定常ゲインを考慮したモデル低次元化手法と その電力系統縮約への応用*

桑原 丈[†]・細川 琢磨[†]・蛭原 義雄[†]・萩原 朋道[†]・森岡 靖夫[‡]

Model Reduction Method Preserving the Steady-State Gain and Its Application to Electric Power Systems*

Joe KUWABARA[†], Takuma HOSOKAWA[†], Yoshio EBIHARA[†],
Tomomichi HAGIWARA[†] and Yasuo MORIOKA[‡]

This paper is concerned with a model reduction method taking account of the steady-state gain, while keeping the H^∞ norm of the associated error system as small as possible with the LMI optimization technique. Taking account of the steady-state gain leads to decreasing the integrated square error between the step response of the original system and that of the reduced order system. The proposed method is applied to the reduction of the model of a multi-machine electric power system to demonstrate its effectiveness.

1. はじめに

近年、制御対象や制御装置の大規模・複雑化に伴い、モデルや制御装置に対する低次元化の必要性とともに、その際の近似精度に対する要求も高くなってきている。本論文では、モデル低次元化の際の近似精度として、ステップ応答の二乗積分誤差と加法的誤差システムの H^∞ ノルムに着目し、これらをともに小さく抑えることのできる新たなモデル低次元化手法を提案する。

モデル低次元化については様々な手法が考案されているが、なかでも比較的low次元化モデル導出の過程がわかりやすく、かつ近似精度の高い手法に、内部平衡実現に基づいた手法[1]がある。これには、高次モデルの状態空間から可制御性および可観測性の弱い状態空間を単純に削除する打ちきり法と、状態空間を削除する際にシステムの定常ゲインに関する情報を残す特異摂動法の考え方を利用した手法とがある。後者では、定常ゲインが保存され、ステップ応答の二乗積分誤差が小さく抑えられる。しかしこの際、定常ゲインを保存する過程で直達項が変化し、強プロパーなシステムに対して低次元化モデルはこの特性を失ってしまうことになる。また一般には、

誤差システムの H^∞ ノルムを小さく抑えることはできない。

一方、何らかの手法によって得られている低次元化モデルに対して線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality: LMI) 最適化問題の解を用いた修正を繰り返し施すことによって、加法的誤差システムの H^∞ ノルムをできるだけ小さく抑えることのできるモデル低次元化手法が参考文献[2]で提案されている。

そこで本論文では、この参考文献[2]で提案されている手法を改良し、元のシステムの定常ゲインと低次元化モデルのそれとを一致させつつ、加法的誤差システムの H^∞ ノルムをできるだけ小さく抑えることのできるモデル低次元化手法を提案する。

また、提案したモデル低次元化手法を参考文献[3]で扱われている電力系統モデルの縮約に応用し、その結果から提案した手法の有効性を検証する。

2. 内部平衡実現に基づくモデル低次元化手法

本論文で提案するモデル低次元化手法は、内部平衡実現に基づく手法で得られた低次元化モデルを、より近似精度の高い低次元化モデルに修正するというものである。そこで本論に入る前に、内部平衡実現に基づくモデル低次元化手法[1]について、その概要を述べておく。

2.1 内部平衡実現

モデル低次元化の際には、低次元化の前後において、システムの入出力特性はできる限り残されているのが望

* 原稿受付 2002年12月18日

[†] 京都大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Kyoto University; Yoshida-Honmachi, Sakyo ward, Kyoto city, Kyoto 606-8501, JAPAN

[‡] 関西電力(株) The Kansai Electric Power Co., Inc.

Key Words: model reduction, the steady-state gain, LMI, H^∞ norm, electric power systems.

ましい。入出力特性をできるだけ変えることなく、与えられたモデルを低次元化する方法として、可制御性、可観測性が相対的に弱い状態を削除するという方法が考えられる。このような考え方により低次元化を行おうとする場合、可制御性、可観測性の両者の度合を考慮する必要がある。両者の度合は状態の座標の選び方に依存しているため、適当な座標変換を行うことによって、対象となっているシステムを、可制御性と可観測性がバランスされた規格化システムに変換することができる[4]。この変換によって得られる実現あるいは変換を内部平衡実現という。

次式で表される m 入力 l 出力 n 次の安定なモデルを考える。

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad (1)$$

以下、このシステムは可制御かつ可観測とし、 $G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ と表すことにする。このシステムに対する内部平衡実現の手順を以下に示す[4]。

Step 1 可制御性グラミアン $P > 0$ 、可観測性グラミアン $Q > 0$ をリアプノフ方程式から計算する。

Step 2 $P = R^T R$ となる行列 R を計算する。

Step 3 RQR^T を特異値分解し、 $RQR^T = U\Sigma^2U^T$ を得る。ここで、 U は直交行列である。

Step 4 $T^{-1} = R^T U \Sigma^{-1/2}$ として、システムを $G(s) = \begin{bmatrix} TAT^{-1} & TB \\ CT^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ と変換する。

