptyset$ かつ π が同相写像ならば、任意の $\bar{q} \in \mathcal{N}_{x:\lambda}$ で $\pi_u^{-1}(\pi_u(\bar{q})) \cap \mathcal{N}_{x:\lambda} = \{\bar{q}\}$ が成り立つ。■

(証明) 第 1 の条件からこの π ははめ込みであり [6]、第 2 の条件とあわせて埋め込みであるから $\pi(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ は $\mathbb{X}$ の m 次元部分多様体である。さらに π は $\pi(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ の上への全単射であることから、この補題は導かれる。□

本論文では $\mathcal{N}_x$ が複数の単位成分を持つ場合を許して考察しているので、補題 4 は各点 $\bar{q} \in \mathcal{N}_x$ についての大域的な結果 $\pi_u^{-1}(\pi_u(\bar{q})) \cap \mathcal{N}_x = \{\bar{q}\}$ を保証するものではない。 $p>0$ のとき $\mathcal{S}_p(\mathcal{N}_{x:\lambda}, \mathbb{X})$ は Thom-Boardman 特異点集合とよばれ、 $\pi(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ の構造の検討に有用である [6]。以下では、まず $j^1\pi$ の余階数の代わりに階数の計算法を検討する。 $j^1\pi(\bar{q})$ は $T_{\bar{q}}\pi: T_{\bar{q}}\mathcal{N}_{x:\lambda} \rightarrow T_{\pi_u(\bar{q})}\mathbb{X}$ と同一視できることから、つぎを定義する :

【定義 7】 零多様体のひとつの単位成分上の点 $\bar{q} \in \mathcal{N}_{x:\lambda}$ について、

$$\text{pdim}_{\bar{q}}(\mathcal{N}_{x:\lambda}) := \text{Rank}(T_{\bar{q}}\pi) \quad (12)$$

と定義して、点 $\bar{q}$ における $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の射影次元という。■

U を $\mathcal{N}_{x:\lambda} \cap U \neq \emptyset$ なる $\mathcal{Q}_0$ の開集合として、任意の $\bar{q} \in \mathcal{N}_{x:\lambda} \cap U$ について $\text{pdim}_{\bar{q}}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ が一定の値 ν を持つならば $\text{pdim}(\mathcal{N}_{x:\lambda} \cap U) = \nu$ と書く。さらに、 $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ がその全体にわたって一定の値 ν を持つならば、それを単に $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ の射影次元といい $\text{pdim}(\mathcal{N}_{x:\lambda}) = \nu$ と書く。

【例題 6】 Fig. 6 の (A)(C) の零多様体の射影次元は一定の値をもつ。(B) の零多様体の射影次元は $\mathbb{U}$ 軸に平行な接線をもつ点を除いて一定の値をもつ。■

Fig. 6 Projective dimension of null manifolds

(1) 式の右辺について、各点 $\bar{q} := (\bar{x}, \bar{u}) \in \mathcal{N}_{x:\lambda}$ で

$$J(f)(\bar{q}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{q}), \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{q}) \right] =: [A(\bar{q}), B(\bar{q})] \quad (13)$$

と表しておく。固定された $\bar{q}$ に対して、 $A(\bar{q}) =: A \in \text{Mat}(n)$, $B(\bar{q}) =: B \in \text{Mat}(n, m)$ とおく。状態フィードバック系の零多様体の射影次元はつぎの補題によって容易に求められる：

【補題 5】 任意の $\bar{q} \in \mathcal{N}_{x:\lambda}$ に対して $\text{pdim}_{\bar{q}}(\mathcal{N}_{x:\lambda}) = \text{Rank}(B(\bar{q}))$ である。■

(証明) $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ は m 次元多様体であるから、 m 個の座標をもつ局所座標系で表すことができる。 U を $\bar{q}$ の開近傍として $U' := \mathcal{N}_{x:\lambda} \cap U$ とおき、

$$U' = \{(\bar{x}, \bar{u}) \in U \mid (\bar{x}, \bar{u}) = (\varphi(s), \psi(s)), s \in V \subset \mathbb{R}^m\}$$

