非対称な剛体負荷を持つ1リンクフレキシブルアームのPDS制御*

森田 良文[†]・松野 文俊[‡]・池田 素久[†]・小林 幸洋[†]・鵜飼 裕之[†]・神藤 久[†]

PDS Control of a One-Link Flexible Arm with a Non-Symmetric Rigid Tip Body*

Yoshifumi MORITA[†], Fumitoshi MATSUNO[‡], Motohisa IKEDA[†], Yukihiro KOBAYASHI[†],
Hiroyuki UKAI[†] and Hisashi KANDO[†]

In this paper, we consider position and vibration control of a one-link flexible arm with a non-symmetric rigid tip body, of which the mass center does not lie on the centroidal axis of the arm. In this case, the bending vibration and the torsional vibration of the arm are coupled. Firstly, we derive the distributed parameter model using Hamilton's principle. Secondly, on the basis of this model we construct PDS control law using Lyapunov method and examine the asymptotic stability of the closed-loop system. The PDS controller consists of PD feedback of the motor angle and a bending strain(S) feedback of the flexible arm. Finally, some experiments are performed to demonstrate the effectiveness of the proposed controller.

1. まえがき

近年, 宇宙ステーションの建設など宇宙開発が盛んに行われるようになり, 宇宙用作業ロボットの活躍が期待されている. 宇宙ロボットでは, ロケットの搭載重量や打ち上げコストなどの理由から積極的なロボットアームの軽量化が行われ, これによりアームの柔軟性が無視できなくなる. そこで, この柔軟性を考慮したモデリングや制御の研究が盛んに行われている [1,2]. また, この柔軟性は, アームの先端に手先効果器が取り付けられる場合や, さらに手先効果器が対象物を把持する場合, アームの曲げだけでなくねじれによる変形・振動を生じさせる. そこで, アームの先端負荷を剛体として扱ったモデリングや制御系設計法が提案されている [3–5]. 特に, 先端負荷の重心がアームの中立軸上でない場合は, 曲げ振動とねじれ振動が結合振動を引き起こすので, リンク駆

動用モータで曲げとねじれの両方の振動を抑制することができる [3,4]. これに対し, 先端負荷の重心がアームの中立軸上にある場合は, 曲げ振動とねじれ振動が独立となるので, リンク駆動用モータのほかにリンクの中立軸の回りで回転するモータを用いることで, 曲げ振動とねじれ振動を独立に抑制することができる [5]. 前者のような剛体負荷を非対称な剛体負荷, 後者を対称な剛体負荷とよんでいる. しかしながら, これらの研究において適用されている制御器は, 有限次元近似モデルに基づく制御器であり, スピルオーバー現象の回避のためには, 制御器の次数を高くする必要がある, 実装が困難となる.

一方, 最近, メカニカルシステムが持つダイナミクスに着目したダイナミクスベース制御が注目を集めている [6]. 特に, 柔軟構造物に対しては, 分布定数系のダイナミクスに着目したダイナミクスベース制御が提案されている [7–10]. これは, 有限次元近似モデルに依らない構造的に安定な出力フィードバック制御であり, ロバスト性を有する簡便でかつ実装容易な制御法である. このため, 計算機パワーが限られている宇宙空間では, 宇宙用ロボットの制御系に適していると考えられる. 最近では, 2リンク・フレキシブル・アームの位置制御問題に対し, 非線形分布定数モデルに基づいたダイナミクスベース制御が提案されている [11].

このような背景から, アームの曲げとねじれの結合振動系のような複雑なシステムに対して, 簡便で実装容易

* 原稿受付 2001年12月10日

[†] 名古屋工業大学 Nagoya Institute of Technology; Gokisocho, Showa ward, Nagoya city, Aichi 466-8555, JAPAN

[‡] 東京工業大学 大学院 総合理工学研究科 Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology; Nagatsutacho, Midori ward, Yokohama city, Kanagawa 226-8502, JAPAN

Key Words: flexible arm, distributed parameter system, coupled bending and torsional vibrations, positioning control, dynamics based control, Lyapunov method.

な制御系が必要となる．特に，結合振動系のようにモデルが複雑になると，モデルベース制御系の実装が難しくなる．そこで，分布定数系としての構造に立脚して漸近安定性を保証する，シンプルなダイナミクスベース制御が有効であると考えられる．

本論文では，非対称な剛体負荷を持つ1リンクフレキシブルアームを制御対象とし，曲げ・ねじれの結合振動の抑制と同時に位置制御を実現する制御器としてダイナミクスベース制御法を適用し，導出された制御器の構成を明らかにすることを目的とする．まず，ハミルトン原理を用いて分布定数モデルを導出する．つぎに，リアプノフの方法によりセンサ出力の直接フィードバック制御則を導出する．本論文で対象とするシステムはねじれ振動を考慮したモデルであるが，得られる PDS 制御は曲げ振動のみを考慮したモデルと同じフィードバック制御則となる [7]．分布定数系の観点からシステム固有の構造について明らかにすることで，この点に関して考察する．そして，閉ループ系の漸近安定性を示したのち，PD 制御に比べて PDS 制御が優れた曲げ・ねじれ振動抑制効果を与えることを，実験により検証する．