以上の手順で得られたシステムに対する可制御性グラミアン $\tilde{P} = TPT^T$ 、可観測性グラミアン $\tilde{Q} = (T^T)^{-1}QT^{-1}$ はいずれも Σ に一致し ($\tilde{P} = \tilde{Q} = \Sigma$)、このシステムは内部平衡実現あるいは内部平衡型システムとよばれる。

2.2 内部平衡実現されたモデルに対する低次元化

前項より、安定で最小実現となっているシステムは、一般性を失うことなく内部平衡実現されているとして扱うことができる。すなわち、

$$A\Sigma + \Sigma A^T + BB^T = 0 \quad (2)$$

$$A^T\Sigma + \Sigma A + C^TC = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1 I_{S_1}, \sigma_2 I_{S_2}, \dots, \sigma_N I_{S_N}) \quad (4)$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_p \gg \sigma_{p+1} > \dots > \sigma_N \quad (5)$$

を満たす内部平衡グラミアン Σ が存在する。この Σ を

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1 I_{S_1}, \sigma_2 I_{S_2}, \dots, \sigma_p I_{S_p}) \quad (7)$$

$$\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{p+1} I_{S_{p+1}}, \dots, \sigma_N I_{S_N}) \quad (8)$$

と分割し、これに対応してシステムの係数行列を次式のように分割する。

$$G(s) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

このとき、 Σ_1, Σ_2 が共通の対角要素を持たないことにより、二つのサブシステム (A_{ii}, B_i, C_i) , $i=1,2$ は漸近安定となることが知られている[4]。

(9)式において、 Σ_2 に対応するサブシステムを削除し、 Σ_1 に対応するサブシステムを抽出すると次式のシステム $G_r(s)$ を低次元化モデルとして得る。

$$G_r(s) = \begin{bmatrix} A_{11} & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

このように Σ_2 に対応するサブシステムを削除し、 Σ_1 に対応するサブシステムによってシステムを近似する手法を、本論文では打ちきり法とよぶ。

つぎに、削除する状態の状態方程式から、その定常状態における情報を求め、それを元のシステムの状態方程式に代入する特異摂動法の考え方を利用して低次元化モデルを得ることを考える。まず、(9)式において $\dot{x}_2 = 0$ とおくと、 (A_{22}, B_2, C_2) が漸近安定であることから A_{22} は正則であるので、削除する状態の定常状態における情報として

$$x_2 = -A_{22}^{-1}A_{21}x_1 - A_{22}^{-1}B_2u \quad (11)$$

を得る。これを抽出するサブシステムの状態方程式

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \quad (12)$$

$$y = C_1x_1 + C_2x_2 \quad (13)$$

に代入すると次式で与えられる低次元化モデルが得られる。

$$G_r(s) = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \\ C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21} & -C_2A_{22}^{-1}B_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

このように削除する状態の定常状態に関する情報を低次元化モデルに残すモデル低次元化手法を、本論文では簡単のため特異摂動法とよぶことにする。この手法では、低次元化モデルの定常ゲインが元のシステムのそれに一致するため、打ちきり法と比較して、ステップ応答の誤差を小さく抑えることができる。しかし、定常ゲインを保存する過程で、低次元化モデルの直達項が元のシステムのそれとは異なったものとなり、システムの特徴が変わってしまうため望ましくない。本論文では、提案するモデル低次元化手法を電力系統の縮約に応用しようとしており、この電力系統では直達項が0となっている。そのため、低次元化モデルの直達項も0であることが望ましい。

よって本論文では、特異摂動法は提案する手法の有効性を検証する際の比較対象としてのみ用いる。以降では、元のモデルおよび低次元化モデルの直達項を0とし、打

ちきり法で得られた低次元化モデルを修正して低次元化モデルの定常ゲインを元のモデルのそれに一致させることを考える。

3. 定常ゲインを考慮した従来のモデル低次元化手法とその拡張

3.1 LMI最適化を用いたモデル低次元化手法

本項では、新たなモデル低次元化手法を提案する準備として、まず定常ゲインを考慮しない場合について、誤差システムの H^∞ ノルムをできるだけ小さく抑えることのできるモデル低次元化手法[2]について述べる。

安定な元のモデル

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (15)$$

$$A \in \mathcal{R}^{n \times n}, B \in \mathcal{R}^{n \times m}, C \in \mathcal{R}^{l \times n}$$

に対して安定な低次元化モデル

$$G_r(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & 0 \end{array} \right] \quad (16)$$

$$A_r \in \mathcal{R}^{k \times k}, B_r \in \mathcal{R}^{k \times m}, C_r \in \mathcal{R}^{l \times k} \quad (17)$$

