半正定値計画法を用いた LMS 適応フィルタの設計と アクティブ消音への応用*

若佐 裕治[†]・疋田 幹人[‡]・山本 裕[§]

LMS Adaptive Filter Design Using Semidefinite Programming and Its Application to Active Noise Control*

Yuji WAKASA[†], Mikito HIKITA[‡] and Yutaka YAMAMOTO[§]

The least mean square (LMS) algorithm has been widely used in adaptive signal processing applications, because of its simplicity and low complexity. This paper proposes a design method for an LMS-type algorithm which is robust in some sense and converges faster than the conventional LMS algorithm. The design problem is reduced to a semidefinite program which is an efficiently solvable optimization problem. Moreover the proposed design method is extended to the filtered-X LMS algorithm for active noise control, and an experimental result is provided to illustrate the effectiveness of the proposed method.

1. はじめに

LMS (Least Mean Square) アルゴリズムは適応フィルタの更新アルゴリズムであり、実装が容易であることや計算量が少ないことから、アクティブ消音システム、エコーキャンセラ、アレイアンテナなどさまざまな対象に適用され、実用化されている [1–3]。これまで LMS アルゴリズムの更新則と同じ構造をしたアルゴリズムとして、たとえば Sign LMS アルゴリズム、可変ステップサイズ LMS アルゴリズムなどが提案されており、アルゴリズムの収束性、ロバスト性が解析されてきた [1–5]。これらの LMS 型アルゴリズムにおける更新則には、調整すべきステップサイズパラメータがあり、通常、収束性が保証されるようにこのパラメータが設定される。しかし、いずれの LMS 型のアルゴリズムに対しても系統的にステップパラメータを設計するという研究はあまり行われていない [1]。

一方、LMS アルゴリズムは基本的に最急降下法を応用したアルゴリズムであり、必ずしも収束性のよい手法とはいえない [3,4]。LMS アルゴリズムの収束性は入力信号の自己相関行列に依存するが、ある程度この統計量を事前に推定することが可能な場合もある。たとえば、アクティブ消音システムでは、低減すべき騒音が入力信号に対応するが、定常的な騒音の場合、自己相関行列を事前に推定し、この情報を利用することが可能である。

本論文では、入力信号の自己相関行列の情報が事前に得られる場合に対して、これを利用した LMS 型適応フィルタの更新則の設計法を提案する。一般に自己相関行列を完全に知ることは難しいため、自己相関行列が与えられた集合に属する限りアルゴリズムが収束するようロバスト制御の手法を用いて、ステップサイズパラメータを設計する。設計問題は凸最適化問題の一種である半正定値計画問題に帰着されるが、これは近年開発された内点法に基づくアルゴリズムにより効率良く解くことができる [6,7]。また、提案アルゴリズムの計算量はステップサイズパラメータの構造に依存して決まるが、提案アルゴリズムは従来アルゴリズムよりもこのパラメータの自由度を活かしたものとなっている。そのため他の条件が同じならば、アルゴリズムのより高速な収束が期待される。本論文では、提案する LMS アルゴリズムをアクティブ消音システムに適用し、実験を通して有効性を検証する。

本論文の構成はつぎのとおりである。まず、2. で標準的な LMS アルゴリズムを説明し、簡単にその安定性、

* 原稿受付 2002 年 9 月 17 日

[†] 山口大学 工学部 Faculty of Engineering, Yamaguchi University; 2-16-1 Tokiwadai, Ube, Yamaguchi 755-8611, JAPAN

[‡] (株)富士通ビー・エス・シー Fujitsu Broad Solution and Consulting Inc.

[§] 京都大学 大学院 情報学研究科 Graduate School of Informatics, Kyoto University; Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501, JAPAN

Key Words: LMS algorithm, adaptive filtering, semidefinite programming, active noise control.