2. 分布定数モデル

Fig. 1 に示すように，非対称な剛体負荷を持ち水平面内で回転するフレキシブルアームを考える．Fig. 1(b) は上方から剛体負荷を，Fig. 1(c) はアーム先端から根元方向に剛体負荷を見た図である．

Fig. 1(a) に示すように， $O-XYZ$ を慣性座標系 Σ_0 ，

Fig. 1 One-link flexible arm with a non-symmetric rigid tip body

アームの長手方向を X_1 軸とし，モータの回転軸に固定した座標系 $O_1-X_1Y_1Z_1$ を Σ_1 ，剛体負荷とアームとの結合点を原点とし，アーム先端におけるたわみの接線方向を X_2 軸とした座標系 $O_2-X_2Y_2Z_2$ を Σ_2 ，また，原点が O_2 に固定され，剛体負荷の回転運動とともに回転する座標系 $O_3-X_3Y_3Z_3$ を Σ_3 とする．さらに， Σ_3 を剛体負荷の重心 Q まで平行移動した座標系 $Q-X_4Y_4Z_4$ を Σ_4 とする． $\tau(t)$ はモータの発生トルク， $\theta(t)$ はモータの回転角度を表し，どちらも反時計方向を正とする． $w(t,r)$ はアームの曲げ変位を表し，回転の逆方向を正とし， $\varphi(t,r)$ はアームのねじれ変位を表し，反時計方向を正とする．一方，物理パラメータとして， L をリンクの長さ， E をリンクのヤング率， I をリンクの断面2次モーメント， G をリンクのせん断弾性係数， J をリンクの断面2次極モーメント， ρ をリンクの線密度， $\rho\kappa^2$ をリンクの極慣性モーメント， J_m をモータ・ロータの Z 軸まわりの慣性モーメント， J_x, J_y, J_z をそれぞれ剛体負荷の X_4 軸， Y_4 軸， Z_4 軸まわりの慣性モーメント， J_{xy}, J_{yz}, J_{xz} を剛体負荷の慣性乗積， m を剛体負荷の質量， g を重力加速度とする． EI, GJ はそれぞれリンクの曲げ剛性，ねじれ剛性を表す．ここで， Σ_3 座標系における点 Q の位置ベクトルを，

$$\overrightarrow{O_3Q} = [e_x \ e_y \ e_z]^T$$

で表す．

アーム上の任意の点を表す位置ベクトル $\mathbf{r}$ と剛体負荷の重心の位置ベクトル $\mathbf{P} = \overrightarrow{OQ}$ は，

$$\mathbf{r} = r\mathbf{i}_1 - w(t,r)\mathbf{j}_1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & (L + e_x + w'_E(t)e_y)\mathbf{i}_1 \\ & + (-w_E(t) - w'_E(t)e_x + e_y - \varphi_E(t)e_z)\mathbf{j}_1 \\ & + (\varphi_E(t)e_y + e_z)\mathbf{k}_1 \end{aligned} \quad (2)$$

と表される．ただし， $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ は Σ_0 からみた Σ_1 の単位ベクトルを表し， $w_E(t) = w(t, L)$ ， $w'_E(t) = w'(t, L)$ ， $\varphi_E(t) = \varphi(t, L)$ とする．また， $(\cdot)$ は空間に関する微分を， $(\cdot)$ は時間に関する微分を表す．ここで，この系の運動エネルギー T および位置エネルギー V を求めると，

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^L \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dr \\ & + \frac{1}{2}\int_0^L \rho\kappa^2 \dot{\varphi}^2(t,r) dr + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{P}}^T \dot{\mathbf{P}} \\ & + \frac{1}{2}\omega^T \mathbf{J}_\varphi \omega \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2}\int_0^L EI w''^2(t,r) dr + \frac{1}{2}\int_0^L GJ \varphi'^2(t,r) dr \\ & + mg(\varphi_E(t)e_y + e_z) \end{aligned} \quad (4)$$

となり，モータの仮想仕事 $\mathcal{W}$ は，

$$\delta\mathcal{W} = \tau\delta\theta \quad (5)$$

と表される．ただし，

$$\omega = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_E(t) \\ 0 \\ \dot{\theta}(t) - \dot{w}'_E(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_\varphi = \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_y & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_z \end{bmatrix}$$

である．本論文では，回転系に対して slow motion を，また，弾性変位に対して small motion を考えるので，各エネルギーの計算において， $\dot{\theta}(t)$ ， $w(t,r)$ ， $w'(t,r)$ ， $\varphi(t,r)$ の3次以上の積を無視する．

ここで，ハミルトン原理を適用すると，以下の運動方程式が得られる [4]．

モータの回転方程式：

$$J_m \ddot{\theta}(t) + EI w''(t,0) = \tau(t) \quad (6)$$

リンクの曲げに関する振動方程式：

$$\ddot{w}(t,r) + \frac{EI}{\rho} w''''(t,r) = r \ddot{\theta}(t) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} EI \left[\frac{m}{\rho} \{ e_x w_E''''(t) + w_E''''(t) \} + w_E''''(t) \right] \\ - \frac{mGJ}{\rho\kappa^2} e_z \varphi_E''(t) = 0 \\ EI \left[\frac{-\{m(e_x^2 + e_y^2) + J_z\}}{\rho} w_E''''(t) - \frac{me_x}{\rho} w_E''''(t) \right. \\ \left. + w_E''(t) \right] + (me_x e_z - J_{xz}) \frac{GJ}{\rho\kappa^2} \varphi_E''(t) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$w(t,0) = 0, \quad w'(t,0) = 0 \quad (10)$$