が得られているとする。ただし $k < n$ である。ここで本論文では、元のモデルと低次元化モデルとの加法的誤差システム $E(s) = G(s) - G_r(s)$ を考え、次式で表現する。

$$E(s) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ 0 & A_r & B_r \\ \hline C & -C_r & 0 \end{array} \right] \quad (18)$$

この誤差システム $E(s)$ の H^∞ ノルムを最小にするような $G_r(s)$ は、可能なだけ小さい γ に対して、次の不等式を満たす (A_r, B_r, C_r) を求める最適化問題を解くことによって得られる。

$$\|E(s)\|_\infty < \gamma \quad (19)$$

さらに、有界実補題より次の二つの条件はいずれも(19)式と等価である[5]。

- 次式を満たす $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} > 0$ が存在する。

$$\left[\begin{array}{cc|c} A^T P_{11} + P_{11} A & A^T P_{12} + P_{12} A_r & \\ A_r^T P_{12}^T + P_{12}^T A & A_r^T P_{22} + P_{22} A_r & \\ B^T P_{11} + B_r^T P_{12}^T & B^T P_{12} + B_r^T P_{22} & \\ \hline C & -C_r & \\ & P_{11} B + P_{12} B_r & C^T \\ & P_{12}^T B + P_{22} B_r & -C_r^T \\ & -\gamma I & 0 \\ & 0 & -\gamma I \end{array} \right] < 0 \quad (20)$$

- 次式を満たす $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} > 0$ が存在する。

$$\left[\begin{array}{cc|c} AX_{11} + X_{11} A^T & AX_{12} + X_{12} A_r^T & \\ A_r X_{12}^T + X_{12}^T A^T & A_r X_{22} + X_{22} A_r^T & \\ \hline CX_{11} - C_r X_{12}^T & CX_{12} - C_r X_{22} & \\ & B_r^T & \\ & X_{11} C^T - X_{12} C_r^T & B \\ & X_{12}^T C^T - X_{22} C_r^T & B_r \\ & -\gamma I & 0 \\ & 0 & -\gamma I \end{array} \right] < 0 \quad (21)$$

ここで(20), (21)式において、行列 A_r, B_r, C_r, P, X をすべて変数とすると、これらは線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality: LMI) とはならず、効率よく解くことができない。そこで、各式において適当な二つの行列を固定することにより、この問題を解決する。すなわち、 A_r, B_r を固定して考えると、(20)式は、 C_r, P を変数とするLMIとなり、一方、 A_r, C_r を固定して考えると、(21)式は、 B_r, X を変数とするLMIとなり、それぞれ効率よく解くことが可能となる。よって、これら二つのLMIを交互に解いて(19)式の γ を最小化し、低次元化モデルを繰り返し修正していくという手法を考えることができる[2]。なおこの手法では、修正の際、 γ が単調非増加であることが保証されており、リアプノフ変数 P, X の要素がすべてLMIの変数となっているため、各段階において得られた γ の値はそのときの低次元化モデルに対応した $\|E(s)\|_\infty$ に一致する。

参考文献[2]では、(20), (21)式において、固定する二つの行列を P_{12}, P_{22} または X_{12}, X_{22} と選べば、低次元化モデルの係数行列 A_r, B_r, C_r のすべてを変数として、LMI最適化問題を解くことが可能であるということも述べられている。しかし本論文では、定常ゲインが元のモデルのそれに一致するような低次元化モデルを求める問題を考えており、 A_r, B_r, C_r のすべてを変数とした場合、そのような低次元化モデルを導くことは容易ではない。よって本論文では、 A_r, B_r, C_r のすべてを変数として(20), (21)式を扱うことはしない。

3.2 LMI最適化に基づく定常ゲインを考慮したモデル低次元化手法

本項では、3.1の手法を改良することにより、定常ゲインを考慮しつつLMI最適化を用いて誤差ノルムを小さく抑える手法について述べる。

3.2.1 入力、出力行列の修正に基づく手法

いま、(15)式で与えられる元のモデルに対して、内部平衡実現打ちきり法などによって(17)式の低次元化モデルが得られているとする。ここで、元のシステムと低次元化モデルの定常ゲインをそれぞれ K_0, K_r とすると、これらは次式で表される。

$$K_0 = -CA^{-1}B, \quad K_r = -C_r A_r^{-1} B_r \quad (22)$$

この時点では、一般に K_0 と K_r は一致しない。

そこでまず、低次元化モデルの入力行列 B_r を修正して K_0 と K_r を一致させる方法を述べる。

$k > l$ かつ C_r が行フルランクと仮定して、 $-C_r A_r^{-1}$ を特異値分解すると次式のようになる。

$$-C_r A_r^{-1} = U_B S_B V_B^T \quad (23)$$

$$S_B = [\Sigma_B \ 0] \in \mathcal{R}^{l \times k} \quad (24)$$

$$\Sigma_B = \text{diag}(\sigma_{B1}, \dots, \sigma_{Bl}) \in \mathcal{R}^{l \times l} \quad (25)$$

$$U_B \in \mathcal{R}^{l \times l}, \quad V_B \in \mathcal{R}^{k \times k} \quad (26)$$