と表記する。 V は $(\varphi, \psi)(V) = U'$ なる $\mathbb{R}^m$ の開集合である。 $\text{pdim}_{\bar{q}}(\mathcal{N}_{x:\lambda}) = \nu_{\bar{q}}$ とおく。任意の $\bar{q} = (\varphi, \psi)(s)$ なる $s \in V$ に対して $\nu_{\bar{q}} = \text{rank}_s(\varphi)$ である。固定された s について $\Phi := J(\varphi)(s) \in \text{Mat}(n, m)$, $\Psi := J(\psi)(s) \in \text{Mat}(m)$ とおく。 $\text{Rank}(B) =: l < m$ と仮定する。 $\text{Rank}[A, B] = n$ より、必要ならば座標番号を適当に付け替えることにより $\det[A_1, B_1] \neq 0$ となるように

$$\begin{aligned} A &= [A_1, A_2], \quad A_1 \in \text{Mat}(n, n-l), \quad A_2 \in \text{Mat}(n, l), \\ B &= [B_1, B_2], \quad B_1 \in \text{Mat}(n, l), \quad B_2 \in \text{Mat}(n, m-l) \end{aligned}$$

と分割できる。仮定 $l < m$ より、 B_2 の各列ベクトルは B_1 の列ベクトルの一次結合として書けるから、ある行列 $H \in \text{Mat}(l, m-l)$ が存在して $B_2 = B_1 H$ となる。 A および B の分割に応じて、 Φ および Ψ を

$$\Phi_1 \in \text{Mat}(n-l, m), \quad \Phi_2, \Psi_1 \in \text{Mat}(l, m)$$

および $\Psi_2 \in \text{Mat}(m-l, m)$ を用いて、

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}$$

と分割すれば、等式 $A\Phi + B\Psi = 0_{n \times m}$ は

$$[A_1, B_1] \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Psi_1 \end{bmatrix} + [A_2, B_2] \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = 0_{n \times m} \quad (14)$$

と書ける。 n 次正則行列 $[A_1, B_1]$ の逆行列を $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$ とすれば (14) 式より、

$$\Phi_1 = -P_1 A_2 \Phi_2, \quad \Psi_1 = -P_2 A_2 \Phi_2 - H \Psi_2$$

を得る。この式は、 Φ_1 および Ψ_1 の各行ベクトルが Φ_2, Ψ_2 の行ベクトルの一次結合で表現されることを示している。 $\text{Rank} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = m$ より、 m 次正方行列 $\begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}$ は正則である。したがって Φ_2 は行フルランクであり $\text{Rank}(\Phi_2) = l$ 、これと上の Φ_1 の表現をあわせて $l = \text{Rank}(\Phi) = \nu_{\bar{q}}$ が得られる。 $\text{Rank}(B) = m$ ならば、 $B_1 = B$, $\Psi_1 = \Psi$ とおけば同じ結果が得られる。□

【例題 7】 $q = (x^1, x^2; u^1, u^2) \in \mathcal{Q}_0 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ において、 $\dot{x}^1 = u^1(x^1 + u^2)$, $\dot{x}^2 = u^1 x^2$ を考察する。 $\mathcal{N}_x = \{q \in \mathcal{Q}_0 \mid x^1 + u^2 = 0, x^2 = 0, u^1 \neq 0\}$ について、

$$J(f)(q) = [A(q), B(q)] = \begin{bmatrix} u^1 & 0 & x^1 + u^2 & u^1 \\ 0 & u^1 & x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

より、 $\text{pdim}(\mathcal{N}_x) = 1$ である。■

【補題 6】 $\phi \in C^{r+1}(\mathbb{X})$ および $\omega \in C^{r+1}(\mathcal{Q}_0, \mathbb{U})$ をファイバー多様体 $\pi_u: \mathcal{Q}_0 \rightarrow \mathbb{X}$ の構造を保つ任意の座標変換 [5] として、 $\tilde{q} := (\tilde{x}, \tilde{u}) = (\phi(x), \omega(x, u))$ とおく。 $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ を零多様体のひとつの単位成分、 $\mathcal{N}_{\tilde{x}:\tilde{\lambda}}$ を座標変換後の対応する単位成分とする。そのとき、 pdim の値はこの座標変換によらない。■

(証明) $\phi^{-1} =: \tilde{\phi}$ および $\omega^{-1} =: \tilde{\omega}$ とおく。状態方程式 (1) 式は $\dot{x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}(\tilde{\phi}(\tilde{x})) f(\tilde{\phi}(\tilde{x}), \tilde{\omega}(\tilde{x}, \tilde{u})) =: \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{u})$ と書かれる。補題 5 より、次式が成り立つ：

$$\begin{aligned} \text{pdim}_{\tilde{q}}(\mathcal{N}_{\tilde{x}:\tilde{\lambda}}) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{u}}(\tilde{x}, \tilde{u}) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x}(\tilde{\phi}(\tilde{x})) \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{\phi}(\tilde{x}), \tilde{\omega}(\tilde{x}, \tilde{u})) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{u}}(\tilde{x}, \tilde{u}) \end{aligned}$$