リンクのねじれに関する振動方程式：

$$\ddot{\varphi}(t,r) - \frac{GJ}{\rho\kappa^2} \varphi''(t,r) = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} -(me_x e_z - J_{xz}) \frac{EI}{\rho} w_E''''(t) - \frac{mEI}{\rho} e_z w_E''''(t) \\ + \{m(e_y^2 + e_z^2) + J_x\} \frac{GJ}{\rho\kappa^2} \varphi_E''(t) \\ + GJ \varphi_E'(t) = -mge_y \end{aligned} \quad (12)$$

$$\varphi(t,0) = 0 \quad (13)$$

3. PDS 制御

3.1 目標状態

目標の角度 θ_d を達成し，系が静止した状態を目標状態とする．この目標状態におけるアームの曲げ，ねじれの変位の定常値をそれぞれ $w_d(r)$ ， $\varphi_d(r)$ とする．このとき，目標状態において，

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_d, & \dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}(t) = 0, \\ w(t,r) = w_d(r), & \dot{w}(t,r) = \ddot{w}(t,r) = 0, \\ \varphi(t,r) = \varphi_d(r), & \dot{\varphi}(t,r) = \ddot{\varphi}(t,r) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

が成り立つので，これらの関係を振動方程式 (7)–(13) 式に代入することで，

$$\begin{cases} w_d''''(r) = 0 \\ EI w_d''''(L) = 0 \\ EI w_d''(L) = 0 \\ w_d(0) = 0, \quad w_d'(0) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \varphi_d''(r) = 0 \\ GJ \varphi_d'(L) = -mge_y \\ \varphi_d(0) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

が得られる．(15) 式，(16) 式からそれぞれ $w_d(r)$ ， $\varphi_d(r)$ を求めると，

$$w_d(r) = 0 \quad (17)$$

$$\varphi_d(r) = -\frac{mge_y}{GJ} r \quad (18)$$

が得られる．

3.2 制御器の構成

k_1 ， k_2 ， k_3 を正の定数として，以下のスカラー関数 $V(\mathbf{x})$ を考える．

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) = & \frac{1}{2} k_1 J_m \dot{\theta}^2(t) \\ & + k_2 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dr + \frac{1}{2} \int_0^L \rho \kappa^2 \dot{\varphi}^2(t,r) dr \right. \\ & + \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{P}}^T \dot{\mathbf{P}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_\varphi \boldsymbol{\omega} \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L EI w''^2(t,r) dr \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L GJ [\varphi'(t,r) - \varphi_d'(r)]^2 dr \left. \right\} \\ & + \frac{1}{2} k_3 (\theta(t) - \theta_d)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

ただし，

$$\mathbf{x} = [\theta(t), \dot{\theta}(t), w(t,r), \dot{w}(t,r), \varphi(t,r), \dot{\varphi}(t,r), w_E(t), \dot{w}_E(t), \varphi_E(t), \dot{\varphi}_E(t), w'_E(t), \dot{w}'_E(t), w''(t,r), \varphi'(r,t)]^T$$

である．(19) 式において，右辺第1項はモータの回転エネルギーに対して k_1 の重み付けした項，第2項はモータの回転エネルギー以外のシステムの全エネルギー，すなわち，モータ負荷の全エネルギーに対して k_2 の重み付けした項，最終項は $\theta(t)$ が θ_d となるような制御則を導くために付け加えた人工ポテンシャルの項である．ここで，目標状態 $\mathbf{x}_d$ を，

$$\mathbf{x}_d = [\theta_d, 0, 0, 0, \varphi_d(r), 0, 0, 0, \varphi_d(L), 0, 0, 0, \varphi_d'(r)]^T \quad (20)$$

とおくと， $V(\mathbf{x}_d) = 0$ ， $V(\mathbf{x}) > 0 (\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_d)$ を満たすことがわかる．

いま，(19) 式を (6)–(13) 式の解軌道に沿って時間微分

すると,

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \dot{\theta}(t)\{k_1\tau(t) + (k_2 - k_1)EIw''(t,0) + k_3(\theta(t) - \theta_d)\} \quad (21)$$

となる. ここで, 入力トルク $\tau(t)$ として,

$$\tau(t) = -\left\{\frac{k_3}{k_1}(\theta(t) - \theta_d) + \frac{k_d}{k_1}\dot{\theta}(t) + \frac{k_2 - k_1}{k_1}EIw''(t,0)\right\} \quad (22)$$

とすれば,

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = -k_d\dot{\theta}^2(t) \leq 0 \quad (23)$$

が導かれ, V はリアプノフ関数となる. ただし, (22) 式で $k_d > 0$ とした. 入力トルク (22) は, $K_p = k_3/k_1$, $K_d = k_d/k_1$, $K_s = (k_2 - k_1)/k_1$ とおくことで,

$$\tau(t) = -K_p(\theta(t) - \theta_d) - K_d\dot{\theta}(t) - K_sEIw''(t,0) \quad (24)$$