このとき、 $-C_r A_r^{-1} B_r = K_0$ を満たす B_r の一般解を $\hat{B}_r$ とすると、これは次式のように表すことができる。

$$\hat{B}_r = V_B \begin{bmatrix} \Sigma_B^{-1} U_B^T K_0 \\ Q_B \end{bmatrix}, \quad Q_B \in \mathcal{R}^{(k-l) \times m} \quad (27)$$

この $\hat{B}_r$ を低次元化モデルの B_r として用いると、任意の行列 Q_B で $K_r = K_0$ が成り立ち、元のシステムと低次元化モデルの定常ゲインを一致させることができる。そこで、(21) 式においてこの $\hat{B}_r$ を B_r として用い、 X , Q_B を変数としてこの LMI 最適化問題を解くと、定常ゲインを考慮しつつ、誤差システムの H^∞ ノルムを小さく抑えることができる。

同様の議論が C_r についても成り立つので、その概略を以下に示す。 $k > m$ かつ B_r が列フルランクと仮定し、 $-A_r^{-1} B_r$ を以下のように特異値分解する。

$$-A_r^{-1} B_r = U_C S_C V_C^T \quad (28)$$

$$S_C = \begin{bmatrix} \Sigma_C \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{k \times m} \quad (29)$$

$$\Sigma_C = \text{diag}(\sigma_{C1}, \dots, \sigma_{Cm}) \quad (30)$$

$$U_C \in \mathcal{R}^{k \times k}, \quad V_C \in \mathcal{R}^{m \times m} \quad (31)$$

このとき、 $-C_r A_r^{-1} B_r = K_0$ を満たす C_r の一般解 $\hat{C}_r$ は次式のように表すことができる。

$$\hat{C}_r = [K_0 V_C \Sigma_C^{-1} \ Q_C] U_C^T, \quad Q_C \in \mathcal{R}^{l \times (k-m)} \quad (32)$$

と表される。 $\hat{C}_r$ を低次元化モデルの C_r として用いると、任意の行列 Q_C において $K_r = K_0$ が成り立ち、低次元化モデルと元のモデルの定常ゲインを一致させることができる。そこで、(32) 式で表される $\hat{C}_r$ を (20) 式の C_r として用い、 P , Q_C を変数としてこの LMI 最適化問題を解くと、定常ゲインを考慮しつつ、誤差システムの H^∞ ノルムを小さく抑えることができる。

以上のような方法を用いて低次元化モデルの入力、出力行列を繰り返し修正することによって、誤差システムの H^∞ ノルムをできる限り小さく抑えた低次元化モデルを得ることができる。この手法のアルゴリズムを付録 1.1 に示す。本論文では、このモデル低次元化手法を他の手法との区別のために入出力行列修正法とよぶことにする。この手法における低次元化モデルの修正の際には、 γ は単調非増加であることが保証されている。また、リアプノフ変数がすべて LMI の変数となっているため、

LMI 最適化により得られる γ の値は、そのときの低次元化モデルに対応する誤差システムの H^∞ ノルムに一致する。

3.2.2 状態行列の修正に基づく手法

3.2.1 で紹介したモデル低次元化手法は、低次元化モデルの状態行列 A_r を固定し、低次元化モデルの入力、出力行列を繰り返し修正するというものであった。そこで本項では、これらに加えて、低次元化モデルの状態行列 A_r も修正できる一つの方法を考え、この方法と前項で提案した入出力行列修正法を組み合わせた新たなモデル低次元化手法を提案する。この手法では 3.2.1 の手法よりも近似精度のより高い低次元化モデルが得られることが期待できる。

まず、低次元化モデルの定常ゲインを変えることなく A_r を修正するために、行列 $L \in \mathcal{R}^{k \times k}$ と $R \in \mathcal{R}^{k \times k}$ を新たに導入し、以下の二つの方法を考える。

- (A_r, B_r) を (LA_r, LB_r) と置き換えた (20) 式を LMI として解き、得られた解を用いて表されるモデル $(LA_r, LB_r, C_r, 0)$ を改めて低次元化モデルとする。
- (A_r, C_r) を $(A_r R, C_r R)$ と置き換えた (21) 式を LMI として解き、得られた解を用いて表されるモデル $(A_r R, B_r, C_r R, 0)$ を改めて低次元化モデルとする。

