入出力データ量を固定した逐次部分空間同定 アルゴリズム*

亀山建太郎[†]・松浦 雄司[‡]・大住 晃[†]

Recursive Subspace-based Identification Algorithm Using Fixed Input-Output Data*

Kentaro KAMEYAMA[†], Yûji MATSUÛRA[‡] and Akira OHSUMI[†]

A recursive algorithm is derived for subspace system identification which is flexible and applicable to continuous/discrete-time, time-invariant/varying stochastic systems. Efficacy of the algorithm is demonstrated by simulations, comparing with another proposed algorithm.

1. 緒 言

近年、部分空間システム同定法は多入力多出力システムの線形状態空間表現を構築する有力なシステム同定法として注目され、活発な研究が行われている [14], [17]. この同定法は長時間の入力データの集積をまってデータ処理を行う、いわゆるバッチ処理が基本である。したがって、この方式では当然時間が経つにつれてデータ量が増え、これを計算機で処理することは計算機の容量の点からも大きな負荷となる。しかも、この方式では時変システムに対処することは困難である。もちろん、時変システムに対しても、基本的にはバッチ処理を時々刻々繰り返し適用すれば、次元の推定をも含めたシステム同定が可能である [7] が、これによれば計算機とそれに付随した記憶容量の増大化の問題が発生する。そこで、計算量と記憶容量双方の低減化を図るために逐次同定アルゴリズムの開発が望まれている。

部分空間同定法の基本は、マトリクスに関する二つの分解演算、すなわち LQ (あるいは QR) 分解と (システムの次元を決定するための) 特異値分解より成り立っ

ている。したがって、上述の逐次同定アルゴリズムを開発しようとするれば、 LQ 分解あるいは特異値分解のいずれかを逐次化するか、あるいはそれら両方を逐次化する方法が考えられる。

たとえば、Verhaegen-Deprettere [15] は、時不変システムに対して上述の両方の分解法を提案している。Gustafsson [2] は、システムの次元が既知であるという仮定のもとで、拡大可観測マトリクスによって張られる部分空間を track する EIV-PAST を適用するアルゴリズムを提案している。Oku-Kimura [10], [11] は圧縮された出力データマトリクスに対する逐次アルゴリズム、および拡大可観測マトリクスの推定を行うのに勾配法を用いた逐次アルゴリズムの二つの方法を提案している。Lovera ら [4] は、アレー信号処理と部分空間同定法との密接な関係に着目し、信号処理分野で数多く提案されている部分特異値分解のアイデアを適用することによって逐次アルゴリズムを提案しているが、システムの次元については触れていない。Takei ら [13] は拡大可観測マトリクスの推定に代わり、それにより低次元のシューア補部分マトリクスに対して特異値分解を毎ステップ実行する逐次アルゴリズムを、また Mercère ら [5] は propagator 法により拡大可観測マトリクスを二つの部分マトリクスに分割することによって逐次アルゴリズムを導出している。さらに、Lovera [3] は Lovera ら [4] の論文の延長線で projector tracking 法により逐次アルゴリズムの改良を試みている。

前述のように、逐次アルゴリズムはオンライン同定を目指すものであるから、本来時変システムに対しても適用可能であることが望まれる。これまでのほとんどの部

* 原稿受付 2003 年 12 月 3 日

[†] 京都工芸繊維大学 大学院 工芸科学研究科 Department of Mechanical & System Engineering, Graduate School of Engineering and Science, Kyoto Institute of Technology, Matsugasaki, Sakyo, Kyoto 606-8585, JAPAN

[‡] 現: (株) 神戸製鋼所 技術開発本部 機械研究所 Dynamics & Acoustics Research Section, Mechanical Engineering Research Laboratory, Kobe Steel, Ltd., 1-5-5 Takatsukadai, Nishi-ku, Kobe 651-2271, JAPAN

Key Words: subspace identification, recursive algorithm, stochastic system, time-varying system.