と表される. ここで, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_3 > 0$, $k_d > 0$ より, $K_p > 0$, $K_d > 0$, $K_s > -1$ の条件が導かれる. また, 入力トルク (24) において, モータの角度 $\theta(t)$ はエンコーダ, 角速度 $\dot{\theta}(t)$ はタコジェネレータ, アームの根元での曲げモーメント $w''(t,0)$ はアーム根元に貼られた歪みゲージにより, それぞれ直接計測することができる. この制御入力 $\tau(t)$ はモータ角度の PD 制御に加え, 曲げ歪み (strain) 量を直接フィードバックすることから PDS 制御とよばれており, 物理パラメータに依存しない制御系となっている. すなわち, 物理パラメータの変化に対してロバストであると同時に, 本質的にスピルオーバー現象は起こらない. なお, $K_s = 0$ ($k_1 = k_2$) の場合には通常の PD 制御となる.

制御入力 (24) 式は, 先端荷重を質点と見なす場合, すなわちねじれ振動が発生しないので曲げ振動だけを考慮した場合に導出された PDS 制御 [7] と同じものである. この PDS 制御がねじれ振動を考慮した場合においても導出されたことについて以下に考察する. (8), (9), (12) 式から, 曲げ振動とねじれ振動は境界条件を介して結合していることがわかる. また, (6) 式のアーム根元での曲げモーメント $EIw''(t,0)$ の項から, 曲げ振動がモータの回転運動に対して反抗トルクとして影響していることがわかる. これらのことより, モータに影響する曲げ振動を直接制御することで, 結合する両方の振動を抑制できることがわかる. 以上のように, 分布定数系としてモデリングすることではじめて, 曲げ振動とねじれ振動が境界条件を通して連結しているといった固有のシステム構造が明らかになる.

4. 漸近安定性

提案制御則による閉ループ系の漸近安定性を, 従来と同様な手順 [10,11] で示す. すなわち, LaSalle の不変原理 [12] を用い, リアプノフ関数 $V(\mathbf{x})$ に対して, $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ を満たす集合に含まれる不変集合は $\mathbf{x}_d$ だけであることを示すことで, $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_d (t \rightarrow \infty)$ を示す. ただし, 本論文のような複雑な制御対象では, 従来の解析的な手法をそのまま適用できないため, 数値解析を用いた証明法を実施する.

(23) 式より, $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ となるのは, $\dot{\theta}(t) = 0$ のときであったことから, つぎの条件下で漸近安定性を証明する.

$$\dot{\theta}(t) = 0 \quad (\theta(t) = \theta_s = \text{const.}), \quad \ddot{\theta}(t) = 0 \quad (25)$$

4.1 不変集合における状態方程式

モータの回転方程式 (6) に入力トルク (22) を代入し, (25) 式を用いると, 以下の不変集合におけるモータの回転方程式が得られる.

$$w''(t,0) = -\frac{k_3}{k_2EI}(\theta_s - \theta_d) \quad (26)$$

さらに, 不変集合における振動方程式については, (7) 式に (25) 式を代入することで, リンクの曲げに関する偏微分方程式が,

$$\ddot{w}(t,r) + \frac{EI}{\rho}w''''(t,r) = 0 \quad (27)$$

として与えられ, このほか, リンクの曲げに関する境界条件は (8)–(10) 式, リンクのねじれに関する振動方程式は (11)–(13) 式のままである.

4.2 境界条件の同次化

不変集合における振動方程式 (27), (8)–(13) において, (12) 式が非同次な境界条件となっている. そこでこの境界条件を同次化するために, 以下の新しい変数を導入する.

$$v_1(t,r) = w(t,r) \quad (28)$$

$$v_2(t,r) = \varphi(t,r) + \frac{mge_y}{GJ}r \quad (29)$$

これらの新しい変数 (28), (29) を (27), (8)–(13) 式に代入することで, 以下の同次化された振動方程式を得る. リンクの曲げに関する振動方程式:

$$\ddot{v}_1(t,r) + \frac{EI}{\rho}v_1''''(t,r) = 0 \quad (30)$$

$$EI\left[\frac{m}{\rho}\{e_x v_1''''(t) + v_1''''(t)\} + v_1'''(t)\right] - \frac{mGJ}{\rho\kappa^2}e_z v_2''(t) = 0 \quad (31)$$

$$EI\left[\frac{-\{m(e_x^2 + e_y^2) + J_z\}}{\rho}v_1''''(t) - \frac{me_x}{\rho}v_1'''(t) + v_1''(t)\right] + (me_x e_z - J_{xz})\frac{GJ}{\rho\kappa^2}v_2''(t) = 0 \quad (32)$$

$$v_1(t,0)=0, \quad v_1'(t,0)=0 \quad (33)$$

リンクのねじれに関する振動方程式:

$$\ddot{v}_2(t,r) - \frac{GJ}{\rho\kappa^2} v_2''(t,r) = 0 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & -(me_x e_z - J_{xz}) \frac{EI}{\rho} v_{1E}''''(t) - \frac{mEI}{\rho} e_z v_{1E}''''(t) \\ & + \{m(e_y^2 + e_z^2) + J_x\} \frac{GJ}{\rho\kappa^2} v_{2E}''(t) \\ & + GJ v_{2E}'(t) = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$v_2(t,0)=0 \quad (36)$$