ここで、上記のような置換を行っても、低次元化モデルの定常ゲインが変わらないことは、(22) 式から確認できる。ただし、置換後の (20), (21) 式を LMI として解き、かつ低次元化モデルの定常ゲインを保存するためには、いずれの行列を変数とするかを改めて考える必要がある。また、本論文では、低次元化モデルとして安定なシステムを考えている。したがって、 LA_r , $A_r R$ を新たに A_r とするためには、 LA_r , $A_r R$ が安定となるように行列 L , R を選ばなければならない。

そこでまず、 (A_r, B_r) を (LA_r, LB_r) と置換した場合の (20) 式と、 (A_r, C_r) を $(A_r R, C_r R)$ と置換した場合の (21) 式をそれぞれ以下に示し、各式を LMI として扱う上で変数とする行列を考える。

- (A_r, B_r) を (LA_r, LB_r) と置き換え、(20) 式に代入すると以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} A^T P_{11} + P_{11} A & A^T P_{12} + P_{12} LA_r \\ A_r^T L^T P_{12}^T + P_{12}^T A & A_r^T L^T P_{22} + P_{22} LA_r \\ B^T P_{11} + B_r^T L^T P_{12}^T & B^T P_{12} + B_r^T L^T P_{22} \\ C & -C_r \\ P_{11} B + P_{12} LB_r & C^T \\ P_{12}^T B + P_{22} LB_r & -C_r^T \\ -\gamma I & 0 \\ 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

この不等式を LMI として解くために、 A_r , B_r , C_r , P_{12} , P_{22} を固定し、 P_{11} , L のみを変数とする。あるいは、前項で述べた方法を用いるこ

とにより, C_r を変数に含めて扱うことも可能である.

- (A_r, C_r) を $(A_r R, C_r R)$ と置き換え, (21) 式に代入すると以下ようになる.

$$\begin{bmatrix} AX_{11} + X_{11}A^T & AX_{12} + X_{12}R^T A_r^T \\ A_r R X_{12}^T + X_{12}^T A^T & A_r R X_{22} + X_{22}R^T A_r^T \\ CX_{11} - C_r R X_{12}^T & CX_{12} - C_r R X_{22} \\ B^T & B_r^T \\ X_{11}C^T - X_{12}R^T C_r^T & B \\ X_{12}^T C^T - X_{22}R^T C_r^T & B_r \\ -\gamma I & 0 \\ 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (34)$$

この不等式をLMIとして解くために, $A_r, B_r, C_r, X_{12}, X_{22}$ を固定し, X_{11}, R のみを変数とする.

あるいは, 前項で述べた方法を用いることにより, B_r を変数に含めて扱うことも可能である.

ここで, この方法で低次元化モデルを修正した場合の低次元化モデルの安定性について述べておく. (33) 式の(2,2)ブロックに注目すると, 次式のリアプノフ不等式が得られる.

$$A_r^T L^T P_{22} + P_{22} L A_r < 0 \quad (35)$$

ここで P_{22} は正定対称行列であるから, (33) 式の解として行列 L が得られれば, $L A_r$ は必ず安定行列となる. 同様の議論は行列 R についても成り立つ. これより, (33) 式または (34) 式を解いて得られる任意の行列 L および R に対して, 行列 $L A_r$ および $A_r R$ は安定となる. さらにこのことは, (33) 式または (34) 式を解いて得られる L および R が正則となることを保証している.

以上より, (33), (34) 式で表されるLMI最適化問題を用いて, 低次元化モデルを繰り返し修正するというモデル低次元化手法を考えることができる. 本論文では, この方法を状態行列修正法とよぶことにする. この手法においても, 低次元化モデル修正の際, γ に対して単調非増加であることが保証されている. しかし, LMIにおいてリアプノフ変数の一部が固定されているため, LMI最適化問題を解いて得られた γ は一般に誤差システムの H^∞ ノルムの上界値に過ぎず, そのため誤差システムの H^∞ ノルムについては, 単調非増加であることが保証されていないことになる (ただし, 上界値の単調非増加性は保証される). しかし一般に, γ を小さく抑えることによって, 誤差ノルムも小さく抑えることができるものと期待できる.

一方, この手法と 3.2.1 の入出力行列修正法を組み合わせることによって, 定常ゲインを考慮しつつ誤差システムの H^∞ ノルムを, さらに小さく抑える方法を考えることができる. しかし, 二つの手法の組み合わせ方は非常に多種多様なものが考えられるため, 本論文では, 次節の電力系統縮約に応用して有効性がとくに検証された

以下のものについてのみ述べる. ただし, 各手法の詳しいアルゴリズムは付録 1. に示すものとする.

