逐次部分空間同定を使った変化検出法*

奥 宏史†

Change Detection Algorithm based on Recursive Subspace Identification*

Hiroshi OKU†

This paper presents a new change detection method with the aid of subspace identification. The proposed method is based on monitoring a change in variance of a statistic generated by a recursive subspace identification algorithm. An asymptotic property of the statistic is presented. Without changes during sampling, it is shown that, under relevant assumptions, the statistic converges in probability to a stack of noise vectors multiplied from the left side by a Toeplitz matrix. A numerical example illustrates that the proposed method can detect changes in the dynamics of a system, without being disturbed by changes in the spectral density function of an input signal which is not our concern.

1. はじめに

本論文では、ある監視対象の動特性の変化を観測可能な入出力信号からオンライン検出する問題を考える。ただし、本問題では、入力信号の動特性変化を許容することとし、それを検出することなく監視対象の変化だけを検出することにする。このような問題は、たとえば、複数の動作点をもつ（おそらく非線形な）同定対象を動作点毎の局所線形時不変モデルによって近似的に記述する際に [1–5]、システム同定のためにサンプリングされたデータの前処理としての動作点毎の分割を考える場合に重要である。

統計学に基づく変化検出法に関して現在までに数多くの研究がなされている。この研究分野の survey として、たとえば参考文献 [6,7] が挙げられる。Basseville らは、振動現象の監視のための故障検出アルゴリズムに部分空間同定の手法を導入した [8]。しかし、彼らは次数が既知の制御入力をもたない限定的なモデルを取り扱った。出力誤差モデルで記述されるシステムに対して、逐次部分空間同定アルゴリズム [9–12] に基づく変化検出法が著者ら [13] によって提案されている。

本論文では、モデル構造としてイノベーション形式 [14] で表現されたシステムに対する逐次部分空間同定アルゴリズムを使ったオンライン変化検出法を提案する。提案手法において、監視対象であるシステムの次数が未知でも構わないことに注意する。逐次部分空間同定アルゴリズムによって生成されるある変量について、監視対象の動特性が変化したときその変量の標本分散が著しく大きくなることに着目する。提案する手法では、その変量の分散について仮説検定を実施することで監視対象の動特性の変化を検出する。変化が無いとき、その変量は漸近的に白色雑音とみなすことができるので、逐次部分空間同定アルゴリズムは白色化フィルタとして機能する。仮説検定の実施において、注目する変量の変化後の分散は、未知ではあるが変化前より大きくなることがわかっていることから、尤度比検定を実施し対数尤度比を GMA (geometric moving average) アルゴリズム [7] によって逐次計算する。

部分空間同定法の漸近的性質は現在までに広く研究されている [15–21]。本論文では、変化検出に利用される変量の漸近的性質について考察し、システムの動特性が変化しないという仮定の下でその変量がシステムの確率的な部分システムに関連する Toeplitz 行列と雑音ベクトルの積に確率収束 (convergence in probability) することを示す。この性質はシステムの動特性が変化したときのみ成り立たず、入力信号源の動特性変化には影響されないことが数値例によって示される。

* 原稿受付 2004 年 4 月 6 日

† 大阪工業大学 工学部 Faculty of Engineering, Osaka Institute of Technology; 5-16-1, Ohmiya, Asahi-ku, Osaka 535-8585, JAPAN

Key Words: identification, change detection, subspace method, recursive algorithm, stochastic system.

本論文の構成は以下の通りである．2節では，本論文における問題設定を紹介する．3節では，逐次部分空間同定アルゴリズムを簡単に復習する．4節では，逐次部分空間同定アルゴリズムによって逐次的に生成されるある変量の漸近的性質について議論し，その変量が変化検出のための検定信号にふさわしいことを示す．5節では，統計学における尤度比検定に基づいたオンライン変化検出法を導出する．最後に6節では，提案するオンライン変化検出法の有効性，とくに，入力信号源の動特性変化に邪魔されることなく監視対象の動特性の変化だけを的確に検出できる能力をもつことを一つの数値例題を使って例証する．

本論文を通して， $\text{tr} \cdot$ は行列のトレースを表し， $\|\cdot\|_2$ は行列 2-ノルムを表すとする [22]． $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ は平均 μ ，分散 σ^2 の正規分布を表し，*i.i.d.* は独立同一分布を意味するとする．“ $X \sim F$ ” は「 X は分布 F にしたがう」と読むことにする [23]．

2. 問題設定

監視対象は操作点を複数個もつとする．さらに，操作点近傍のそれぞれにおいて，監視対象の局所モデルがそれぞれ次のような離散時間有限次元線形時不変状態空間モデルによって記述できるとする．

$$x_{t+1} = A_i x_t + B_i u_t + K_i e_t \quad (1a)$$

$$y_t = C_i x_t + D_i u_t + e_t \quad (1b)$$

ここで， $t \in \mathbb{Z}$ ， $y_t, e_t \in \mathbb{R}^l$ ， $u_t \in \mathbb{R}^m$ ， $x_t \in \mathbb{R}^n$ とし，係数行列の下添え字 i ($i = 1, 2, \dots$) は対応する操作点を表すとする． e_t は平均 0，分散 $\sigma_0^2 I$ をもつ Gauss 白色雑音であるとする．つまり， $\mathbf{E}[e_t] = 0$ かつ $\mathbf{E}[e_s e_t^T] = \delta_{st} \sigma_0^2 I$ とする．ここで， $\mathbf{E}$ は期待値を， δ_{st} は Kronecker's delta を表す．入力 u_t は有界，疑似定常 (pseudo-stationary) [24] とし，後で定義される意味で持続的励起信号であり，かつ， e_t とは無相関であると仮定する．各 i に対して，行列 A_i と $A_i - K_i C_i$ は安定， (A_i, C_i) は可観測， $(A_i, [B_i \ K_i])$ は可到達とそれぞれ仮定する．