$\frac{\partial \phi}{\partial x}(\tilde{\phi}(\tilde{x}))$, $\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{u}}(\tilde{x}, \tilde{u})$ が正則、かつ $\frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{\phi}(\tilde{x}), \tilde{\omega}(\tilde{x}, \tilde{u}))$ を補題 5 の $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ に対する $B(\bar{q})$ と同一視できることから、 $\text{pdim}_{\tilde{q}}(\mathcal{N}_{\tilde{x}:\tilde{\lambda}}) = \text{pdim}_{\bar{q}}(\mathcal{N}_{x:\lambda})$ が得られる。□

4.2 射影次元が減少しない場合

U を $\mathcal{N}_{x:\lambda} \cap U \neq \emptyset$ なる $\mathcal{Q}_0$ の開集合として、 $\mathcal{N}_{x:\lambda}^U := \mathcal{N}_{x:\lambda} \cap U$ とおく。本論文では $\text{pdim}(\mathcal{N}_{x:\lambda}^U) = m$ の場合について、つぎの結果を示す：

【定理 3】 ある $\mathcal{N}_{x:\lambda}^U$ について $\text{pdim}(\mathcal{N}_{x:\lambda}^U) = m$ であ

り $\mathcal{N}_{x:\lambda}^U \approx \mathbb{R}^m$ かつ $\pi_u(\mathcal{N}_{x:\lambda}^U) \approx \mathcal{N}_{x:\lambda}^U$ ($\approx$ は同相) ならば, $\mathcal{N}_{x:\lambda}^U \cap \mathcal{M}_u(k)$ in $\mathcal{Q}_0$ かつ $\mathcal{N}_{x:\lambda}^U$ 上の指定された互いに異なる任意の有限個の点において $\mathcal{N}_{x:\lambda}^U$ と横断的に交差する $\mathcal{M}_u(k)$ が存在する. ■

$\text{pdim}(\mathcal{N}_{x:\lambda}^U) = m$ ならば $m \leq n := \dim \mathbb{X}$ である. この定理の証明のために, つぎの補題を証明する:

【補題 7】 ある $\mathcal{N}_{x:\lambda}^U$ について $\text{pdim}(\mathcal{N}_{x:\lambda}^U) = m$ であり $\mathcal{N}_{x:\lambda}^U \approx \mathbb{R}^m$ かつ $\pi_u(\mathcal{N}_{x:\lambda}^U) \approx \mathcal{N}_{x:\lambda}^U$ ならば, $\mathcal{N}_{x:\lambda}^U \cap \mathcal{M}_u = \mathcal{N}_{x:\lambda}^U$ なる $\mathcal{M}_u$ が存在する. ■

(証明) $\mathcal{N}_{x:\lambda}^U \approx \mathbb{R}^m$ より, $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ を単連結な開集合として, 写像 $\varphi \in C^r(V_\alpha, \mathbb{X})$ および $\psi \in C^r(V_\alpha, \mathbb{U})$ を用いて, 任意の点 $\bar{q} \in \mathcal{N}_{x:\lambda}^U$ を $\bar{q} := (\bar{x}, \bar{u}) = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ と表すことができる, ここで $\alpha \in V_\alpha$ はパラメータである. $\pi_u(\mathcal{N}_{x:\lambda}^U) \approx \mathcal{N}_{x:\lambda}^U$ かつ $\text{pdim}(\mathcal{N}_{x:\lambda}^U) = m$ であるから補題 4 の結果より, この $\bar{x} = \varphi(\alpha)$ のパラメータ α を各点 $\bar{x} \in \pi_u(\mathcal{N}_{x:\lambda}^U)$ の座標とみなすことができる. さらに $V_\beta \subset \mathbb{R}^{n-m}$ を開集合, $\eta \in C^r(V_\beta, \mathbb{X})$ を任意の $\bar{x} \in \pi_u(\mathcal{N}_{x:\lambda}^U)$ に対して $\eta^{-1}(\bar{x}) = 0 \in V_\beta$ なる写像として, $x = \varphi(\alpha) + \eta(\beta) =: \phi(\alpha, \beta)$ の (α, β) を $\pi_u(\mathcal{N}_{x:\lambda}^U)$ を含む開集合 $V \subset \mathbb{X}$ 上の点 $x \in V$ の座標とすることができる, ただし $\beta \in V_\beta$ である. $(\alpha, \beta) = \phi^{-1}(x) =: (\phi_\alpha^{-1}, \phi_\beta^{-1})(x)$ をその逆写像とする. $\theta \in C^r(V_\beta, \mathbb{U})$ を $\theta(0) = 0 \in \mathbb{U}$ なる写像とする. そのとき, $V \subset \mathbb{X}$ 上のフィードバック