(1) 交互法

まず, 低次元化モデルに対して, 入出力行列修正法と状態行列修正法を交互に適用する手法を考える. すなわち, (27) 式の $\hat{B}_r$ を用いた (21) 式, (34) 式, (32) 式の $\hat{C}_r$ を用いた (20) 式, (33) 式の四つのLMI最適化問題を順に繰り返し解き, 得られた解を用いて低次元化モデルを修正していくという手法を考える. この手法のアルゴリズムは付録 1.2 に示す. なお, この手法では入出力行列修正法と状態行列修正法とを交互に適用している. このことから本論文では他手法との区別のため, この手法を交互法とよぶことにする.

(2) 同時法

上記の交互法では, 状態行列修正法を適用する際に, B_r, C_r の一方を固定している. しかし, (33) 式および (34) 式の直後で補足した通り, 入出力行列修正法の考え方を併用すると, 定常ゲインを考慮しつつ, A_r, B_r, C_r のすべてを同時に修正することが可能となる. この考え方に基づくモデル低次元化手法の詳細を付録 1.3 に示す.

この手法では, 一つのLMI最適化問題において, 状態行列修正法と入出力行列修正法とを同時に用いている. そこで本論文では, この手法を同時法とよぶことにする.

4. 電力系統モデル縮約への応用とモデル低次元化手法の有効性

本節では, これまでに提案したモデル低次元化手法の有効性を数値例を用いて検証する.

4.1 電力系統モデル縮約への応用

本論文では数値例として, 参考文献 [3] で扱われている電力系統モデルをもとに以下のようなものを用いる. この電力系統モデルは, 各発電機が火力発電機の5機くし型系統をモデル化したものであり, 状態の次数が25 ($n=25$), 入力と出力の次数がそれぞれ10 ($l=m=10$) (各発電機が2入力2出力5次) となっている. このモデルの状態行列 A の固有値を Table 1 に示す. これより, この電力系統モデルは10次の不安定モードを持っていることがわかる. しかし, 前節までで述べたモデル低次元化手法では, その対象となるシステムが安定であることが必要である. そこで本論文では, 上記のモデルから安定なモードのみを抽出し, 新たに安定なモデルを考え, これを数値例として用いることにする.

また, 3.2.1 で述べたモデル低次元化法では, $k < l, m$ を仮定していた. 低次元化モデルの次数が10次以下になるとこの仮定を満たすことができなくなり, 5次以上の状態数を削除することができない. そこで本論文では, 電力系統縮約への応用に際して, 電力系統に対して分散制御を行うことを想定し, 主系統となる発電機のみに対

Table 1 Eigenvalues of the multi-machine electric power system

不安定モード (全 10 次)	安定モード (全 15 次)	
$0.2330 + 6.1962i$	-0.1828	-2.2222
$0.2330 - 6.1962i$	-0.6743	-0.1111
$0.2398 + 5.7953i$	-0.5222	-2.2222
$0.2398 - 5.7953i$	-0.4470	-0.1111
$0.2632 + 4.8306i$	-0.4172	-2.2222
$0.2632 - 4.8306i$	-0.1111	—
$0.3301 + 2.8616i$	-2.2222	—
$0.3301 - 2.8616i$	-0.1111	—
$0.0905 + 0.1314i$	-2.2222	—
$0.0905 - 0.1314i$	-0.1111	—

して定常ゲインを考慮するものとする。またこれに伴い、ステップ応答の誤差評価は、主系統にのみステップ入力を与え、入力開始後 10 秒間の主系統出力の二乗積分誤差を計算し、これを比較して行なうものとする。ただし、いずれの発電機を主系統として扱うかは、以下に述べる方法で定めることとする。

この電力系統モデルは、2 入力の発電機 5 機から成り立っており、入力の次数は系統全体で 10 となっている。そこで、まずステップ入力として、次式で表される 10 通りの入力を考える。

$$u = \begin{bmatrix} 10 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \dots, u = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 10 \end{bmatrix}^T \quad (36)$$

続いて、元の電力系統モデルと内部平衡実現打ちきり法によって得られた低次元化モデルに対して、これらすべての入力を与え、ステップ応答の誤差を前述の方法で計算する。このうち、その誤差がもっとも大きくなるような入力を、その他のモデル低次元化手法の有効性検証においても用いることとし、この入力に対応する発電機を主系統として選ぶこととする。これは、もっとも大きな誤差を与える入力に対してあるモデル低次元化手法の有効性が確認できれば、その他の入力についてもその手法は有効であると考えられるからである。以上のような考え方から、本論文ではステップ入力として次式の入力を選んでいく。

$$u = \begin{bmatrix} 10 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (37)$$