本論文で考える変化検出法が実行可能となるために，次の二つを仮定する．まず，それぞれの局所モデルは他の局所モデルと異なる動特性をもつとする．つぎに，変化は時々起こるとし，その変化はある操作点から別の操作点への瞬間的な変化 (abrupt change) であるとする．

本論文では，入力信号源の動特性の変化を許容するが，それらを検出することは目的としないことに注意する．本論文で考える問題は次のとおりである．入力信号源の動特性の変化に邪魔されずに，監視対象の動特性の変化 (ある動作点から別の動作点への遷移) だけを検出する方法を構築する．

3. 逐次部分空間同定アルゴリズム

本節と次節において，対象はある一つの動作点に留まって操業されていると仮定する．それに伴い，記法の簡単化のため下添え字 i を省略する．今後，カリグラフ大文字は Hankel 行列や Toeplitz 行列のような構造をもつ行列を表すのに使用する．

ある信号のサンプル列 $\{\dots, w_0, w_1, \dots, w_N, \dots\}$ が与えられたとき，Hankel 行列 $\mathcal{W}_N$ ， $\mathcal{W}_{P,N}$ と，有限個の連続するサンプルを重ねたベクトル $w_{\cdot(\cdot)}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_N &:= \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_N \\ \vdots & & \vdots \\ w_\alpha & \cdots & w_{N+\alpha-1} \end{bmatrix} \\ &=: \begin{bmatrix} w_{\alpha(1)} & \cdots & w_{\alpha(N)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{P,N} &:= \begin{bmatrix} w_{1-\beta} & \cdots & w_{N-\beta} \\ \vdots & & \vdots \\ w_0 & \cdots & w_{N-1} \end{bmatrix} \\ &=: \begin{bmatrix} w_{\beta(1-\beta)} & \cdots & w_{\beta(N-\beta)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

と定義する．ここで， α, β は整数で，それぞれ $\alpha \geq n+1$ ， $\beta \geq n$ を満たすとする．

【定義 1】 (入力信号に関する仮定) ある正の整数 N_0 が与えられたとする． $\forall N > N_0$ (無限大を含む) に対して以下の関係が成り立つとき，入力 u_t は持続的に励起 (persistently exciting) しているとよばれる．

$$\frac{1}{N} \mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T > 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{N} \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \mathcal{U}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_N^T & \mathcal{U}_N^T \end{bmatrix} > 0 \quad (5)$$

ここで， $\Phi_N := [\mathcal{U}_{P,N}^T \ \mathcal{Y}_{P,N}^T]^T$ とする．また， $\forall \tau$ に対して， $N \rightarrow \infty$ としたとき確率 1 で (with probability 1)

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} e_t u_{t+\tau}^T \longrightarrow 0 \quad (6)$$

となるとき，入力 u_t は雑音 e_t と無相関 (uncorrelation) であるとよばれる．

定義 1 で用いられている「無相関」は少しばかり用語の誤用であるかもしれない [21, 25]．(4) 式より， $\forall N > N_0$ (無限大を含む) に対して，ある正数 $M < \infty$ が存在して，

$$\left\| \left(\frac{1}{N} \mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T \right)^{-1} \right\|_2 \leq M \quad (7)$$

が成り立つことに注意する．このとき，入力 u_t は **inversely bounded** であるとよぶことにする．

十分大きな β を選ぶとき $(A - KC)^\beta$ は無視できることを考慮すると，(1) 式より入出力 Hankel 行列の間の関係は次の行列回帰式として記述できる [16]．

$$\mathcal{Y}_N = \begin{bmatrix} \mathcal{O} \mathcal{L} \mathcal{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \mathcal{U}_N \end{bmatrix} + \mathcal{K} \mathcal{E}_N =: \Theta Z_N + \mathcal{K} \mathcal{E}_N \quad (8)$$

ここで, $\mathcal{O}$ は拡大可観測性行列 (extended observability matrix) とよばれ,

$$\mathcal{O} := \begin{bmatrix} C^T & \dots & (CA^{\alpha-1})^T \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

と定義される. $\mathcal{L}$ は可制御性行列を反転させた行列で次のように定義される. $\mathcal{L} := \begin{bmatrix} \mathcal{L}_u & \mathcal{L}_y \end{bmatrix}$ とし, $\mathcal{L}_u$, $\mathcal{L}_y$ はそれぞれ以下のように定義される.

$$\mathcal{L}_u := \begin{bmatrix} (A-KC)^{\beta-1}(B-KD), \dots, (B-KD) \\ (A-KC)^{\beta-1}K, \dots, K \end{bmatrix}$$

二つの下三角 Toeplitz 行列 $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ はそれぞれ次のように定義される.

$$\mathcal{H} := \begin{bmatrix} D & & O \\ CB & D & \\ \vdots & \ddots & \\ CA^{\alpha-2}B & \dots & CB & D \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathcal{K} := \begin{bmatrix} I & & O \\ CK & I & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ CA^{\alpha-2}K & \dots & CK & I \end{bmatrix} \quad (11)$$

(8) 式より, $\Theta_\Phi := \mathcal{O} \mathcal{L}$ の推定値 $\hat{\Theta}_{\Phi,N}$ は Θ に関する次の最小化問題の解から得られる.