4.3 固有関数展開

(30)–(36) 式の解は、固有値 γ_n とそれに対応する固有関数 $\Psi_n(r) = [\psi_{1n}(r) \ \psi_{2n}(r)]^T$ を用いて以下で表される。

$$\begin{bmatrix} v_1(t,r) \\ v_2(t,r) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \begin{bmatrix} \psi_{1n}(r) \\ \psi_{2n}(r) \end{bmatrix} \nu_n(t) \quad (37)$$

ただし、固有値 γ_n と固有関数 $\Psi_n(r)$ については、詳細を付録1に示す。(37) 式の $\nu_n(t)$ は以下の微分方程式の解である。

$$\dot{\nu}_n(t) = -\gamma_n \nu_n(t), \quad n=1,2,\dots \quad (38)$$

この解は、 c_n, ϕ_n を定数とし、

$$\nu_n(t) = c_n \sin(\sqrt{\gamma_n} t + \phi_n), \quad n=1,2,\dots \quad (39)$$

で与えられる。これを(37)式に代入すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} v_1(t,r) \\ v_2(t,r) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \begin{bmatrix} \psi_{1n}(r) \\ \psi_{2n}(r) \end{bmatrix} c_n \sin(\sqrt{\gamma_n} t + \phi_n) \quad (40)$$

ここで、 $v_1(t,r)$ に対して空間に関する2回微分を行い、 $r=0$ とすると、

$$v_1''(t,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \psi_{1n}''(0) c_n \sin(\sqrt{\gamma_n} t + \phi_n) \quad (41)$$

が得られる。

4.4 平衡状態の解析と漸近安定性

(28) 式より、

$$v_1''(t,0) = w''(t,0) \quad (42)$$

となり、これと(26)式より、

$$v_1''(t,0) = -\frac{k_3}{k_2 EI} (\theta_s - \theta_d) = c_0 = \text{const.} \quad (43)$$

となる。この関係を用いれば(41)式は次式のように表される。

$$c_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{\gamma_n} \psi_{1n}''(0) \sin(\sqrt{\gamma_n} t + \phi_n) \quad (44)$$

(44) 式において、もし $\psi_{1n}''(0) \neq 0$ であれば¹、関数系 $\{1, \sin\sqrt{\gamma_1} t, \sin\sqrt{\gamma_2} t, \dots\}$ が一次独立であることから、任意の時刻 t において(44)式が成立するためには、 $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = 0$ でなくてはならない。これを(39)式に適用すれば、

$$\nu_n(t) = 0, \quad n=1,2,\dots \quad (45)$$

が得られ、(40)式より不変集合は平衡状態であることが分かる。(45)式を(37)、(43)式に適用すれば、

$$v_1(t,r) = 0, \quad v_2(t,r) = 0 \quad (46)$$

$$\frac{k_3}{k_2 EI} (\theta_s - \theta_d) = 0 \quad (47)$$

となり、 $\theta_s - \theta_d$ の係数が常に正であることから、

$$\theta_s = \theta_d \quad (48)$$

が成り立つ。つぎに、(46)式を(28)、(29)式に用いると、

$$w(t,r) = 0 \quad (49)$$

$$\varphi(t,r) = -\frac{mge_y}{GJ} r \quad (50)$$

が得られる。これより、 $w(t,r) = w_d(r)$ 、 $\varphi(t,r) = \varphi_d(r)$ が示される。

以上より、 $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ を唯一満たす $\dot{\theta} = 0$ のもとで得られた状態 $\mathbf{x}$ 、すなわち不変集合は目標状態 $\mathbf{x}_d$ 自身であるので、LaSalleの定理より $\mathbf{x}_d$ が漸近安定であることが示された。

5. 検証実験

PDS制御則の有効性、特に歪みフィードバックの制御効果を、Fig. 2に示す実験装置を用いて検証する。フレ

Fig. 2 Experimental apparatus

¹解析的な証明が難しいことから、小さな n に対しては数値解析から、十分大きな n に対しては漸近的な解析から、条件が成立する正当性を確認した。付録2に詳細を記す。

キシブルアームとして、長さ0.85[m]、厚さ2.85[mm]、幅40[mm]のアルミニウム板を用いた。剛体負荷として、長さ200[mm]、厚さ20[mm]、幅40[mm]、重量1.34[kg]の真鍮製の剛体を、 $\overline{O_3Q} = [0.02, 0.0065, -0.05]^T$ [m]となるように取り付けた。このほかの物理パラメータをTable 1に示す。また、駆動用モータとしてDDモータを用い、曲げモーメントとねじれモーメントの計測のために、歪ゲージをそれぞれ4枚ずつアームの根元に貼った。

Table 1 Physical parameters

Parameter	Value
L	0.85[m]
EI	5.43[Nm ²]
GJ	7.61[Nm ²]
ρ	0.307[kg/m]
$\rho\kappa^2$	4.11×10^{-5} [kgm]
J_m	0.137[kgm ²]
J_x	4.50×10^{-3} [kgm ²]
J_y	0[kgm ²]
J_z	2.23×10^{-4} [kgm ²]
J_{xz}	0[kgm ²]
m	1.34[kg]