収束性について述べる．つぎに 3. で，半正定値計画法による LMS アルゴリズムの設計法を提案する．さらに，4. では提案する LMS アルゴリズムをアクティブ消音システムにおいて用いられる Filtered-X LMS (FXLMS) アルゴリズムに拡張し，5. でアクティブ消音システムに適用した実験結果をまとめる．

2. LMS アルゴリズム

2. では，標準的な LMS アルゴリズム，およびその収束性を述べる．Fig. 1 で示される適応アルゴリズムの典型的な枠組みを考える．未知システムは次式で表される 1 入力 1 出力離散時間システムであるとする．

Fig. 1 Typical framework of adaptive algorithms

$$y_k = \mathbf{w}_{\text{opt}}^T \mathbf{u}_k + v_k \quad (1)$$

ここで， u_k は入力信号， y_k は出力信号， v_k は u_k と独立な平均 0 のノイズであるとし， $\mathbf{u}_k$ と $\mathbf{w}_{\text{opt}}$ をつぎのように定義する．

$$\mathbf{u}_k = [u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-n+1}]^T$$

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$$

$\mathbf{w}_{\text{opt}}$ は FIR モデルで表現されるシステム (1) の係数ベクトルである．

システム (1) に対して，LMS アルゴリズムの目的はシステム (1) と構造の同じ FIR フィルタ

$$\hat{y}_k = \hat{\mathbf{w}}_k^T \mathbf{u}_k$$

の係数 $\hat{\mathbf{w}}_k$ を逐次的に推定し，評価関数 $J := e_k^2$ が最小化され， $\lim_{k \rightarrow \infty} E[\hat{\mathbf{w}}_k] = \mathbf{w}_{\text{opt}}$ が達成されるようにすることである [1,4]．ここで， e_k は出力誤差

$$e_k = y_k - \hat{y}_k$$

$$= y_k - \hat{\mathbf{w}}_k^T \mathbf{u}_k$$

である．このとき，評価関数 J はつぎのように $\hat{\mathbf{w}}_k$ の 2 次関数であることがわかる．

$$J = e_k^2$$

$$= y_k^2 - 2\hat{\mathbf{w}}_k^T \mathbf{u}_k y_k + \hat{\mathbf{w}}_k^T \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \hat{\mathbf{w}}_k$$

したがって， J の勾配は

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{w}}_k} = -2(\mathbf{u}_k y_k - \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \hat{\mathbf{w}}_k)$$

$$= -2\mathbf{u}_k (y_k - \mathbf{u}_k^T \hat{\mathbf{w}}_k)$$

$$= -2\mathbf{u}_k e_k \quad (2)$$

となる．この勾配を最急降下アルゴリズム [8] に代入して，つぎの LMS アルゴリズムの更新則を得る．

$$\hat{\mathbf{w}}_{k+1} = \hat{\mathbf{w}}_k + K \mathbf{u}_k e_k \quad (3)$$

これまで多くの種類の LMS アルゴリズムが提案されてきたが [5]，標準的な LMS アルゴリズムでは，正の $\mu \in \mathbb{R}$ に対して $K = \mu I$ とする．アルゴリズムの安定性や性能はステップサイズパラメータ μ に依存するので，これを適切に選ぶ必要がある．

従来の標準的な LMS アルゴリズムでは，各反復で必要な計算量は $O(n)$ であり，この計算量の少なさが LMS アルゴリズムの利点の一つである [4]．

2.1 LMS アルゴリズムの性能解析

ここでは，LMS アルゴリズムの安定性や収束性に関する重要な性質を簡単に述べる [1,4]．更新則 (3) の両辺から $\mathbf{w}_{\text{opt}}$ をそれぞれ引くと，

$$\hat{\mathbf{w}}_{k+1} - \mathbf{w}_{\text{opt}}$$

$$= \hat{\mathbf{w}}_k + K \mathbf{u}_k e_k - \mathbf{w}_{\text{opt}}$$

$$= (I - K \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T)(\hat{\mathbf{w}}_k - \mathbf{w}_{\text{opt}}) + K \mathbf{u}_k v_k \quad (4)$$

となる．このとき，つぎの仮定をおく．

(仮定 1) 係数ベクトル $\hat{\mathbf{w}}_k$ は入力信号 $\mathbf{u}_k$ に比べて十分ゆっくりと変化し，つぎの近似が成立する．

$$E[(I - K \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T)(\hat{\mathbf{w}}_k - \mathbf{w}_{\text{opt}})]$$

$$\approx E[I - K \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T] E[\hat{\mathbf{w}}_k - \mathbf{w}_{\text{opt}}]$$

この仮定のもとで，(4) 式の両辺の期待値をとると，

$$E[\hat{\mathbf{w}}_{k+1} - \mathbf{w}_{\text{opt}}] = E[I - K \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T] E[\hat{\mathbf{w}}_k - \mathbf{w}_{\text{opt}}]$$