$$\min_{\Theta} f(\Theta) \quad (12)$$

ここで, $f(\Theta)$ を

$$f(\Theta) := \frac{1}{N} \text{tr} \mathcal{K} \mathcal{E}_N (\mathcal{K} \mathcal{E}_N)^T \quad (13)$$

$$= \frac{1}{N} \text{tr} (\mathcal{Y}_N - \Theta Z_N) (\mathcal{Y}_N - \Theta Z_N)^T \quad (14)$$

と定義する. 最小化問題を実際に解くために (14) 式を Θ で偏微分すると,

$$\frac{\partial f}{\partial \Theta} = -\frac{2}{N} \mathcal{Y}_N Z_N^T + \frac{2}{N} \Theta Z_N Z_N^T$$

を得る. (5) 式に注意して, $\frac{\partial f}{\partial \Theta} = 0$ を満たす Θ を $\hat{\Theta}_N$ とすると,

$$\hat{\Theta}_N = \frac{1}{N} \mathcal{Y}_N Z_N^T \left(\frac{1}{N} Z_N Z_N^T \right)^{-1}$$

を得る. $Z_N = [\Phi_N^T \ \mathcal{U}_N^T]^T$ と (4) 式に注意して, ブロック行列の逆行列の公式 [26] を使うと, $\hat{\Theta}_{\Phi,N}$ は $\hat{\Theta}_N$ の (1,1) ブロック要素として次式で与えられる.

$$\hat{\Theta}_{\Phi,N} = \frac{1}{N} \mathcal{Y}_N \Pi_{\mathcal{U}_N}^\perp \Phi_N^T \left(\frac{1}{N} \Phi_N \Pi_{\mathcal{U}_N}^\perp \Phi_N^T \right)^{-1} \quad (15)$$

ここで, 射影行列 $\Pi_{\mathcal{U}_N}^\perp$ を

$$\Pi_{\mathcal{U}_N}^\perp := I - \frac{1}{N} \mathcal{U}_N^T \left(\frac{1}{N} \mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T \right)^{-1} \mathcal{U}_N \quad (16)$$

によって定義する. N が有限値ならば (15) 式と (16) 式はそれぞれ

$$\hat{\Theta}_{\Phi,N} = \mathcal{Y}_N \Pi_{\mathcal{U}_N}^\perp \Phi_N^T (\Phi_N \Pi_{\mathcal{U}_N}^\perp \Phi_N^T)^{-1} \quad (17)$$

$$\Pi_{\mathcal{U}_N}^\perp = I - \mathcal{U}_N^T (\mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T)^{-1} \mathcal{U}_N \quad (18)$$

と等しいことに注意する. 概して部分空間同定法は, $\hat{\Theta}_{\Phi,N}$ の両側から適切な重み行列をかけた行列を特異値分解した後に, ある線形方程式を (A, B, C, D) に関して解くことによって実行される [27]. それゆえ, 行列回帰式 (8) 式の係数行列の推定値 $\hat{\Theta}_{\Phi,N}$ の逐次更新が逐次部分空間同定において本質的に重要である [9,10,12,13].

【逐次部分空間同定アルゴリズム】 時刻 $N + \alpha$ において入出力データ対 $(u_{N+\alpha}, y_{N+\alpha})$ がサンプルされたとき, 係数行列 Θ_Φ は以下に示す更新式に従って逐次的に推定される [10,13].

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_{\Phi,N+1} &= \hat{\Theta}_{\Phi,N} \\ &\quad - \xi_{N+1} (r_{N+1} + \hat{\Theta}_{\Phi,N} q_{N+1}) q_{N+1}^T \Psi_N^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

ここで, $\phi(N+1) := [u_{\beta(N-\beta+1)}^T \ y_{\beta(N-\beta+1)}^T]^T$

$$\Psi_N := \Phi_N \Pi_{\mathcal{U}_N}^\perp \Phi_N^T \quad (20)$$

$$\begin{aligned} r_{N+1} &:= y_{\alpha(N+1)} \\ &\quad - \frac{1}{N} \mathcal{Y}_N \mathcal{U}_N^T \left(\frac{1}{N} \mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T \right)^{-1} u_{\alpha(N+1)} \end{aligned} \quad (21)$$

$$= y_{\alpha(N+1)} - \mathcal{Y}_N \mathcal{U}_N^T (\mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T)^{-1} u_{\alpha(N+1)} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} q_{N+1} &:= \frac{1}{N} \Phi_N \mathcal{U}_N^T \left(\frac{1}{N} \mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T \right)^{-1} u_{\alpha(N+1)} \\ &\quad - \phi(N+1) \end{aligned} \quad (23)$$

$$= \Phi_N \mathcal{U}_N^T (\mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T)^{-1} u_{\alpha(N+1)} - \phi(N+1) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{N+1} &:= \left(1 + \frac{1}{N} u_{\alpha(N+1)}^T \left(\frac{1}{N} \mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T \right)^{-1} u_{\alpha(N+1)} \right)^{-1} \\ &= \left(1 + u_{\alpha(N+1)}^T (\mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T)^{-1} u_{\alpha(N+1)} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\xi_{N+1} := \left(\frac{1}{\zeta_{N+1}} + q_{N+1}^T \Psi_N^{-1} q_{N+1} \right)^{-1}$$