目標回転角度 θ_d を0.1[rad]とし、平衡状態における目標のねじれモーメント $GJ\varphi'_d(0)$ は-0.0852[Nm]である。

目標角度へのステップ応答をFig. 3に、モータトルクへのインパルス外乱応答をFig. 4に示す。それぞれの結果は、図の上段からモータの回転角、曲げモーメント、ねじれモーメントの時間応答を表す。インパルス外乱として、時刻 $t=1$ [s]に大きさ5[Nm]のトルク外乱を0.1秒間与えた。フィードバックゲインは、PD制御の場合には $K_p=20$, $K_d=10$, PDS制御の場合には $K_p=20$, $K_d=10$, $K_s=5$ とした。PDS制御のゲインは、ステップ応答の振動減衰性と角度応答性の両方を考慮しながら、試行錯誤的に決めたものである。これらの結果より、PD制御に比べてPDS制御の振動抑制効果が大きいことがわかる。また、PDS制御では、曲げ振動だけでなくねじれ振動に対しても抑制効果が確認できる。ここでは示していないが、PD制御では、Dゲインを上げることで角度応答の立ち上がりが遅くなり、振動の励起が少なくなるが、励起された振動はなかなか減衰しないことが確認できる。また、PDS制御では、Sゲインを与えることで振動減衰効果が得られるが、Sゲインを大きくすると、振動励起を抑えるように回転速度が遅くなり、角度追従特性が劣化することが確認できる。

前章で明らかにしたように、本来、システム全体の漸近安定性はPD制御のみにより保証されている。しかし、歪み信号のフィードバックゲインを適切に選ぶことで、より優れた振動抑制効果が得られることが明らかに

Fig. 3 Experimental results (Step responses)

Fig. 4 Experimental results (Responses for disturbance)

なった。

6. あとがき

本論文では、先端に非対称な剛体負荷を持つフレキシブルアームの位置制御問題を考え、ダイナミクスベース制御に基づく出力フィードバック制御器を導出し、漸近安定性を証明した。制御器の有効性は、振動抑制効果の点から実験によって検証された。

導出された制御器は、モータ角度のPD制御に加え、アーム根元での歪み信号の直接フィードバックから構成されている。このように、曲げ・ねじれの結合振動系に

対して、ねじれモーメントの情報を制御器に用いることなく、漸近安定性が保証されることは、境界上において曲げ振動とねじれ振動が結合していることに起因する。しかしながら、結合振動の結合度合いは剛体負荷の取り付け位置 e_z と e_y に依存する。これらが小さくなれば剛体負荷がアームに対し対称に取り付けられた状態に近くなるため、曲げ歪のフィードバックだけではねじれ振動に対する抑制効果が劣化するものと考えられる。このようなシステム構造の特徴は、分布定数系として定式化したことで明らかになったと考えられる。

今後の課題として、PDS制御のフィードバックゲインの選定法、さらに、結合振動の抑制効果向上の点から、ねじれ情報のフィードバックも取り入れたダイナミクスベース制御の導出が考えられる。

参考文献

- [1] 金子編：フレキシブルアーム特集；日本ロボット学会誌，Vol. 6, No. 5, pp. 415–466 (1988)
- [2] 松野編：フレキシブル・マニピュレータ特集；日本ロボット学会誌，Vol. 12, No. 2, pp. 169–230 (1994)
- [3] Y. Sakawa and Z. H. Luo: Modeling and control of coupled bending and torsional vibrations of flexible beams; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-34, No. 9, pp. 970–977 (1989)
- [4] 羅，坂和：フレキシブルアームの曲げ・ねじり連成振動の制御実験；計測自動制御学会論文集，Vol. 27, No. 4, pp. 422–428 (1991)
- [5] 松野，村地，坂和：フレキシブル・ビームの曲げ・ねじり非結合性振動のフィードバック制御；システム制御情報学会論文誌，Vol. 5, No. 6, pp. 244–252 (1992)
- [6] 大須賀編：ミニ特集「メカニカルシステムに対する制御理論」；計測と制御，Vol. 40, No. 6, pp. 403–453 (2001)
- [7] 松野：柔軟構造物の制御；計測と制御，Vol. 35, No. 12, pp. 953–954 (1996)
- [8] 松野：機械システムのタスクディレクティブモデリング；システム/制御/情報，Vol. 42, No. 9, pp. 477–486 (1998)
- [9] 大須賀，松野：マニピュレータにおける受動性のロバスト性について；日本ロボット学会誌，Vol. 19, No. 1, pp. 75–80 (2001)
- [10] 松野，大野，田中：集中的および分布的柔軟性を持った大型宇宙構造物の分布定数制御（ばね結合した2本の柔軟ビームの場合）；計測自動制御学会論文集，Vol. 34, No. 12, pp. 1889–1896 (1998)
- [11] 松野，村田：先端負荷をもった2リンク柔軟アームのPDS制御；システム制御情報学会論文誌，Vol. 14, No. 1, pp. 26–32 (2001)
- [12] J. K. Hale: Dynamical systems and stability; *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 26, pp. 39–59 (1969)