を得る．したがって，離散時間システムの安定論より [6]， $\lim_{k \rightarrow \infty} E[\hat{\mathbf{w}}_k] = \mathbf{w}_{\text{opt}}$ が成り立つための必要十分条件は

$$\max_i |\lambda_i(I - KR)| < 1 \quad (5)$$

であるといえる．ここで， $\lambda_i(A)$ は行列 A の固有値を表し， $R := E[\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T]$ は入力信号の自己相関行列とする． R は半正定値対称行列であることに注意する．とくに，自己相関行列 R が正定値の場合，条件 (5) は $0 < \mu < 2/\lambda_{\max}(R)$ に等価である．ここで， $\lambda_{\max}(R)$ は R の最大固有値を示す．また，(5) 式の左辺の値が小さいほど，アルゴリズムはより速く収束することに注意する．

3. 半正定値計画法を用いた LMS 適応フィルタの設計

一般に、自己相関行列 R のようなシステムの入力信号の完全な統計的情報を得ることは不可能である。しかし、たとえばアクティブ消音システムにおいて、低減すべき騒音が定常的である場合、ある程度このような情報を推定することが可能である [1]。

3. では、入力信号の自己相関行列が

$$R = \bar{R} + \Delta$$

のように不確かさを含む場合でも、アルゴリズムの安定性と性能が保証されるような更新則 (3) の $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の設計法を提案する。ここで、 $\bar{R}$ はノミナルの自己相関行列であり、 Δ はつぎの集合に属する不確かさである。

$$\Delta(\gamma) := \{\Delta \in \mathbb{R}^{n \times n} : \Delta = \Delta^T, \|\Delta\| \leq \gamma\}$$

ただし、 $\|A\|$ は行列 A の最大特異値を表す。不確かさの大きさはパラメータ $\gamma > 0$ によって定まることに注意する。従来の標準的な LMS アルゴリズムでの K の構造は $K = \mu I$, $\mu \in \mathbb{R}$ であるが、3. では、 $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の構造をとくに限定しない。

2. の仮定 1 と同様に、 $\hat{w}_k$ は u_k よりも十分ゆっくりと変化し、つぎの近似が任意の $\Delta \in \Delta(\gamma)$ に対して成り立つとする。

$$E[\hat{w}_{k+1} - w_{\text{opt}}] \approx (I - K(\bar{R} + \Delta))E[\hat{w}_k - w_{\text{opt}}] \quad (6)$$

このとき、任意の $\Delta \in \Delta(\gamma)$ に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} E[\hat{w}_k] = w_{\text{opt}}$ が成り立つための必要十分条件は

$$\max_{\Delta \in \Delta(\gamma)} \max_i |\lambda_i(I - K(\bar{R} + \Delta))| < 1 \quad (7)$$

が成り立つことである。(7) 式の左辺

$$\max_{\Delta \in \Delta(\gamma)} \max_i |\lambda_i(I - K(\bar{R} + \Delta))| \quad (8)$$

は $E[\hat{w}_k - w_{\text{opt}}]$ の減衰率を示すので、 $E[\hat{w}_k]$ は (8) が小さい値をとるほど、より速く収束する。

このことに関連して、つぎの補題が成立する [6,9]。

【補題 1】 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して、

$$\max_i |\lambda_i(A)| < \rho$$

が成り立つための必要十分条件はある対称行列 X が存在して

$$A^T X A - \rho^2 X < 0, \quad X > 0$$

が成り立つことである。

補題 1 と Schur complement (付録 1.) から、 $E[\hat{w}_k]$ が収束するための必要十分条件は対称行列 X および $\rho^2 \leq 1$ が存在して、任意の $\Delta \in \Delta(\gamma)$ に対して

$$\begin{bmatrix} \rho^2 X & (I - K(\bar{R} + \Delta))^T X \\ X(I - K(\bar{R} + \Delta)) & X \end{bmatrix} > 0 \quad (9)$$

が成立することであるとわかる。また、 ρ は減衰率の上界に対応する。

この不確かさをもつ行列不等式に対して、つぎの補題を用いて不確かさを含まない行列不等式を導くことができる。

【補題 2】 $S_1 = S_1^T$, S_2 , S_3 および S_4 を実行列とし、そのサイズは適切に定められているとする。このとき、 $\|S_4\| < 1/\gamma$ が成立し、かつスカラー $\tau > 0$ が存在して

$$\begin{bmatrix} S_1 - \tau\gamma^2 S_2 S_2^T & S_3^T - \tau\gamma^2 S_2 S_4^T \\ S_3 - \tau\gamma^2 S_4 S_2^T & \tau(I - \gamma^2 S_4 S_4^T) \end{bmatrix} > 0$$