$$u = \psi \circ \phi_\alpha^{-1}(x) + \theta \circ \phi_\beta^{-1}(x) \quad (15)$$

で局所的に定義される $\mathcal{Q}_0$ の m 次元開部分多様体を内部に含む入力多様体 $\mathcal{M}_u$ を構成することができるが, この $\mathcal{M}_u$ はこの補題の条件を満足している. □

【系 2】 補題 7 の条件のもとで, $\mathcal{M}_u \cap \mathcal{N}_{x:\lambda}^U = \emptyset$ なる $\mathcal{M}_u$ が存在する. ■

(証明) (15) 式に $\varepsilon(0) \neq 0 \in \mathbb{U}$ なる写像 $\varepsilon \in C^r(V_\beta, \mathbb{U})$ を追加した局所的なフィードバック

$$u = \psi \circ \phi_\alpha^{-1}(x) + \theta \circ \phi_\beta^{-1}(x) + \varepsilon \circ \phi_\beta^{-1}(x) \quad (16)$$

から $\mathcal{M}_u$ を構成すれば, この系の主張を満足する $\mathcal{M}_u$ が求められる. □

[定理 3 の証明]

(証明) 補題 7 から, $\mathcal{N}_{x:\lambda}^U \cap \mathcal{M}_u(k_0) = \mathcal{N}_{x:\lambda}^U$ を満たすフィードバック $u = k_0(x)$ が存在する. k_0 は局所的に (15) 式で定義される. $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ を補題 7 の証明に現れた開集合とする. $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_L \in \mathcal{N}_{x:\lambda}^U$ を任意に与えられた互いに異なる有限個の点, $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_L \in V_\alpha$ を

$$\pi_u(\bar{q}_1) = \bar{x}_1 = \varphi(\bar{\alpha}_1), \dots, \pi_u(\bar{q}_L) = \bar{x}_L = \varphi(\bar{\alpha}_L)$$

なる点とする. $\tau: \mathcal{E}_\alpha := V_\alpha \times \mathbb{U} \rightarrow V_\alpha$ を τ を射影, V_α を底多様体, $\mathbb{U}$ をファイバーの空間とするファイバー多様体とし, $(\mathcal{E}_\alpha)^0$ でその零断面を表す. $(\mathcal{E}_\alpha)^0$ を含む $\mathcal{E}_\alpha$ の開集合 W を $\epsilon > 0$ を適当な正数として

$$W := \{(\alpha, u) \in \mathcal{E}_\alpha \mid \alpha \in V_\alpha, \|u\| < \epsilon\} \quad (17)$$

で定義する. $\pi_1: TV_\alpha \rightarrow V_\alpha$ を接バンドル, $(TV_\alpha)^0$ でその零断面を表す. V_α は $\mathbb{R}^m$ の単連結な開集合であるから $\mathbb{R}^m$ と同相であり, $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_L$ のみで $(TV_\alpha)^0$ と横断的に交わる TV_α の断面 $\rho \in \Gamma^{r+1}(TV_\alpha)$ が α の多項式関数として存在する. $\omega \in C^{r+1}(TV_\alpha, W)$ を図式:

$$\begin{array}{ccc} TV_\alpha & \xrightarrow{\omega} & W \subset \mathcal{E}_\alpha \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \tau \\ V_\alpha & \xlongequal{\quad} & V_\alpha \end{array}$$

を可換とし, かつ $(TV_\alpha)^0$ を $(\mathcal{E}_\alpha)^0$ に写す写像とする. $\omega \circ \rho(V_\alpha) \subset W$ となるように (17) 式の正数 ϵ を選んでおく. $\theta_1 \in C^r(V_\beta, \mathbb{U})$ を補題 7 に現れた写像 θ と同等の性質, $\theta_1(0) = 0 \in \mathbb{U}$ をもつ写像として, 局所的に

$$k_1(x) = \omega \circ \rho \circ \phi_\alpha^{-1}(x) + \theta_1 \circ \phi_\beta^{-1}(x) \quad (18)$$