分空間逐次同定アルゴリズムはシステムが時不変であるという仮定のもとで得られる入出力代数方程式 (1) (次章) に基づいて導出されているが, システムが時間的にゆっくりと変化するという仮定をすれば, この式は近似的に成り立つとみてよい [7], [15]. そのような観点から, 多くの研究では一般論は時不変システムが対象であっても, 数値シミュレーションでは時変システムを扱っているものが多い [2], [13]. また, 時変システムに対する数値例による検証は数少ない [12].

以上の背景に鑑み, 本論文では, 時変システムを念頭におき, 入出力データマトリクスの次元 (データサイズ) を一定値に固定して LQ 分解を逐次化するという方針をとる. 近年の計算機の容量, 計算速度などには飛躍的な進化が見られ, データマトリクスの大きさを一定に固定することは, アルゴリズムの逐次化に対してそれ程大きなマイナス要因にはならないと思われる.

2. 入出力代数方程式と問題の記述

部分空間同定法によるシステム同定では, システムと出力の方程式はいずれも線形の状態空間モデルで表現されると仮定し, システムの状態量の次元とモデルの各係数マトリクスを取得された入出力データの集積より決定する. その基礎となるのは, それらの間に成り立つつぎのような入出力代数方程式である:

$$Y_i = F_i X_i + H_i U_i + \Sigma_i W_i + V_i \quad (1)$$

ここで, $Y_i \in R^{i\ell \times N}$, $U_i \in R^{im \times N}$ はそれぞれ出力 $y \in R^\ell$ と入力 $u \in R^m$ よりなる $i\ell$ 次元および im 次元ベクトルを N 列並べて構成される出力と入力データマトリクス, $X_i \in R^{n \times N}$ はシステム状態量 $x \in R^n$ より, また $W_i \in R^{in \times N}$, $V_i \in R^{i\ell \times N}$ は, Y_i , U_i と同様に, システム雑音 $w \in R^n$ あるいは観測雑音 $v \in R^\ell$ より構成されるマトリクスである. また, $F_i \in R^{i\ell \times n}$ は拡大可観測マトリクス, $H_i \in R^{i\ell \times im}$, $\Sigma_i \in R^{i\ell \times in}$ はいずれも下ブロック三角マトリクスである (それらの具体的な構造および (1) 式の導出については参考文献 (たとえば [14], [16]) を参照されたい).

入出力代数方程式 (1) は, システムが離散時間モデルで表現される場合はもちろんのこと, 連続時間モデルに対しても著者らが提案している超関数の概念を用いた方法により得られる [6]. すなわち, システムのモデルを平均値零の正規性白色雑音 w_k および v_k をうける離散時間時不変確率システム

$$\Sigma_D: \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k = Cx_k + Du_k + v_k \end{cases} \quad (2)$$

として与える場合には, 出力データマトリクス $Y_i \in R^{i\ell \times N}$ は, $(N+i-2)$ ステップ過去から現在までに得られたデータ $\{y_j\}_{j=k-N-i+2, \dots, k-1, k}$ をもとに, N 個の $i\ell$ 次

元ベクトル $y_i(j) = [y_{j-i+1}^T, \dots, y_{j-1}^T, y_j^T]^T$ ($j=k-N+1, \dots, k-1, k$) を定義して並べることによってハンケルマトリクス

$$Y_i = [y_i(k-N+1), \dots, y_i(k-1), y_i(k)]$$

として構成される. このとき, マトリクス U_i , W_i , V_i は同様な構造をもつマトリクスであり, X_i は

$$X_i = [x_{k-N-i+2}, \dots, x_{k-i}, x_{k-i+1}]$$

で与えられる.