まず、各モデル低次元化手法を用いた電力系統縮約において、削除する状態数を横軸にとり、そのときの加法的誤差システムの H^∞ ノルムを縦軸にとって、これらの関係を表したものを Fig. 1 に示す。また、削除する状態数を横軸にとり、元のモデルと低次元化モデルに対して (37) 式の入力を加えた際の主系統出力の二乗積分誤差を縦軸にとって、これらの関係を表したものを Fig. 2 に示す。Figs. 1, 2 における各線と各モデル低次元化手法との

 Fig. 1 Number of eliminated states and H^∞ norms of the associated error systems

Fig. 2 Number of eliminated states and integrated square errors of step responses of the main machine

Table 2 Lines and model reduction methods in Figs. 1 and 2

線種	モデル低次元化手法
一点鎖線黒点プロット	内部平衡実現打ちきり法
実線白丸プロット	内部平衡実現特異摂動法
一点鎖線×印プロット	参考文献 [2] による方法 (3.1)
破線*印プロット	入出力行列修正法 (3.2.1)
点線白丸プロット	同時法 (3.2.2 (2))

関係は Table 2 に示す。

なお、3.2.2 で同時法とともに提案した交互法についてであるが、同時法とほぼ同様の結果が得られ、各手法との比較においては同時法の結果と大差ないと考えられるので、交互法の結果の表示は省略した。

4.2 考察

本項では、4.1 における結果について考察し、提案した手法の有効性を検証する。

まず Fig. 1 より、LMI 最適化問題の解を用いて低次元

化モデルに修正を施したものは、加法的誤差システムの H^∞ ノルムを小さく抑えることができていることがわかる。ここで一般には、定常ゲインを考慮した場合の誤差システムの H^∞ ノルムは、定常ゲインを考慮しない場合に比べて大きくなると考えられるが、この数値例においては、定常ゲインを考慮しつつ低次元化モデルを修正する手法のノルムが、定常ゲインを考慮せずに低次元化モデルの B_r , C_r を交互に繰り返し修正した手法のものに比べて小さく抑えることができている。これは、提案した手法では、リアプノフ変数の一部を固定していることや、繰り返しにより修正を行っていることに起因して、得られる解が大域的最適解とは限らないことによると考えられる。

続いて Fig. 2 より、ステップ応答の二乗積分誤差の値は、提案した手法と特異摂動法において、すなわち定常ゲインを考慮しているモデル低次元化手法の値が、定常ゲインを考慮しない手法に比べて小さく抑えられていることがわかる。

以上より、提案した手法について、加法的誤差システムの H^∞ ノルムとステップ応答の二乗積分誤差の両方が小さく抑えられていることが確認でき、その有効性を確認できるといえる。

5. おわりに

本論文では、モデル低次元化の際の誤差として加法的誤差システムの H^∞ ノルムとステップ応答の二乗積分誤差に注目し、これらを共に小さく抑えることのできる新たなモデル低次元化手法を提案した。具体的には、内部平衡実現打ちきり法によって得られた低次元化モデルに対して、LMI 最適化を用いた修正を繰り返し行うことにより、加法的誤差システムの H^∞ ノルムを小さく抑え、同時に、ステップ応答の誤差を小さく抑えるために、低次元化モデルの定常ゲインを元のシステムのそれに一致させる手法を提案した。また、提案した手法を電力系統モデルの縮約に応用し、その有効性を確認した。

今後の課題として、元のシステムと低次元化モデルの状態変数における対応関係について考察することや、本論文で適用した電力系統モデル以外のモデルに対しての有効性を確認することなどが挙げられる。

参考文献

- [1] 大日方, B. アンダーソン: 制御システム設計—コントローラの低次元化—, システム制御情報ライブラリー 21, 朝倉書店 (1999)
- [2] A. Helmersson: Model reduction using LMIs; *Proc. of 33rd IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 3217–3222 (1994)
- [3] 森岡ほか: 多機系統を考慮した発電機制御による系統安定化制御方式の検討; 電気学会論文誌 B, 120 巻, 8/9 号, pp. 1136–1145 (2000)
- [4] K. Zhou: *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall

(1996)

- [5] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics (1994)

付 録

付録 1. 各モデル低次元化手法のアルゴリズム

ここでは、本論文で述べた低次元化手法のうち、入出力行列修正法, 交互法, 同時法による低次元化モデルのアルゴリズムを示す。

なお、本論文では、LMI 最適化問題を繰り返し解くことによって、低次元化モデルを修正していくという方法を用いている。この低次元化モデルに対する修正は各 Step で一回ずつ施され、この際、誤差システムの H^∞ ノルムの上界を表す (19) 式の γ は、単調非増加であることが保証されている。また一般に、この γ を小さくすることによって、誤差システムの真の H^∞ ノルムも小さく抑えることができる。また、リアプノフ変数 P または X がすべて LMI の変数となっている場合には、得られた γ の値は $\|E(s)\|_\infty$ を与えているとみなすことができる。