で定義される写像 k_1 を用いると, $\mathcal{M}_u(k_0 + k_1)$ は各点 $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_L$ のみにおいて $\mathcal{N}_{x:\lambda}^U$ と横断的に交わる. □

【系 3】 状態方程式の零点集合は単純であり, 零多様体 $\mathcal{N}_x$ について $\text{pdim}(\mathcal{N}_x) = m$ が成立すると仮定する. $\mathcal{N}_x$ の各連結成分 $\mathcal{N}_x^k; k = 1, 2, \dots$ について $\mathcal{N}_x^k \approx \mathbb{R}^m$ かつ $\pi_u(\mathcal{N}_x^k) \approx \mathcal{N}_x^k$ であり, 任意の異なる連結成分 $\mathcal{N}_x^k$ および $\mathcal{N}_x^h$ について $\pi_u(\mathcal{N}_x^k) \cap \pi_u(\mathcal{N}_x^h) = \emptyset$ が成り立つならば, $\mathcal{N}_x \cap \mathcal{M}_u(k)$ in $\mathcal{Q}_0$ かつ $\mathcal{N}_x$ 上の指定された互いに異なる任意の有限個の点において $\mathcal{N}_x$ と横断的に交差する $\mathcal{M}_u(k)$ が存在する. ■

(証明) 状態方程式の零点集合は単純であるから, 任意の異なる連結成分 $\mathcal{N}_x^k$ および $\mathcal{N}_x^h$ について $\mathcal{N}_x^k \cap \mathcal{N}_x^h = \emptyset$ が成立する. したがって, 各連結成分ごとに定理 3 と系 2 の結果が成り立つ. 仮定より, 任意の異なる連結成分 $\mathcal{N}_x^k$ および $\mathcal{N}_x^h$ について $\pi_u(\mathcal{N}_x^k) \cap \pi_u(\mathcal{N}_x^h) = \emptyset$ が成り立つことから, 各連結成分 $\mathcal{N}_x^k$ に対応する $\pi_u(\mathcal{N}_x^k) \subset V_k$ なる開集合 $V_k \subset \mathbb{X}$ を互いに共通部分を持たないように選ぶことができる. 開集合 V_k 上で局所的に入力多様体を設計することによって, 双曲点の位置の指定を連結成分 $\mathcal{N}_x^k$ ごとに独立して行うことができ, さらにこのようにして設計した局所的な入力多様体を含む $\mathcal{M}_u(k)$ を構成できることから, この結果は導かれる. □

系 3 の条件を満足する実システムは少なくない. 参考文献 [4] にそのような系に対する勾配的 Morse-Smale 制御系の設計手順の解説がある.

(注意 2) 状態方程式の零点集合はほとんど単純であるとする. $n > 2$ かつ $m \geq 1$ の場合において, 定理 3 の結果が零多様体全体 $\mathcal{N}_x$ について大域的に成立するか否かを判定するためには, 一般に $\text{cl}(\mathcal{N}_x)$ の位相幾何構造に関する情報を必要とする. $n = 2$ かつ $m = 1$ の場合にはつぎのような検討が可能である. Fig. 7 に射影次元 1 の単位成分 $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ と $\mathcal{N}_{x:\mu}$ の閉包が交点をもつ場合を示す. ただし, $\pi_u(\mathcal{N}_{x:\lambda}) \cap \pi_u(\mathcal{N}_{x:\mu}) = \emptyset$ かつ $\mathcal{N}_{x:\lambda}$ と $\mathcal{N}_{x:\mu}$ の各点で線形化された状態方程式は虚軸上に不可

Fig. 7 Examples of unit components of a null manifold

制御極をもたないものとする。(A)では $N_{x;\lambda}$ の二つの連結成分上の任意の有限個の点に双曲点を配置できる。各連結成分に対して常に定理3が成立するが、(B)(C)のように N_x の閉包がループ(1-輪体)を持つ場合にはつぎのような局所的ではない現象が現れる。 q_4 および q_7 を含む各連結成分上には任意の有限偶数個の双曲点を配置でき、同時に他の連結成分上の双曲点数を0とできる。しかし、これらの上に有限奇数個の双曲点を配置すると、(B)では q_5 を含む連結成分上に奇数個の双曲点が現れる。(C)では q_8 と q_9 を含む連結成分上にそれぞれ奇数個の双曲点が現れる。■