が成り立つならば、任意の $\Delta \in \Delta(\gamma)$ に対して $\det(I - S_4 \Delta) \neq 0$ かつ

$$S_1 + S_2 \Delta (I - S_4 \Delta)^{-1} S_3 + S_3^T (I - S_4 \Delta)^{-T} \Delta^T S_2^T > 0$$

が成り立つ。

(証明) 付録 2. 参照。 $\square$

ここで、更新則における K を設計するために有効なつぎの定理を得る。

【定理 1】 更新則 (3)、および任意の $\Delta \in \Delta(\gamma)$ に対して (6) 式が成り立つとする。このとき、対称行列 X 、および $\tau \in \mathbb{R}$, $\rho^2 \leq 1$ が存在して、

$$\begin{bmatrix} \rho^2 X - \tau\gamma^2 I & (I - K\bar{R})^T X & 0 \\ X(I - K\bar{R}) & X & -XK \\ 0 & -K^T X & \tau I \end{bmatrix} > 0 \quad (10)$$

が成り立つならば、 $\lim_{k \rightarrow \infty} E[\hat{w}_k] = w_{\text{opt}}$ が成り立つ。

(証明)

$$\begin{aligned} S_1 &:= \begin{bmatrix} \rho^2 X & (I - K\bar{R})^T X \\ X(I - K\bar{R}) & X \end{bmatrix}, \\ S_2 &:= \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \\ S_3 &:= [0 \quad -K^T X], \\ S_4 &:= 0 \end{aligned}$$

として 補題 2 を適用すればよい。 $\square$

定理 1 から、なるべく小さな正の数 $\rho \leq 1$ に対して、(10) 式を満たす X , K , および τ を見つけることで、速く収束する更新則を設計することができる。しかし、(10) 式を直接数値的に解くことは容易ではないので、新たな変数 $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $H := XK$ を導入し、ロバスト制御における数値的手法 [6] を適用する。すなわち、

$$\begin{bmatrix} \rho^2 X - \tau\gamma^2 I & X - \bar{R}^T H^T & 0 \\ X - H\bar{R} & X & -H \\ 0 & -H^T & \tau I \end{bmatrix} > 0 \quad (11)$$

を満たす対称行列 X と正方行列 H , スカラー γ を計算し, $K = X^{-1}H$ を設計する.

不等式(11)はいわゆるLMI (Linear Matrix Inequality) であり, 近年開発された内点法に基づくソルバーによって, 効率よく解くことができる[10].

一方で, 仮定1は $\hat{w}_k$ が u_k に比べて十分ゆっくりと変化するということを要求するため, $\hat{w}_k$ の高速な収束性という設計目的に矛盾している. ここに更新則の設計におけるトレードオフが存在する. このトレードオフを考慮するために, つぎの不等式が成り立つことに注意して, $\hat{w}_k$ が緩やかに更新されるように $\|X^{-1}\|$ と $\|H\|$ の値を小さくすることを考える.

$$\begin{aligned}\|\hat{w}_{k+1} - \hat{w}_k\| &\leq \|K\| \|u_k e_k\| \\ &\leq \|X^{-1}\| \|H\| \|u_k e_k\|\end{aligned}$$

Schur complement (付録 1.) から, $\|X^{-1}\| \leq \alpha$ および $\|H\| \leq \beta$ が成り立つための必要十分条件は

$$\begin{bmatrix} \alpha I & I \\ I & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (12)$$

および

$$\begin{bmatrix} \beta^2 I & H^T \\ H & I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (13)$$

がそれぞれ成り立つことであるとわかる.

以上まとめると, 与えられた設計パラメータ ρ, γ, α に対して, つぎの半正定値計画問題を解いて $K = X^{-1}H$ を設計すればよいということになる. 半正定値計画問題とはLMIを制約条件とし, 線形目的関数を最小化する最適化問題である[7].

【問題 1】 LMI (11), (12), (13) の制約のもとで, β^2 を最小化せよ.