また, 平均値零の正規性白色雑音 $w(t)$, $v(t)$ をうける連続時間時不変確率システム

$$\Sigma_C: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \end{cases} \quad (3)$$

を与える場合には, つぎのようにして超関数の概念を用いた方法により入出力方程式 (1) を得る. すなわち, N 個の離散時刻 $\{t_{k-N+1}, \dots, t_{k-1}, t_k\}$ において, データ $y(\cdot)$ を時点 t_j を指標としてもつ C^∞ 級スカラ関数 $\varphi(\cdot; t_j)$ を用いて加工し, $i\ell$ 次元ベクトル $y_i(\varphi)(t_j) = [y^T(\varphi)(t_j), \dots, (-1)^{i-1} y^T(\varphi^{(i-1)})(t_j)]^T$ を作り, これを順に N 個並べることによって, データマトリクス $Y_i = Y_i(\varphi)$ を

$$Y_i(\varphi) = [y_i(\varphi)(t_{k-N+1}), \dots, y_i(\varphi)(t_{k-1}), y_i(\varphi)(t_k)]$$

として構成する. ここで, $y(\varphi^{(k)})(t_j) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \varphi^{(k)}(t; t_j) dt$ は時点 $t = t_j$ における $y(t)$ の形式的な (すなわち, 超関数の意味の) k 階微分値 $y^{(k)}(t)$ である. $U_i = U_i(\varphi)$, $W_i = W_i(\varphi)$, $V_i = V_i(\varphi)$ も同様な構造を有し, 状態量マトリクス $X_i(\varphi)$ は

$$X_i(\varphi) = [x(\varphi)(t_{k-N+1}), \dots, x(\varphi)(t_{k-1}), x(\varphi)(t_k)]$$

と与えられる. なお, マトリクス F_i , H_i , Σ_i は離散時間モデルの場合と全く同じ構造を持つ.

上述のように, システム Σ_D , Σ_C いずれの場合にも入出力関係は代数方程式 (1) で与えられる. したがって, 以下では Σ_D , Σ_C いずれとも区別することなく, (1) 式に基づいてオンライン同定アルゴリズムを導出する. そのため, 時間変数 k あるいは t_k を現在時刻とし, (1) 式を

$$\begin{aligned} Y_i(k|k-N+1) &= F_i(k) X_i(k|k-N+1) \\ &+ H_i(k) U_i(k|k-N+1) + \Sigma_i(k) W_i(k|k-N+1) \\ &+ V_i(k|k-N+1) \end{aligned} \quad (4)$$

と表現しなおす. ここで, 記号 $Y_i(k|k-N+1)$ の引数 k は現在時刻を, また $k-N+1$ はデータマトリクスを構成する N 列ベクトルの開始時刻を意味する. すなわち,

$$Y_i(k|k-N+1)$$

$$\begin{aligned}
 &= [y_i(k-N+1), \dots, y_i(k-1), y_i(k)] \quad \text{for } \Sigma_D \\
 &= [y_i(\varphi)(t_{k-N+1}), \dots, y_i(\varphi)(t_{k-1}), y_i(\varphi)(t_k)] \\
 &\quad \text{for } \Sigma_C
 \end{aligned}$$

である。また、マトリクス F_i , H_i , および Σ_i についても、時変システムマトリクス (A_k, B_k, C_k, D_k) , あるいは $(A(t), B(t), C(t), D(t))$ にも対応できるように引数 k を導入した。

さて、以上の準備のもとで、現在時刻までに得られた入出力データ $U_i(k|k-N+1)$, $Y_i(k|k-N+1)$ に基づいて、時変/時不変システムの次元 n とマトリクス (A, B, C, D) を同定する逐次アルゴリズムを導出するのが本論文の目的である。ただし、データマトリクスの大きさを決める整数 i はシステムの次元 n より十分大きくするという条件は暗黙のうちに仮定する。