5. おわりに

「配位空間上の交叉理論とその応用」と題する一連の論文の第二論文として、本論文では制御された系に現れる双曲点のMorse指数の偶奇性を指定する問題およびそれらの零多様体上における位置を指定する問題を、議論を状態フィードバック系に限定した上で考察した。

前者に関して定理1では零多様体のひとつの連結成分上の異なるふたつの双曲点について、零多様体と入力多様体の局所交叉数が一致すれば横断的交点のMorse指数の偶奇性は一致し、局所交叉数が異なればMorse指数の偶奇性も互いに異なることを示した。定理2では、この結果を零多様体の単位成分の隣り合うふたつの連結成分上の双曲点について拡張した。

また、後者に関して零多様体の射影次元という概念を定義して、定理3では零多様体の射影次元が入力空間の次元 m と同一の場合について零多様体上で双曲点の位置を指定できるための局所的な条件を示した。この結果から状態方程式の零点集合が単純である場合に対する大域的な結果を系3として導いた。

双曲点のMorse指数とその位置を同時に指定可能か否か、という問題はフィードバックによる漸近安定化問題と関連して興味深い。非線形の非最小位相系に関連した系について、制御なしでは不安定な点に漸近安定点を配置しようとするとその点を含めて少なくとも3点以上の特異点を配置しなくてはならない、といった状況が生ずることがある[4]。この問題は制御Lyapunov関数やスライディングモード制御の位相幾何学的考察とも関連し、その系統的な考察は今後の重要な課題である。

参考文献

- [1] C. C. Conley: *Isolated Invariant Sets and The Morse Index*, C. B. M. S. Vol. 38, Amer. Math. Soc. Prov-

idence, RI (1978)

- [2] 榎本, 島: Conley 指数理論による特異点配置; 計測自動制御学会論文集, Vol. 34, pp. 584–592 (1998)
- [3] 榎本, 島: 特異点配置による大域的漸近安定化制御系の設計; 計測自動制御学会論文集, Vol. 34, pp. 126–134 (1998)
- [4] 榎本, 島: 配位空間上の制御理論と勾配的Morse-Smale制御系; システム/制御/情報, Vol. 43, No. 10, pp. 527–535 (1999)
- [5] 榎本, 島: 配位空間上の交叉理論とその応用—I; システム制御情報学会論文誌, Vol. 16, No. 1, pp. 1–10 (2003)
- [6] M. Golubitsky and V. Guillemin: *Stable Mappings and Their Singularities*, Springer (1973)
- [7] M. W. Hirsch: *Differential Topology*, Springer-Verlag (1976)
- [8] 田村: 微分位相幾何学, 岩波書店 (1992)

付 録

付録 1. 多様体の向き

(U, φ) を n 次元多様体 M の局所座標系, $\varphi(p) = (x^1, \dots, x^n)$ を点 $p \in M$ の局所座標とする. $T_p M$ の枠(順序づけられた基底)を $\{\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n\}$ とする. ふたつの枠はその間の線形同型が正値であるとき, 同じ向きを定めるという. 任意の点 $p \in M$ におけるこの枠が同じ向きを持つような局所座標系を定めることを M を向き付けるという. 向き付けられた M を $\langle M \rangle$ と書く.

付録 2. ジェットバンドル

N および X を C^r 多様体とする ($r \geq 2$). ひとつの点 $q \in N$ に対して, $f, g \in C^r(N, X)$ を $f(q) = g(q)$ なる写像とする. これらの f と g は q において1階の偏微分係数がすべて等しいときに限り $f \stackrel{q}{\sim} g$ と定める. この同値関係のもとで, $J_{(q,x)}^1(N, X)$ によって $x = f(q)$ を満たす写像 $f \in C^r(N, X)$ の同値類の集合を表す. そのとき, 直積空間 $N \times X$ を底多様体, $J_{(q,x)}^1(N, X)$ を $(q, x) \in N \times X$ におけるファイバーとするファイバー多様体をその全多様体で代表させて $J^1(N, X)$ と書き, N から X への写像の1-ジェットバンドルという. ひとつの写像 $f \in C^r(N, X)$ に対して, $q \mapsto J(f)(q) \in J^1(N, X)$ なる写像 $j^1 f : N \rightarrow J^1(N, X)$ が決まるが, これを f の1-ジェット拡大という.