(22), (24), (25) 式の等号は N が有限値のときに成り立つことに注意する. このとき, $(\mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T)^{-1}$, Ψ_N^{-1} , $\mathcal{Y}_N \mathcal{U}_N^T$, $\Phi_{N+1} \mathcal{U}_{N+1}^T$ の逐次更新式はそれぞれ以下の通りである.

$$\begin{aligned} &(\mathcal{U}_{N+1} \mathcal{U}_{N+1}^T)^{-1} \\ &= (\mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T)^{-1} - \zeta_N (\mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T)^{-1} u_{\alpha(N+1)} \\ &\quad \cdot u_{\alpha(N+1)}^T (\mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T)^{-1} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\Psi_{N+1}^{-1} = \Psi_N^{-1} - \xi_{N+1} \Psi_N^{-1} q_{N+1} q_{N+1}^T \Psi_N^{-1} \quad (27)$$

$$\mathcal{Y}_{N+1}\mathcal{U}_{N+1}^T = \mathcal{Y}_N\mathcal{U}_N^T + y_{\alpha(N+1)}u_{\alpha(N+1)}^T \quad (28)$$

$$\Phi_{N+1}\mathcal{U}_{N+1}^T = \Phi_N\mathcal{U}_N^T + \phi(N+1)u_{\alpha(N+1)}^T \quad (29)$$

上述の逐次アルゴリズムに変化に対する追従性をもたせるために、指数型忘却係数を導入することは容易であることに注意する[10,11]. 本論文の数値例においても指数型忘却係数が逐次アルゴリズムに組み込まれている.

4. ある変量の漸近的性質について

もし、システムの動特性が変化せずある動作点に留まりつづけるとすると、推定値 $\hat{\Theta}_{\Phi,N}$ は N が大きくなるにつれて (8) 式を満足する値に収束するはずである. システムが変化せず十分たくさんの入出力データ数がある場合を考えたとき, (19) 式の右辺第2項は非常に小さいか, あるいは, 雑音信号 e_t のみによって駆動される微小な量でなければならない. この節では, 変化検出に利用できるある変量の漸近的性質について考える. まず, 本節の主結果を定理として以下に示す.

【定理 1】 α と β は有限値ではあるが十分大きな値とする. 入力 u_t は前述の仮定を満足するとする. システムはある一つの動作点に留まりつづけるとし, ある $\Theta^* := [\Theta_{\Phi}^* \ \Theta_{\mathcal{U}}^*]$ が存在して, $\forall N > N_0$ に対して次式を満たすとする.

$$\mathcal{Y}_N = \Theta_{\Phi}^* \Phi_N + \Theta_{\mathcal{U}}^* \mathcal{U}_N + \mathcal{K} \mathcal{E}_N \quad (30)$$

$$y_{\alpha(N+1)} = \Theta_{\Phi}^* \phi(N+1) + \Theta_{\mathcal{U}}^* u_{\alpha(N+1)} + \mathcal{K} e_{\alpha(N+1)} \quad (31)$$

ベクトル $e_{\alpha(\infty)}$ を次のように定義する.

$$e_{\alpha(\infty)} := [e_{1\infty}^T \ \cdots \ e_{\alpha\infty}^T]^T$$

ここで, $e_{i\infty}^T \in \mathbb{R}^l$ ($i=1, \dots, \alpha$) は平均0, 分散 $\mathbf{E}[e_{i\infty} e_{j\infty}^T] = \delta_{ij} \sigma_0^2 I$ の Gauss ランダムベクトルとする. このとき, $N \rightarrow \infty$ とすると $r_{N+1} + \Theta_{\Phi}^* q_{N+1}$ は $\mathcal{K} e_{\alpha(\infty)}$ に確率収束する. つまり,

$$(r_{N+1} + \Theta_{\Phi}^* q_{N+1}) \xrightarrow{P} \mathcal{K} e_{\alpha(\infty)} \quad (32)$$

(証明) (21), (23), (30), (31) 式より, 次式を得る.

$$r_{N+1} = -\Theta_{\Phi}^* q_{N+1} + \mathcal{K} e_{\alpha(N+1)} - \mathcal{K} \frac{1}{N} \mathcal{E}_N \mathcal{U}_N \left(\frac{1}{N} \mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T \right)^{-1} u_{\alpha(N+1)} \quad (33)$$

u_t と e_t は定義1の意味で無相関であることから, $N \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{1}{N} \mathcal{E}_N \mathcal{U}_N \rightarrow 0 \quad (34)$$

が確率1で成り立つ. ゆえに, (34) 式と u_t が inversely bounded であることより, $\forall \epsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\|r_{N+1} + \Theta_{\Phi}^* q_{N+1} - \mathcal{K} e_{\alpha(N+1)}\| \geq \epsilon)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\left\| \mathcal{K} \frac{1}{N} \mathcal{E}_N \mathcal{U}_N \left(\frac{1}{N} \mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T \right)^{-1} u_{\alpha(N+1)} \right\| \geq \epsilon \right) \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\left\| \mathcal{K} \right\|_2 \cdot \left\| \frac{1}{N} \mathcal{E}_N \mathcal{U}_N \right\|_2 \cdot \left\| \left(\frac{1}{N} \mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T \right)^{-1} \right\|_2 \cdot \|u_{\alpha(N+1)}\| \geq \epsilon \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

が成り立つ. 以上より定理は証明された. $\square$

(2) 式と (11) 式より, ベクトル $\mathcal{K} e_{\alpha(N+1)}$ の第1ブロック要素が e_{N+1} に等しいことに注意すると, この定理は逐次部分空間同定アルゴリズムが白色化フィルタとして利用できることを示唆している. ところで, (32) 式の左辺にある Θ_{Φ}^* は未知であるため, 実際にはその推定値 $\hat{\Theta}_{\Phi,N}$ で代用する必要がある.