(注意 1) $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が密な行列であるとき, 更新則(3)の計算において, $O(n^2)$ の計算量が必要とされる. この計算量を低減するために, 密な正方行列 K の代わりに, $K = \text{diag}(K_1, \dots, K_r)$, $K_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, i=1, \dots, r$, $\sum_{i=1}^r n_i = n$ で表されるブロック対角行列を用いることができる. この場合, 設計問題を上述の半正定値計画問題に帰着するために, X と H の構造は K と同じ構造とする必要がある. とくに K を対角行列とした場合, 提案アルゴリズムの計算量は従来の標準的なLMSアルゴリズムの計算量と同じであるが¹, 対角要素は同じ値をとるとは限らないため, 従来のLMSアルゴリズムよりもステップサイズパラメータの自由度を活かしたものとなっていることに注意する.

(注意 2) 入力信号の自己相関行列のノミナル値が事

前情報として利用できる場合, その逆行列を事前に求めてこれを K とすることが考えられる. しかしこの場合, 通常 $\|K\|$ が大きくなり, その結果仮定1を満たさなくなる. また, 仮定1を満たす程度に十分 $\|K\|$ が小さい場合でも一般にそのような K は非対角構造をしており, 更新則における計算量は $O(n^2)$ となる. したがって, このような方法は有効ではなく, 提案法のように更新則における計算量 (すなわち K のブロック対角構造) と収束速度とのトレードオフを考慮することが必要である.

4. FXLMS アルゴリズムへの応用

アクティブ消音とは, 騒音に対してその同振幅, 逆位相の制御音を干渉させることで騒音を能動的に低減化する技術である. その有効な方法として, LMS 法を拡張した FXLMS 法があり, しばしば用いられている[1,11-13]. 4. では, これまでに提案したLMSアルゴリズムをFXLMSアルゴリズムに拡張する.

Fig. 2 に示されるダクト内のアクティブ消音システムを考える. このアクティブ消音システムに対する標準的なFXLMS法のブロック線図をFig. 3 に示す[1]. 時刻 k において, 騒音 u_k と誤差信号 e_k は, それぞれマイク1と2によって観測される. v_k を平均0で u_k と独立なノイズであるとする. また, スピーカからマイク2までの伝達経路 G を十分な精度で近似するモデル $\hat{G}$ がオフラインで得られると仮定し, $\hat{G}$ は係数ベクトル

$$\hat{g} = [\hat{g}_0, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_m]^T$$

をもつFIRフィルタによって表されるとする.

FXLMSアルゴリズムの目的はFIRフィルタ $\hat{W}_k$ の

Fig. 2 Active noise control system

Fig. 3 Block diagram of the FXLMS algorithm

¹提案アルゴリズムも従来の標準的なLMSアルゴリズムも計算量はともに $O(n)$ であるが, 更新則における乗算回数はそれぞれ $3n, 2n+1$ である.

係数ベクトル $\hat{\mathbf{w}}_k$ をつぎのように更新することによって、 e_k^2 を最小化することである。

$$\hat{\mathbf{w}}_{k+1} = \hat{\mathbf{w}}_k + K \xi_k e_k \quad (14)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \xi_k &= [\hat{\mathbf{g}}^T \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{g}}^T \mathbf{u}_{k-1}, \dots, \hat{\mathbf{g}}^T \mathbf{u}_{k-n+1}]^T \\ \mathbf{u}_k &= [u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-m+1}]^T \end{aligned}$$

であり、標準的な FXLMS アルゴリズムでは $K = \mu I$, $\mu > 0$ である。3. と同様に、つぎの仮定が満たされるとする。

(仮定 2) 係数ベクトル $\hat{\mathbf{w}}_k$ は信号 ξ_k に比べて十分ゆっくりと変化し、つぎの近似が成立する。

$$\begin{aligned} E[(I - K \xi_k \xi_k^T)(\hat{\mathbf{w}}_k - \mathbf{w}_{\text{opt}})] \\ \approx E[I - K \xi_k \xi_k^T] E[\hat{\mathbf{w}}_k - \mathbf{w}_{\text{opt}}] \end{aligned}$$