3. 逐次アルゴリズム

本章では、入出力データマトリクスの大きさを決定する次元 N を固定した逐次アルゴリズムを導出する。

まず、雑音項の影響を除去する目的で $U_i(k|k-N+1)$ と同様な構造を持つ補助変数マトリクス $U_h(k|k-N+1) \in R^{hm \times N}$ を $U_i(k|k-N+1)$ と独立に構成する。これは、たとえば

$$\begin{aligned}
 U_h(k|k-N+1) &= [u_h(k-i-N+1), \dots, u_h(k-i)] \quad \text{for } \Sigma_D \\
 &= [u_h(\psi)(t_{k-N+1}), \dots, u_h(\psi)(t_k)] \quad \text{for } \Sigma_C
 \end{aligned}$$

のようにとる。ここで、システム Σ_D に対しては $u_h(j) = [u_{j-h+1}^T, \dots, u_{j-1}^T, u_j^T]^T$, また Σ_C については関数 $\varphi(\cdot; t_j)$ とは異なる別の C^∞ 級スカラー関数 $\psi(\cdot; t_j)$ を用いることによって生成する。そこでつぎのような $(2i+h) \times N$ 次元マトリクスの LQ 分解を行う：

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} U_i(k|k-N+1) \\ U_h(k|k-N+1) \\ Y_i(k|k-N+1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} L_{11}(k) & 0 & 0 \\ L_{21}(k) & L_{22}(k) & 0 \\ L_{31}(k) & L_{32}(k) & L_{33}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T(k) \\ Q_2^T(k) \\ Q_3^T(k) \end{bmatrix} \quad (5)
 \end{aligned}$$

この分解により、拡大可観測マトリクス $F_i(k)$ の張る部分空間が L -マトリクスの要素によって決定できることが知られている。すなわち、

$$\frac{1}{\sqrt{N}} L_{32}(k) = F_i(k) \frac{1}{\sqrt{N}} X_i(k|k-N+1) Q_2(k) \quad (6)$$

の関係が得られる。したがって、(6) 式の左辺 $(1/\sqrt{N}) \cdot L_{32}(k)$ の特異値分解（あるいは $(1/N) L_{32}(k) L_{32}^T(k)$ の固有値分解）によって、システムの次元 n と拡大可観測

マトリクス $F_i(k)$ を同定する。この結果を用いて、(正則なマトリクス T により変換された) システムマトリクスの組 (A_T, C_T) を決定することができる（ここで添字 T はマトリクス T による相似変換，すなわち $A_T = T A T^{-1}$, $C_T = C T^{-1}$ ）。さらに、 $F_i(k)$ の同定値を $U_n(k)$ とすると、その直交補空間 $U_n^\perp(k)$ に対して、(5) 式より次式を得る：

$$\{U_n^\perp(k)\}^T L_{31}(k) L_{11}^{-1}(k) = \{U_n^\perp(k)\}^T H_i(k) \quad (7)$$

これより残りのシステムマトリクスの組 (B_T, D) ($B_T = T B$) を決定することができる [16]。このように、システムの次元 n とマトリクス (A_T, B_T, C_T, D) を決定するためには、結局 LQ 分解の L 要素がわかればシステムの同定が可能であり、その逐次更新が実行できれば逐次アルゴリズムが得られることになる。

以上の議論を踏まえて、つぎに逐次アルゴリズムの導出を行う。いま、 $k+1$ 時点で得られた新しい入力と出力、 $\{u_{k+1}, y_{k+1}\}$, あるいは $\{u(t_{k+1}), y(t_{k+1})\}$ をもとに、入出力ベクトル $u_i(k+1)$, $u_h(k+1)$ および $y_i(k+1)$ を構成し、これを k 時点までの入出力データマトリクスに含めると、つぎの関係式を得る：

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} U_i(k|k-N+1) : u_i(k+1) \\ U_h(k|k-N+1) : u_h(k+1) \\ Y_i(k|k-N+1) : y_i(k+1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} u_i(k-N+1) : U_i(k+1|k-N+2) \\ u_h(k-N+1) : U_h(k+1|k-N+2) \\ y_i(k-N+1) : Y_i(k+1|k-N+2) \end{bmatrix} \quad (8)
 \end{aligned}$$