(注意1) 参考文献[28]のGustafssonの提案する変化検出法では, (32) 式左辺と同等の変量について, その性質を解析すること無しに $\mathcal{K}$ の存在を無視して強引に白色性を仮定している. しかし, 定理1は, その仮定が不合理であることを示している.

5. 変化検出法

監視対象の動特性変化が生じると, その後しばらくの間は逐次部分空間同定アルゴリズム (19) 式はその追従特性のために過渡的な状況に入る. この場合には, (33) 式が成り立たず定理1を満足しない. 過渡的な状況において, $r_{N+1} + \hat{\Theta}_{\Phi,N} q_{N+1}$ の第1ブロック行の平均や分散は入出力信号のそれらの値に大きく依存する. もし出力 y_t と雑音 e_t の間に有意義な大きさの信号対雑音比がある場合には, 監視対象の動特性変化が生じた後に $r_{N+1} + \hat{\Theta}_{\Phi,N} q_{N+1}$ の第1ブロック行のとくに分散において顕著な変化が観測される (付録参照). この事実を利用すると, 誤検出を防ぐために有意水準を極端に小さくしても変化を検出することが可能である. さらに, 前述の性質は, 入力信号の動特性変化とは無関係であることが経験的に分かっているため [13], 監視対象の動特性変化だけを正確に検出するのに適している. 以上の議論より, 逐次部分空間同定アルゴリズムによって逐次的に生成される $r_{N+1} + \hat{\Theta}_{\Phi,N} q_{N+1}$ の第1ブロック行は, 入力信号の動特性変化に邪魔されずに監視対象の動特性変化だけを検出する変化検出法の検定信号としてふさわしいといえる. 以下では, 記法の簡単化のため, 検定信号である $r_{N+1} + \hat{\Theta}_{\Phi,N} q_{N+1}$ の第1ブロック行を表すのに ε_{N+1} を使用する. 本節では, ε_{N+1} がリアルタイムで生成されるのを利用したオンライン変化検出法を導出する.

5.1 尤度比検定

提案する変化検出法では, 次の二つの仮説 (帰無仮説 $\mathbf{H}_0$ と対立仮説 $\mathbf{H}_1$) について尤度比検定を実施する.

$$\begin{cases} \mathbf{H}_0: \text{対象がある動作点付近に留まって動作.} \\ \mathbf{H}_1: \text{変化が発生.} \end{cases}$$

いま, 定理 1 を考慮して,

$$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2 I), \text{ i.i.d.} \quad (35)$$

とおく. このとき,

- (1) 変化前には, $\varepsilon_t \sim \mathbf{N}(0, \sigma_0^2 I)$
- (2) 変化後には, 変化前に比べて分散が顕著に大きくなる

に注意すると, 上述の仮説は未知パラメータ $\theta = (\mu, \sigma^2)$ を使って次のように書くことができる.

$$\begin{cases} \mathbf{H}_0: \theta \in S_0 := \{(0, \sigma_0^2)\} \\ \mathbf{H}_1: \theta \in S_1 := \{(\mu, \sigma^2) \mid \sigma^2 > \sigma_0^2, \mu \text{ は任意} \} \end{cases}$$

ここで, 帰無仮説 $\mathbf{H}_0$ では平均, 分散ともに既知であるが, 対立仮説 $\mathbf{H}_1$ ではそれらは未知であることに注意する. 対数尤度比を計算すると,

$$\begin{aligned} l_{\max} &= \ln \frac{\max_{\theta \in S_1} \frac{1}{\sigma^{Ml}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^M (\varepsilon_t - \mu)^T (\varepsilon_t - \mu) \right\}}{\frac{1}{\sigma_0^{Ml}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{t=1}^M \varepsilon_t^T \varepsilon_t \right)} \\ &= \frac{Ml\tilde{\sigma}^2}{2\sigma_0^2} - \frac{Ml}{2} \left(1 + \ln \frac{\tilde{\sigma}^2 - \hat{\mu}^T \hat{\mu} / l}{\sigma_0^2} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

となる. ただし,

$$\tilde{\sigma}^2 := \frac{1}{Ml} \sum_{t=1}^M \varepsilon_t^T \varepsilon_t, \quad \hat{\mu} := \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \varepsilon_t \quad (37)$$

とする. ここで, (36) 式上の式中の最大値は $\mu = \hat{\mu}$, $\sigma^2 = \frac{1}{Ml} \sum_{t=1}^M (\varepsilon_t - \hat{\mu})^T (\varepsilon_t - \hat{\mu})$ のときに達成されることに注意する. 決定方式 (decision rule) は, 適当なしきい値 c を用いて,

$$l_{\max} > c \implies \mathbf{H}_0 \text{ を棄却} \quad (38)$$

と書ける.