付 録

付録 1. 固有値問題

(30)–(36) 式に対応する固有値問題は以下で表される。

$$\Psi(r) = [\psi_1(r), \psi_2(r)]^T \quad (A1)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EI}{\rho} \psi_1''''(r) \\ GJ \psi_2''(r) \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \end{bmatrix} \quad (A2)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= 0, \quad \psi_1'(0) = 0, \quad \psi_2(0) = 0 \\ EI \psi_1'''(L) &= -m\gamma(\psi_1(L) + e_x \psi_1'(L) + e_z \psi_2(L)) \\ EI \psi_1''(L) &= \gamma[m(e_x^2 + e_y^2) + J_z] \psi_1'(L) \\ &\quad + (me_x e_z - J_{xz}) \psi_2(L) \\ GJ \psi_2'(L) &= \gamma[me_z \psi_1(L) + (me_x e_z - J_{xz}) \psi_1'(L) \\ &\quad + \{m(e_y^2 + e_z^2) + J_x\} \psi_2(L)] \end{aligned}$$

ただし，

$$\gamma = \frac{EI}{\rho} \left(\frac{\beta}{L}\right)^4$$

である。ここで、この固有値問題から以下の固有方程式が得られる。

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}(\beta) & a_{12}(\beta) & a_{13}(\beta) \\ a_{21}(\beta) & a_{22}(\beta) & a_{23}(\beta) \\ a_{31}(\beta) & a_{32}(\beta) & a_{33}(\beta) \end{bmatrix} = 0 \quad (A3)$$

ただし，

$$\begin{aligned} a_{11}(\beta) &= \xi_{11} \beta^5 \Gamma_4(\beta) + \xi_{12} \beta^4 \Gamma_3(\beta) + \xi_{13} \beta^3 \Gamma_2(\beta) \\ a_{12}(\beta) &= \xi_{11} \beta^5 \Gamma_1(\beta) + \xi_{12} \beta^4 \Gamma_4(\beta) + \xi_{13} \beta^3 \Gamma_3(\beta) \\ a_{13}(\beta) &= \xi_{14} \beta^4 \sin \frac{\alpha \beta^2}{L} \\ a_{21}(\beta) &= \xi_{21} \beta^5 \Gamma_4(\beta) + \xi_{22} \beta^4 \Gamma_3(\beta) + \xi_{23} \beta^2 \Gamma_1(\beta) \\ a_{22}(\beta) &= \xi_{21} \beta^5 \Gamma_1(\beta) + \xi_{22} \beta^4 \Gamma_4(\beta) + \xi_{23} \beta^2 \Gamma_2(\beta) \\ a_{23}(\beta) &= \xi_{24} \beta^4 \sin \frac{\alpha \beta^2}{L} \\ a_{31}(\beta) &= \xi_{31} \beta^5 \Gamma_4(\beta) + \xi_{32} \beta^4 \Gamma_3(\beta) \\ a_{32}(\beta) &= \xi_{31} \beta^5 \Gamma_1(\beta) + \xi_{32} \beta^4 \Gamma_4(\beta) \\ a_{33}(\beta) &= \xi_{33} \beta^4 \sin \frac{\alpha \beta^2}{L} + \xi_{34} \beta^2 \cos \frac{\alpha \beta^2}{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= -\frac{me_x EI}{\rho L^5}, \quad \xi_{12} = -\frac{mEI}{\rho L^4}, \quad \xi_{13} = -\frac{EI}{L^3} \\ \xi_{14} &= \frac{me_z EI}{\rho L^4} \\ \xi_{21} &= \frac{\{m(e_x^2 + e_y^2) + J_z\} EI}{\rho L^5}, \quad \xi_{22} = \frac{me_x EI}{\rho L^4} \\ \xi_{23} &= -\frac{EI}{L^2}, \quad \xi_{24} = -\frac{(me_x e_z - J_{xz}) EI}{\rho L^4} \\ \xi_{31} &= \frac{(me_x e_z - J_{xz}) EI}{\rho L^5}, \quad \xi_{32} = \frac{me_z EI}{\rho L^4} \\ \xi_{33} &= -\frac{\{m(e_y^2 + e_z^2) + J_x\} EI}{\rho L^4}, \quad \xi_{34} = \frac{GJ\alpha}{L^2} \\ \alpha &= \kappa \sqrt{\frac{EI}{GJ}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_1(\beta_n) &= \sinh\beta_n + \sin\beta_n, & \Gamma_2(\beta_n) &= \cosh\beta_n + \cos\beta_n \\ \Gamma_3(\beta_n) &= \sinh\beta_n - \sin\beta_n, & \Gamma_4(\beta_n) &= \cosh\beta_n - \cos\beta_n\end{aligned}$$

である。したがって、 β が固有方程式 (A3) を満足する場合に限り、固有値問題 (A2) は非自明解を持つことがわかる。ここで、 β_n を $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \dots$ を満足する固有方程式 (A3) の解とすると、固有値 γ_n は、

$$\gamma_n = \frac{EI}{\rho} \left(\frac{\beta_n}{L} \right)^4, \quad n=1,2,\dots \quad (\text{A4})$$