本論文における繰り返し修正の停止条件は、以下のようになっている。まず、各手法において低次元化モデルに対する修正は 20 Step 以上繰り返すものとする。20 Step 以上の修正が施された、ある時点における低次元化モデルの誤差システムの H^∞ ノルムの値を 20 Step 前の修正によって得られた低次元化モデルに対するそれと比較し、その減少率が 0.1 % 未満であれば、繰り返し修正を停止し、そのときに得られている低次元化モデルをその手法によって得られる低次元化モデルとする。

付録 1.1 入出力行列修正法

ここでは、3.2.1 で紹介した入出力行列修正法のアルゴリズムを以下に示す。

Step 1 (15) 式で表される元のシステムに対し、内部平衡実現打ちきり法を用いて (17) 式で表される低次元化モデルを導出する。

Step 2 得られた低次元化モデルの B_r を (27) 式で表される $\hat{B}_r$ に変更し、(21) 式の LMI を考える。 X と Q_B を変数としてこの LMI を解き、可能なだけ小さい γ を求める。このとき得られる解 Q_B を用いて (27) 式から $\hat{B}_r$ を定め、得られた低次元化モデル $(A_r, \hat{B}_r, C_r, 0)$ を改めて $(A_r, B_r, C_r, 0)$ と表す。

Step 3 得られた低次元化モデルの C_r を (32) 式で表される $\hat{C}_r$ に変更し、(20) 式の LMI を考える。 P と Q_C を変数としてこの LMI を解き、可能なだけ小さい γ を求める。このとき得られる解 Q_C を用いて (32) 式から $\hat{C}_r$ を定め、得られた低次元化モデル $(A_r, B_r, \hat{C}_r, 0)$ を改めて $(A_r, B_r, C_r, 0)$ と表す。

Step 4 前述の停止条件が満たされるまで、Step 2, Step 3 を交互に繰り返すことによって得られる実現 $G_r(s) = (A_r, B_r, C_r, 0)$ が本手法によって得られる低次元化モデルとなる。

付録 1.2 交互法

つぎに、3.2.2 (1) で紹介した交互法について、そのアルゴリズムを示す。

Step 1 (15) 式で表される元のシステムに対し、内部平衡実現打ちきり法を用いて (17) 式で表される低次元化モデルを導出する。

Step 2 上述の入出力行列修正法における Step 3 と同様の作業を行なう。

Step 3 (A_r, B_r) を (LA_r, LB_r) と置き換え、(33) 式の LMI を、 P_{11} , L のみを変数として解き、可能なだけ小さい γ を求める。このとき得られる解により与えられる低次元化モデル $(LA_r, LB_r, C_r, 0)$ を改めて $(A_r, B_r, C_r, 0)$ と表す。

Step 4 上述の入出力行列修正法における Step 2 と同様の作業を行なう。

Step 5 (A_r, C_r) を $(A_r R, C_r R)$ と置き換え、(34) 式の LMI を、 X_{11} , R のみを変数として解き、可能なだけ小さい γ を求める。このとき得られる解により与えられる低次元化モデル $(A_r R, B_r, C_r R, 0)$ を改めて $(A_r, B_r, C_r, 0)$ と表す。

Step 6 前述の停止条件が満たされるまで、Step 2~5 をこの順に繰り返すことによって得られる実現 $G_r(s) = (A_r, B_r, C_r, 0)$ が本手法によって得られる低次元化モデルとなる。

付録 1.3 同時法

次に本項では、3.2.2 (2) で紹介した同時法について、そのアルゴリズムを示す。この手法は、上述の交互法の Step 3, 5 をそれぞれ以下のように変更したものである。

Step 3 (32) 式で表される $\hat{C}_r$ を用いて、 (A_r, B_r, C_r) を $(LA_r, LB_r, \hat{C}_r)$ と置き換え、(33) 式の LMI を、 P_{11} , L , Q_C を変数として解き、可能なだけ小さい γ を求める。このとき得られる解により与えられる低次元化モデル $(LA_r, LB_r, \hat{C}_r, 0)$ を改めて $(A_r, B_r, C_r, 0)$ と表す。

Step 5 (27) 式で表される $\hat{B}_r$ を用いて、 (A_r, B_r, C_r) を $(A_r R, \hat{B}_r, C_r R)$ と置き換え、(34) 式の LMI を、 X_{11} , R , Q_B を変数として解き、可能なだけ小さい γ を求める。このとき得られる解により与えられる低次元化モデル $(A_r R, \hat{B}_r, C_r R, 0)$ を改めて $(A_r, B_r, C_r, 0)$ と表す。