仮定 2 は仮定 1 と同様、 $\hat{\mathbf{w}}_k$ が $\mathbf{u}_k$ に比べて十分ゆっくりと変化するとき満たされる。このとき、 $\lim_{k \rightarrow \infty} E[\hat{\mathbf{w}}_k] = \mathbf{w}_{\text{opt}}$ が成り立つための必要十分条件は

$$\max_i |\lambda_i(I - KR)| < 1 \quad (15)$$

が満たされることである。ここで、 $R := E[\xi_k \xi_k^T]$ は ξ_k の自己相関行列であり、 $\mathbf{w}_{\text{opt}}$ は最適な係数である [1]。条件 (15) は LMS アルゴリズムにおいて導出された条件 (5) と同じであるので、FXLMS アルゴリズムの更新則 (14) を 3. で提案した設計法を用いて同様に設計することができる。

5. アクティブ消音実験

Fig. 4 に中空円筒状の塩化ビニルパイプで構成されるアクティブ消音の実験システムを示す。騒音はスピーカ 1 から発生させる。このシステムにおいて、スピーカ 2 からマイク 1 までの経路はそれほど長くないので、この経路の影響を無視することはできない。そのため、この経路を G_2 とし、経路 G_2 のモデル $\hat{G}_2$ を Fig. 5 に示すように加えて、アクティブ消音システムを変更する [1]。Fig. 5 において、 $\hat{G}_1$ はスピーカ 2 からマイク 2 までの経路 G_1 のモデルを示す。

実験において、サンプリング周期は 500 ms とし、低減すべき騒音は 100 Hz から 400 Hz のランダムな合成正弦波として、MATLAB の System Identification Toolbox の `idinput` により生成した。Fig. 6 はその騒音信号の 400 ステップまでを表している。FIR モデル $\hat{W}_k$, $\hat{G}_1$ および $\hat{G}_2$ の次数は $m = n = 99$ とした。

まず、オフラインの LMS 法によるシステム同定によって、モデル $\hat{G}_1$, $\hat{G}_2$ を求める。その結果を Fig. 7 に示す。実線は得られた離散時間システム $\hat{G}_1, \hat{G}_2$ の周波数応答であり、破線は実際の経路 G_1, G_2 に対する単一周波数の正弦波のスキャンによる周波数応答である。

Fig. 4 Schematic diagram of the experimental active noise control system

Fig. 5 Block diagram of the active noise control system with feedback

Fig. 6 Primary noise

つぎに、提案した FXLMS 設計法によって、更新則を設計する。ここでは K を対角行列とする。パラメータは $\rho = 1 - 1.0e^{-11}$, $\gamma = 1.0e^{-10}$, $\alpha = 0.2$ とし、事前に推定したノミナルの自己相関行列 $\hat{R}$ を用いた。その結果、提案アルゴリズムにおける K の対角要素は 0.0113 から 0.0132 の間の値をとり、平均は 0.012 となった。それに対して、従来の標準的な LMS アルゴリズムのステップパラメータ μ を 0.012 と設定した。

Fig. 8 は提案法と従来法に対する $|e_k|$ を表している。

Fig. 7 Identification results; (a) Frequency response of G_1 (dash) and $\hat{G}_1$ (solid); (b) Frequency response of G_2 (dash) and $\hat{G}_2$ (solid)

消音は $k=10000$ で開始した。また、1000 ステップごとに $|e_k|$ の平均をとって表示している。 e_k が定常状態になったとき、提案法と従来法に対する e_k の分散は、それぞれ 2.060×10^{-4} , 2.079×10^{-4} となった。一般に、収束の速さと収束後の分散にはトレードオフが存在するが、提案アルゴリズムは従来アルゴリズムに比べて、 e_k の分散はほぼ同じ（わずかに小さい）にもかかわらず、収束が速くなっていることがわかる。 $k=60000 \sim 120000$ では、 $|e_k|$ の収束時間に関して約 30% の短縮がみられる。 Fig. 9 に提案法に対する定常状態での周波数領域における消音効果を示す。

6. おわりに

本論文では、従来の LMS アルゴリズムよりも一般的な構造をもつ更新則の設計法を提案した。また、提案法をアクティブ消音で用いられる FXLMS 法に拡張し、実

Fig. 8 Convergence of $|e_k|$; the proposed method (solid) and the conventional method (dash)

Fig. 9 Steady-state performance in frequency domain with control (solid) and without control (dash)

験を通して、このアルゴリズムの有効性を示した。これまでの LMS アルゴリズムでは、更新則の K は基本的に $K = \mu I$ の形をしているが、提案法により設計者はオンラインでの計算量と収束性のトレードオフを考慮して K のブロック対角構造を柔軟に選択することが可能である。