となり、対応する固有関数は、

$$\Psi_n(r) = [\psi_{1n}(r) \quad \psi_{2n}(r)]^T \quad (\text{A5})$$

$$\begin{aligned}\psi_{1n}(r) &= \frac{1}{\hat{C}_n} \left\{ \sin \frac{\beta_n}{L} r - \sinh \frac{\beta_n}{L} r \right. \\ &\quad \left. + \mu_1(\beta_n) (\cos \frac{\beta_n}{L} r - \cosh \frac{\beta_n}{L} r) \right\} \quad (\text{A6})\end{aligned}$$

$$\psi_{2n}(r) = \frac{1}{\hat{C}_n} \mu_2(\beta_n) \sin \frac{\alpha \beta_n^2}{L^2} r \quad (\text{A7})$$

となる。ただし、 $\mu_1(\beta_n)$ 、 $\mu_2(\beta_n)$ は、

$$\mu_1(\beta_n) = \frac{a_{13}(\beta_n)a_{21}(\beta_n) - a_{11}(\beta_n)a_{23}(\beta_n)}{a_{12}(\beta_n)a_{23}(\beta_n) - a_{13}(\beta_n)a_{22}(\beta_n)} \quad (\text{A8})$$

$$\mu_2(\beta_n) = \frac{a_{12}(\beta_n)a_{21}(\beta_n) - a_{11}(\beta_n)a_{22}(\beta_n)}{a_{13}(\beta_n)a_{22}(\beta_n) - a_{12}(\beta_n)a_{23}(\beta_n)} \quad (\text{A9})$$

である。ここで、 $\hat{C}_n \neq 0$ は有界な任意の定数である。

付録 2. $\psi''_{1n}(0) \neq 0$ について

$\psi''_{1n}(0)$ は (A6) 式より、

$$\psi''_{1n}(0) = -\frac{2}{\hat{C}_n} \left(\frac{\beta_n}{L} \right)^2 \mu_1(\beta_n) \quad (\text{A10})$$

で与えられる。ここで、 $\psi''_{1n}(0) \neq 0$ を示すためには、固有方程式 (A3) を満たす β_n に対して、 $\mu_1(\beta_n) \neq 0$ であることを示せばよい。しかしながら、固有方程式ならびに $\mu_1(\beta_n)$ が複雑な式で表されることから、解析的な証明が困難である。そこで、最初の数モードに対して数値解析を、つぎに、高次モード、すなわち β_n が十分大きい場合に対して漸近的な解析を行うことで、 $\psi''_{1n}(0) \neq 0$ が成立する正当性を確認する。

(A8) 式より、 $\mu_1(\beta_n)$ を計算すると、

$$\mu_1(\beta_n) = \frac{\mu_1^N(\beta_n)}{\mu_1^D(\beta_n)} \quad (\text{A11})$$

$$\begin{aligned}\mu_1^N(\beta_n) &= \zeta_1^N \beta_n^6 \Gamma_1(\beta_n) + \zeta_2^N \beta_n^7 \Gamma_2(\beta_n) \\ &\quad + \zeta_3^N \beta_n^8 \Gamma_3(\beta_n) + \zeta_4^N \beta_n^9 \Gamma_4(\beta_n) \\ \mu_1^D(\beta_n) &= \zeta_1^D \beta_n^9 \Gamma_1(\beta_n) + \zeta_2^D \beta_n^7 \Gamma_2(\beta_n) \\ &\quad + \zeta_3^D \beta_n^6 \Gamma_3(\beta_n) + \zeta_4^D \beta_n^8 \Gamma_4(\beta_n)\end{aligned}$$

となる。ただし、 $\zeta_i^N, \zeta_i^D (i=1,2,3,4)$ は、物理パラメータからなる定数である。まず、第5章に示した実験装置の物理パラメータを用いて、(A11) 式を数値的に解析した結果を Table A1 に示す。これより、第1モードから

Table A1 Numerical analysis of $\mu_1(\beta)$

n	β_n	$\mu_1(\beta_n)$
1	0.84826	-0.85320
2	2.3907	-1.2825
3	3.7250	-0.98836
4	6.1938	-1.0034
5	8.5168	-0.99954
6	11.288	-1.0000
7	14.295	-1.0000
8	16.534	-1.0000
9	17.378	-1.0000
10	20.489	-1.0000

第10モードまで、 $\mu_1(\beta_n) \neq 0$ であることがわかる。

つぎに、 β_n が十分大きい場合について考える。このとき、 $\sinh\beta_n \cong \cosh\beta_n \cong \exp(\beta_n)/2$ 、さらに β_n の最高次が支配的な項と考えることができるので、

$$\mu_1(\beta_n) \cong \frac{\zeta_4^N \beta_n^9 \exp(\beta_n)}{\zeta_1^D \beta_n^9 \exp(\beta_n)} = \frac{\zeta_4^N}{\zeta_1^D} = -1$$

となる。ただし、

$$\zeta_4^N = -\zeta_1^D = \left(\frac{EI}{\rho} \right)^2 \frac{me_z(J_z + me_y^2)}{L^9}$$

である。この結果は、Table A1 の第6モード以降の結果に一致している。これより、 β_n が大きい場合にも、 $\mu_1(\beta_n) \neq 0$ が示される。