この関係式は、Cho ら [1], Lovera ら [4] によって提案されている update/downdate 方式，すなわち新しいデータによってデータマトリクスを更新してデータサイズを一定に保つために古いデータをそれから除く仕方を簡潔に表したものであり、以下、本論文で逐次同定アルゴリズムを導くにあたっての鍵となる。

さて、ステップ $k+1$ における $(im+hm+il) \times N$ 次元データマトリクスの LQ 分解は

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} U_i(k+1|k-N+2) \\ U_h(k+1|k-N+2) \\ Y_i(k+1|k-N+2) \end{bmatrix} = \\
 &\begin{bmatrix} L_{11}(k+1) & 0 & 0 \\ L_{21}(k+1) & L_{22}(k+1) & 0 \\ L_{31}(k+1) & L_{32}(k+1) & L_{33}(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T(k+1) \\ Q_2^T(k+1) \\ Q_3^T(k+1) \end{bmatrix} \quad (9)
 \end{aligned}$$

と与えられる。以下式の展開にあたって、(5) および (9) 式の右辺をそれぞれ

$$\begin{bmatrix} L_{11}(\cdot)Q_1^T(\cdot) \\ L_{21}(\cdot)Q_1^T(\cdot) + L_{22}(\cdot)Q_2^T(\cdot) \\ L_{31}(\cdot)Q_1^T(\cdot) + L_{32}(\cdot)Q_2^T(\cdot) + L_{33}(\cdot)Q_3^T(\cdot) \end{bmatrix}$$

と表現する. この (5) および (9) 式の LQ 分解表現をそれぞれ (8) 式の左辺および右辺に代入すると次式が得られる.

$$\begin{bmatrix} L_{11}(k)Q_1^T(k) \\ L_{21}(k)Q_1^T(k) + L_{22}(k)Q_2^T(k) \\ L_{31}(k)Q_1^T(k) + L_{32}(k)Q_2^T(k) + L_{33}(k)Q_3^T(k) \\ u_i(k+1) \\ u_h(k+1) \\ y_i(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i(k-N+1) \\ u_h(k-N+1) \\ y_i(k-N+1) \\ L_{11}(k+1)Q_1^T(k+1) \\ L_{21}(k+1)Q_1^T(k+1) + L_{22}(k+1)Q_2^T(k+1) \\ L_{31}(k+1)Q_1^T(k+1) + L_{32}(k+1)Q_2^T(k+1) \\ + L_{33}(k+1)Q_3^T(k+1) \end{bmatrix} \quad (10)$$

つぎに, (10) 式の左辺にそれ自身の転置を, また右辺にはそれ自身の転置をかける. すなわち, (10) 式を $[A \vdash b] = [c \vdash D]$ の形のマトリクスと見ると,

$$[A \vdash b][A \vdash b]^T = [c \vdash D][c \vdash D]^T$$

より

$$AA^T + bb^T = cc^T + DD^T$$

の等式を得る. まず左辺に対する演算 $[A \vdash b][A \vdash b]^T = AA^T + bb^T$ は, $Q_i^T(\cdot)Q_j(\cdot) = I\delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) (δ_{ij} : クロネッカーデルタ) に留意するとつぎのようになる.