つぎに, しきい値 c を具体的に求める. (37) 式に注意して, 帰無仮説 $\mathbf{H}_0$ の下での条件付確率 $\mathbf{P}_{(0, \sigma_0^2)}(l_{\max} > c)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_{(0, \sigma_0^2)}(l_{\max} > c) \\ &= \mathbf{P}_{(0, \sigma_0^2)} \left(\frac{Ml\tilde{\sigma}^2}{2\sigma_0^2} - \frac{Ml}{2} \left(1 + \ln \frac{\tilde{\sigma}^2 - \hat{\mu}^T \hat{\mu} / l}{\sigma_0^2} \right) > c \right) \\ &\approx \mathbf{P}_{(0, \sigma_0^2)} \left(\frac{Ml\tilde{\sigma}^2}{2\sigma_0^2} - \frac{Ml}{2} > c \right) \\ &= \mathbf{P}_{(0, \sigma_0^2)} \left(\frac{Ml\tilde{\sigma}^2}{\sigma_0^2} > 2 \left(c + \frac{Ml}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

を得る. ここで, $Ml\tilde{\sigma}^2/\sigma_0^2$ は自由度 $(Ml-1)$ の χ^2 分布に従うことに注意する [23]. したがって, 自由度 $(Ml-1)$ の χ^2 分布の上側 α 点を $\chi_\alpha^2(Ml-1)$ で表すと, 有意水準 α の尤度比検定のしきい値は,

$$2 \left(c + \frac{Ml}{2} \right) = \chi_\alpha^2(Ml-1)$$

より,

$$c = \frac{1}{2} (\chi_\alpha^2(Ml-1) - Ml) \quad (39)$$

で与えられる.

(36), (39) 式より, 以上をまとめると, 検定問題 $\mathbf{H}_0$ vs. $\mathbf{H}_1$ に対する尤度比検定は,

$$\frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_0^2} - \ln \frac{\tilde{\sigma}^2 - \frac{\hat{\mu}^T \hat{\mu}}{l}}{\sigma_0^2} > \frac{\chi_\alpha^2(Ml-1)}{Ml} \implies \mathbf{H}_0 \text{ を棄却} \quad (40)$$

となる.

5.2 オンライン変化検出法

本節では, 5.1 節で述べたオフライン検定法のオンライン化について議論する. つまり, $\tilde{\sigma}^2$ と $\hat{\mu}$ の逐次更新則を尤度比検定 (40) 式に導入する. 本論文では, 幾何移動平均 (Geometric Moving Average, GMA) 型の逐次更新則を採用する [7].

$\tilde{\sigma}^2$ と $\hat{\mu}$ をそれぞれ,

$$s_N = \frac{1}{l} \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \varepsilon_{N-i}^T \varepsilon_{N-i}, \quad m_N = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \varepsilon_{N-i} \quad (41)$$

に置き換える. ここで, $\gamma_i := \lambda(1-\lambda)^i$, $0 < \lambda \leq 1$ は指数関数型の忘却重みである. このとき, 「みなしデータ長」は $M \approx 1/\lambda$ である. (41) 式中の s_N , m_N の逐次更新式はそれぞれ次のように求められる.

$$s_{N+1} = (1-\lambda)s_N + \lambda \frac{\varepsilon_{N+1}^T \varepsilon_{N+1}}{l} \quad (42)$$

$$m_{N+1} = (1-\lambda)m_N + \lambda \varepsilon_{N+1} \quad (43)$$

以上より, 提案するオンライン変化検出法は次のようにまとめることができる.

【オンライン変化検出法】 (41) 式で定義された s_N , m_N はすでに求まっているとする. 逐次部分空間同定アルゴリズムによって ε_{N+1} が生成されたとき, s_{N+1} , m_{N+1} をそれぞれ (42), (43) 式によって更新し, それらを使って次の尤度比検定を実施する.

$$\frac{s_{N+1}}{\sigma_0^2} - \ln \frac{s_{N+1} - \frac{m_{N+1}^T m_{N+1}}{l}}{\sigma_0^2} > \frac{\chi_\alpha^2(l/\lambda - 1)}{l/\lambda} \quad (44)$$

$\implies \mathbf{H}_0$ を棄却

ただし, $\mathbf{H}_0$ は 5.1 節中にある帰無仮説 $\mathbf{H}_0$ である.

(注意 2) 本論文の一部については SYSID 2003 で発表された [29]. しかし, 参考文献 [29] では, 変化後の平均を暗に既知とし 0 としている. また, しきい値の決定に関して, 有意水準についてなんら言及していない.

6. 数値例

次の二つの動作点をもつ ARX モデルで記述されたシステムを考える．

$$y_t = \frac{B(q^{-1})}{A_i(q^{-1})} u_t + \frac{1}{A_i(q^{-1})} e_t \quad (45)$$

ここで、 q^{-1} は遅延演算子を表し、各動作点 $i=1,2$ に対して

$$A_i(q) = 1 - (\sqrt{3}a_i + b_i)q^{-1} + (a_i^2 + \sqrt{3}a_ib_i)q^{-2} - a_i^2b_iq^{-3} \quad (46)$$

$$B(q) = 0.2q^{-1} + 0.08q^{-2} \quad (47)$$

とする．スカラー量の対 (a_i, b_i) , $i=1,2$ はシステムの極の配置を決定する．Fig. 1 の複素平面上において、 (a_1, b_1) は灰色の×印に対応し、 (a_2, b_2) は黒の×印に対応する．

システムは、サンプリング時刻 2000 において動作点 1 から動作点 2 へ瞬間的に変化するとし、また、時刻 5000 において動作点 2 から動作点 1 へ瞬間的に変化するとする．入力信号の特性変化は時刻 1500, 3500, 7000 で生じるとする．つまり、本数値実験の目標は、オンライン変化検出法によって時刻 2000, 5000 における変化は検出するが、時刻 1500, 3500, 7000 の入力信号の変化は検出しないことである．