また、本論文では標準的な LMS アルゴリズムと提案アルゴリズムとの比較を行ったが、これまで LMS アルゴリズムのさまざまな改善法が提案されており、これらとのさらなる比較検討を行うことは今後の課題である。

参考文献

- [1] S. M. Kuo and D. R. Morgan: *Active Noise Control Systems, Algorithms and DSP Implementations*, John Wiley & Sons (1996)
- [2] 酒井：信号処理，オーム社 (1998)
- [3] 飯國：適応信号処理アルゴリズム，培風館 (2000)
- [4] S. Haykin: *Adaptive Filter Theory*, 3rd ed., Prentice-Hall (1996)
- [5] W. A. Sethares: The least mean square family; *Adap-*

- tive System Identification and Signal Processing Algorithms* (N. Kalouptsidis and S. Theodoridis, Eds.), pp. 84–122, Prentice-Hall (1993)
- [6] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM (1994)
- [7] L. Vandenberghe and S. Boyd: Semidefinite programming; *SIAM Review*, Vol. 38, No. 1, pp. 49–95 (1996)
- [8] 今野, 山下: 非線形計画法, 日科技連 (1978)
- [9] 岩崎: LMI と制御, 昭晃堂 (1997)
- [10] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali: *LMI Control Toolbox, For Use with MATLAB*, The MathWorks, Inc. (1995)
- [11] B. Widrow and S. D. Stearns: *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall (1985)
- [12] S. J. Elliott and P. A. Nelson: Active noise control; *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 10, No. 4, pp. 12–35 (1993)
- [13] P. A. Nelson and S. J. Elliott: *Active Control of Sound*, Academic Press (1995)
- [14] L. El Ghaoui and H. Lebre: Robust solutions to least-squares problems with uncertain data; *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*, Vol. 18, No. 4, pp. 1035–1064 (1997)

付 録

付録 1. Schur complement[6,9]

【補題 3】 実対称行列 Θ が与えられたとする。このとき、つぎの命題は等価である。

- (a) $\Theta := \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{12}^T & \Theta_{22} \end{bmatrix} > 0$
- (b) $\Theta_{11} > 0$ かつ $\Theta_{22} - \Theta_{12}^T \Theta_{11}^{-1} \Theta_{12} > 0$
- (c) $\Theta_{22} > 0$ かつ $\Theta_{11} - \Theta_{12} \Theta_{22}^{-1} \Theta_{12}^T > 0$

付録 2. 補題 2 の証明

補題 2 とつぎに示す参考文献 [14] の Lemma 2.2 との相違点は不等式の符号, $\gamma=1$ としていること, および Δ の対称性である。

【補題 4】 ([14], Lemma 2.2) $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_1^T, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3$ および $\tilde{S}_4$ を実行列とし, そのサイズは適切に定められているとする。このとき, 任意の $\tilde{\Delta}, \|\tilde{\Delta}\| \leq 1$ に対して $\det(I - \tilde{S}_4 \tilde{\Delta}) \neq 0$ かつ

$$\begin{aligned} & \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 \tilde{\Delta} (I - \tilde{S}_4 \tilde{\Delta})^{-1} \tilde{S}_3 \\ & + \tilde{S}_3^T (I - \tilde{S}_4 \tilde{\Delta})^{-T} \tilde{\Delta}^T \tilde{S}_2^T \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

が成り立つための必要十分条件は $\|\tilde{S}_4\| < 1$ が成立し, かつスカラー $\tau \geq 0$ が存在して

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_1 - \tau \tilde{S}_2 \tilde{S}_2^T & \tilde{S}_3^T - \tau \tilde{S}_2 \tilde{S}_4^T \\ \tilde{S}_3 - \tau \tilde{S}_4 \tilde{S}_2^T & \tau (I - \tilde{S}_4 \tilde{S}_4^T) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{A2})$$

が成り立つことである。

補題 4 に対して, 不等式 (A1), (A2) および $\tau \geq 0$ の符号が等号を含まない場合は, 補題 4 の証明 [14] と同様にして容易に示せる。あとは, $\tilde{\Delta} := 1/\gamma \Delta, \tilde{S}_1 := S_1, \tilde{S}_2 := \gamma S_2, \tilde{S}_3 := S_3, \tilde{S}_4 := \gamma S_4$ とおき直し, Δ が対称行列に限定されていることに注意すれば, 補題 2 を示すことができる。