$$\begin{bmatrix} L_{11}(k)Q_1^T(k) \\ L_{21}(k)Q_1^T(k) + L_{22}(k)Q_2^T(k) \\ L_{31}(k)Q_1^T(k) + L_{32}(k)Q_2^T(k) + L_{33}(k)Q_3^T(k) \\ \vdots u_i(k+1) \\ \vdots u_h(k+1) \\ \vdots y_i(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11}(k)Q_1^T(k) \\ L_{21}(k)Q_1^T(k) + L_{22}(k)Q_2^T(k) \\ L_{31}(k)Q_1^T(k) + L_{32}(k)Q_2^T(k) + L_{33}(k)Q_3^T(k) \\ \vdots u_i(k+1) \\ \vdots u_h(k+1) \\ \vdots y_i(k+1) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} L_{11}(k)L_{11}^T(k) & L_{11}(k)L_{21}^T(k) \\ L_{21}(k)L_{11}^T(k) & L_{21}(k)L_{21}^T(k) + L_{22}(k)L_{22}^T(k) \\ L_{31}(k)L_{11}^T(k) & L_{31}(k)L_{21}^T(k) + L_{32}(k)L_{22}^T(k) \\ L_{11}(k)L_{31}^T(k) & L_{21}(k)L_{31}^T(k) + L_{22}(k)L_{32}^T(k) \\ L_{21}(k)L_{31}^T(k) + L_{22}(k)L_{32}^T(k) & L_{31}(k)L_{31}^T(k) + L_{32}(k)L_{32}^T(k) + L_{33}(k)L_{33}^T(k) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} u_i(k+1)u_i^T(k+1) & u_i(k+1)u_h^T(k+1) \\ u_h(k+1)u_i^T(k+1) & u_h(k+1)u_h^T(k+1) \\ y_i(k+1)u_i^T(k+1) & y_i(k+1)u_h^T(k+1) \\ u_i(k+1)y_i^T(k+1) \\ u_h(k+1)y_i^T(k+1) \\ y_i(k+1)y_i^T(k+1) \end{bmatrix} \quad (11)$$

同様に, 右辺に対する演算 $[c \vdash D][c \vdash D]^T = cc^T + DD^T$ についても行くと, その結果は次のようになる.

$$\begin{bmatrix} u_i(k-N+1)u_i^T(k-N+1) \\ u_h(k-N+1)u_i^T(k-N+1) \\ y_i(k-N+1)u_i^T(k-N+1) \\ u_i(k-N+1)u_h^T(k-N+1) \\ u_h(k-N+1)u_h^T(k-N+1) \\ y_i(k-N+1)u_h^T(k-N+1) \\ u_i(k-N+1)y_i^T(k-N+1) \\ u_h(k-N+1)y_i^T(k-N+1) \\ y_i(k-N+1)y_i^T(k-N+1) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} L_{11}(k+1)L_{11}^T(k+1) & L_{11}(k+1)L_{21}^T(k+1) \\ L_{21}(k+1)L_{11}^T(k+1) & L_{21}(k+1)L_{21}^T(k+1) \\ & + L_{22}(k+1)L_{22}^T(k+1) \\ L_{31}(k+1)L_{11}^T(k+1) & L_{31}(k+1)L_{21}^T(k+1) \\ & + L_{32}(k+1)L_{22}^T(k+1) \\ L_{11}(k+1)L_{31}^T(k+1) \\ L_{21}(k+1)L_{31}^T(k+1) + L_{22}(k+1)L_{32}^T(k+1) \\ L_{31}(k+1)L_{31}^T(k+1) + L_{32}(k+1)L_{32}^T(k+1) \\ + L_{33}(k+1)L_{33}^T(k+1) \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここで記号の簡単化のために, (11) 式右辺第1項および (12) 式第2項の 3×3 次元マトリクスの各要素に対して $\{\hat{L}_i(k), i = 0, 1, \dots, 5\}$ を

$$\hat{L}_0(k) = L_{11}(k)L_{11}^T(k) \quad (13)$$

$$\hat{L}_1(k) = L_{21}(k)L_{11}^T(k) \quad (14)$$

$$\hat{L}_2(k) = L_{31}(k)L_{11}^T(k) \quad (15)$$

$$\hat{L}_3(k) = L_{21}(k)L_{21}^T(k) + L_{22}(k)L_{22}^T(k) \quad (16)$$

$$\hat{L}_4(k) = L_{31}(k)L_{21}^T(k) + L_{32}(k)L_{22}^T(k) \quad (17)$$

$$\hat{L}_5(k) = L_{31}(k)L_{31}^T(k) + L_{32}(k)L_{32}^T(k) + L_{33}(k)L_{33}^T(k) \quad (18)$$