区間 $[0, 1500]$ と $[3501, 7000]$ において、入力信号として平均 0, 分散 1 の Gauss 白色信号を採用する．また、区間 $[1501, 3500]$ と $[7001, 9000]$ において、平均 0, 分散 1 の Gauss 白色信号を 10 次の Butterworth フィルタ（カットオフ周波数は Nyquist 周波数の 0.6 倍）でフィルタリングした信号と平均 0, 分散 0.01 の Gauss 白色信号を重ねた信号を使用する．Fig. 2 の上図に入力信号のプロファイルを示す．雑音 e_t は平均 0, 分散 0.05^2 の Gauss 白色信号とする．出力信号 y_t の雑音 e_t に対する信号対雑音比 (signal-to-noise ratio, SNR) は約 23.6dB である．Fig. 2 中の下図に出力信号と雑音のプロファイルを示す．Hankel 行列のブロックサイズに $\alpha=\beta=8$ を採用する．逐次部分空間同定アルゴリズムにみなしデータ長が約 140 となるような忘却係数を導入する．オンライン変化検出法の忘却係数として $\lambda=0.2$ を使用する．

Fig. 3 に、(44) 式の不等式左辺の決定関数 (decision function) を実線で、有意水準 0.01% に基づくしきい値を破線でそれぞれ図示する．時刻 2000 と 5000 の直後でそれぞれ顕著なピークが観察でき、0.01% という厳しい有意水準でも変化が検出できることがわかる．一方で、時刻 1500, 3500, 7000 付近では、決定関数はとくに目立った振る舞いを示していない．この結果は、入力信号の変化に邪魔されることなく、監視対象の動特性の変化だけを的確に検出できる能力を提案する変化検出法がもっていることを例示している．

Fig. 4 は検定信号 ε_N のプロファイルを示す．また、

Fig. 5 は $\hat{\sigma}^2$ の逐次推定値 s_t を示す．Fig. 4, Fig. 5 のどちらにおいても、時刻 2000 と 5000 の直後に ε_N と s_t はともに顕著なピークを示している．一方で、それ以外の区間については、 ε_N はあたかも白色信号のように振舞っている．事実、ピーク付近を除いて ε_N サンプル分散を計算すると約 0.0028 で、 e_t の分散 0.05^2 に非常に近い．この事実は定理 1 の結果と符合する．

(注意 3) λ を選定するにあたり、1) λ は逐次同定の忘却よりも速い忘却にし、2) s_N, m_N の推定精度と検出のすばやさのトレードオフを考える、ことが重要である． s_N, m_N の推定は逐次同定の結果に基づいて行われることから 1) の選定基準は合理的であると思われる．2) について、今回は検出のすばやさに重点をおき、 $\lambda=0.2$ (みなし 5 サンプル) でも問題なく変化を検出できることを示すのを重視した．

Fig. 1 Poles

Fig. 2 Input, output and noise

7. おわりに

本論文では、逐次部分空間同定アルゴリズムを使った新しいオンライン変化検出法を提案した．また、逐次部分空間同定アルゴリズムから生成されるある変量の漸近的性質の解析を行い、その変量が変化検出のための検定信号としてふさわしいことを示した．提案したオンライン変化検出法は統計学における尤度比検定に基づいており、有意水準を与えた際のしきい値の決定方法も導出した．最後に、提案したオンライン変化検出法が入力信号源の動特性変化に邪魔されることなく監視対象の動特性

Fig. 3 Decision function. The threshold is chosen according to 0.01% of the level of significance

Fig. 4 Test signal ε_N

Fig. 5 Sample covariance s_N

の変化だけを的確に検出できる能力をもつことを数値例によって示した。

謝辞

定理1の証明に関して有意義な御助言を下された京都工芸繊維大学 大住 晃 教授に心から謝意を表します。丁寧な査読と有意義なコメントを下された査読者の方々に心から謝意を表します。

参考文献

- [1] R. W. Brockett (H. L. Trentelman and J. C. Willems, eds.): Hybrid models for motion control systems; *Essays on Control: Perspective in the Theory and its Applications*, ch. 2, pp. 29–53, Birkhäuser (1993)
- [2] M. Doğruel, Ü. Özgüner and S. Drakunov: Sliding-mode control in discrete-state and hybrid systems; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 41, No. 3, pp. 414–419 (1996)
- [3] G. Labinaz, M. M. Bayoumi and K. Rudie: Modeling and control of hybrid systems: A survey; *Proceedings of the IFAC 13th Triennial World Congress*, pp. 293–304 (1996)
- [4] 潮：ハイブリッドシステムのモデル；システム/制御/情報, Vol. 41, No. 1, pp. 35–40 (1997)
- [5] C. T. Chou, H. H. J. Bloemen, V. Verdult, T. T. J. van den Boom, T. Backx and M. Verhaegen: Nonlinear identification of high purity distillation columns; *Proceedings of the 12th IFAC Symposium on System Identification* (2000)
- [6] M. Basseville: Detecting changes in signals and systems – A survey; *Automatica*, Vol. 24, No. 3, pp. 309–326 (1988)
- [7] M. Basseville and I. V. Nikiforov: *Detection of Abrupt Changes*, Prentice Hall (1993)
- [8] M. Basseville, M. Abdelghani and A. Benveniste: Subspace-based fault detection algorithm for vibration monitoring; *Automatica*, Vol. 36, No. 1, pp. 101–109 (2000)
- [9] M. Verhaegen and E. Deprettere: A fast, recursive MIMO state space model identification algorithm; *Proceedings of the 30th IEEE CDC*, pp. 1349–1354 (1991)
- [10] H. Oku and H. Kimura: A recursive 4SID from the input-output point of view; *Asian J. Control*, Vol. 1, No. 4, pp. 258–269 (1999)
- [11] H. Oku: *Sequential subspace state-space system identification and state estimation of unknown multivariable systems*, PhD thesis, University of Tokyo (2000)
- [12] H. Oku and H. Kimura: Recursive 4SID algorithms using gradient type subspace tracking; *Automatica*, Vol. 38, No. 6, pp. 1035–1043 (2002)
- [13] H. Oku, G. Nijse, M. Verhaegen and V. Verdult: Change detection in the dynamics with recursive subspace identification; *Proceedings of the 40th IEEE*

CDC, pp. 2297–2302 (2001)

- [14] M. Verhaegen: Identification of the deterministic part of MIMO state space models given in innovations form from input-output data; *Automatica*, Vol. 30, No. 1, pp. 61–74 (1994)
- [15] M. Deistler, K. Peternell and W. Scherrer: Consistency and relative efficiency of subspace methods; *Automatica*, Vol. 31, No. 12, pp. 1865–1875 (1995)
- [16] M. Jansson and B. Wahlberg: A linear regression approach to state-space subspace system identification; *Signal Processing*, Vol. 52, pp. 103–129 (1996)
- [17] K. Peternell, W. Scherrer and M. Deistler: Statistical analysis of novel subspace identification methods; *Signal Processing*, Vol. 52, pp. 161–177 (1996)
- [18] M. Viberg, B. Wahlberg and B. Ottersten: Analysis of state space system identification methods based on instrumental variables and subspace fitting; *Automatica*, Vol. 33, No. 9, pp. 101–109 (1997)
- [19] M. Jansson and B. Wahlberg: On consistency of subspace methods for system identification; *Automatica*, Vol. 34, No. 12, pp. 1507–1519 (1998)
- [20] M. Jansson: Asymptotic variance analysis of subspace identification methods; *Proceedings of the 12th IFAC Symposium on System Identification* (2000)
- [21] D. Bauer and M. Jansson: Analysis of the asymptotic properties of the MOESP type of subspace algorithms; *Automatica*, Vol. 36, No. 4, pp. 497–509 (2000)
- [22] G. H. Golub and C. F. V. Loan: *Matrix Computations, 3rd Ed.*, The Johns Hopkins University Press (1996)
- [23] 竹村：現代数理統計学，創文社 (1991)
- [24] L. Ljung: *System Identification, 2nd Ed.*, Prentice Hall (1999)
- [25] E. J. Hannan and M. Deistler: *The Statistical Theory of Linear Systems*, John Wiley & Sons (1988)
- [26] 兄玉，須田：システム制御のためのマトリクス理論 第2版，計測自動制御学会 (1981)
- [27] P. Van Overschee and B. De Moor: *Subspace Identification for Linear Systems*, Kluwer Academic Publishers (1996)
- [28] T. Gustafsson: A 4SID-based change-detection algorithm; *Proceedings of the IFAC 13th Triennial World Congress*, pp. 179–184 (1996)
- [29] H. Oku: Application of a recursive subspace identification algorithm to change detection; *Proceedings of the 13th IFAC Symposium on System Identification*, pp. 1399–1404 (2003)

付 録

サンプル時刻 $N+1$ でシステムに変化が起こる場合について考える．変化後の出力を $y'_{N+1}, \dots, y'_{N+s}$ と記述し，変化が無かったとしたときの出力 $y_{N+1}, \dots, y_{N+s}$ と区別する．変化後の出力と変化が起こらなかったとしたときの出力の差に関して， $\tilde{y}_{\alpha(N+1)}$ と $\tilde{\mathcal{Y}}_N$ をそれぞれ

$$\tilde{y}_{\alpha(N+1)} := y'_{\alpha(N+1)} - y_{\alpha(N+1)}$$

$$\tilde{\mathcal{Y}}_N := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & y'_{N+1} - y_{N+1} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & y'_{N+1} - y_{N+1} & \cdots & y'_{N+s-1} - y_{N+s-1} \end{bmatrix}$$

と定義する．いま，変化の直後では $\hat{\Theta}_{\phi, N}$ は変化前のパラメータ Θ_{ϕ}^* の十分よい推定値であると仮定する．このとき，サンプル時刻 $N+1$ で変化が起こるときの r_{N+1} は (21) 式の代わりに

$$r_{N+1} = y_{\alpha(N+1)} + \tilde{y}_{\alpha(N+1)} - \frac{1}{N} (\mathcal{Y}_N + \tilde{\mathcal{Y}}_N) \mathcal{U}_N^T \left(\frac{1}{N} \mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T \right)^{-1} u_{\alpha(N+1)}$$

で表せることと変化直後では $\hat{\Theta}_{\phi, N} \approx \Theta_{\phi}^*$ に注意して，変化直後の $r_{N+1} + \hat{\Theta}_{\phi, N} q_{N+1}$ を計算すると，

$$r_{N+1} + \hat{\Theta}_{\phi, N} q_{N+1} \approx \mathcal{K} e_{\alpha(N+1)} + \left(\tilde{y}_{\alpha(N+1)} - \frac{1}{N} \tilde{\mathcal{Y}}_N \mathcal{U}_N^T \left(\frac{1}{N} \mathcal{U}_N \mathcal{U}_N^T \right)^{-1} u_{\alpha(N+1)} \right)$$

を得る．上式右辺の第1ブロック行に注目したとき，出力と雑音の間に有意義な信号対雑音比があるならば，第2項の存在が第1ブロック行の分散の推定値の計算に顕著な影響を与えることがわかる．