と定義すると, (11) 式と (12) 式を等置することによって $\{\hat{L}_i(k)\}$ に対する逐次関係式を得る:

$$\hat{L}_0(k+1) = \hat{L}_0(k) + u_i(k+1)u_i^T(k+1) - u_i(k-N+1)u_i^T(k-N+1) \quad (19)$$

$$\begin{aligned}\hat{L}_1(k+1) &= \hat{L}_1(k) + u_h(k+1)u_i^T(k+1) \\ &\quad - u_h(k-N+1)u_i^T(k-N+1) \quad (20)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{L}_2(k+1) &= \hat{L}_2(k) + y_i(k+1)u_i^T(k+1) \\ &\quad - y_i(k-N+1)u_i^T(k-N+1) \quad (21)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{L}_3(k+1) &= \hat{L}_3(k) + u_h(k+1)u_h^T(k+1) \\ &\quad - u_h(k-N+1)u_h^T(k-N+1) \quad (22)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{L}_4(k+1) &= \hat{L}_4(k) + y_i(k+1)u_h^T(k+1) \\ &\quad - y_i(k-N+1)u_h^T(k-N+1) \quad (23)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{L}_5(k+1) &= \hat{L}_5(k) + y_i(k+1)y_i^T(k+1) \\ &\quad - y_i(k-N+1)y_i^T(k-N+1) \quad (24)\end{aligned}$$

さて、前述のようにシステムマトリクスと次元を同定するにあたっては、 $L_{32}(k)L_{32}^T(k)$ と $L_{31}(k)L_{11}^{-1}(k)$ が必要である。まず、(17) 式より次式が得られる：

$$L_{32}(k) = \left\{ \hat{L}_4(k) - L_{31}(k)L_{21}^T(k) \right\} \left\{ L_{22}^T(k) \right\}^{-1} \quad (25)$$

(15) 式より $L_{31}(k)$ を、また (14) 式より $L_{21}(k)$ を求めると、

$$L_{31}(k)L_{21}^T(k) = \hat{L}_2(k)\hat{L}_0^{-1}(k)\hat{L}_1^T(k) \quad (26)$$

を得る。同様に (16) 式より (13), (14) 式を考慮して

$$L_{22}(k)L_{22}^T(k) = \hat{L}_3(k) - \hat{L}_1(k)\hat{L}_0^{-1}(k)\hat{L}_1^T(k) \quad (27)$$

を得る。したがって、(25) 式より積 $L_{32}(k)L_{32}^T(k)$ を求め、(26), (27) 式を用いると次式を得る：

$$\begin{aligned}L_{32}(k)L_{32}^T(k) &= \left\{ \hat{L}_4(k) - \hat{L}_2(k)\hat{L}_0^{-1}(k)\hat{L}_1^T(k) \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \hat{L}_3(k) - \hat{L}_1(k)\hat{L}_0^{-1}(k)\hat{L}_1^T(k) \right\}^{-1} \\ &\quad \cdot \left\{ \hat{L}_4(k) - \hat{L}_2(k)\hat{L}_0^{-1}(k)\hat{L}_1^T(k) \right\}^T \quad (28)\end{aligned}$$

また、 $L_{31}(k)L_{11}^{-1}(k)$ は、(15) 式と $\hat{L}_0(k)$ の定義より直ちに次のように得られる：

$$L_{31}(k)L_{11}^{-1}(k) = \hat{L}_2(k)\hat{L}_0^{-1}(k) \quad (29)$$

以上の結果より、逐次同定アルゴリズムは次のように与えられる。なお、同定にあたって $\hat{L}_5(\cdot)$ は必要とされない。

[逐次部分空間同定アルゴリズム]

Step 0: [初期設定] まずデータマトリクスの大きさを決める次元 i および h を設定する。同定開始にあたって、十分に入出力データを取得し、それに対応して N を固定する。初期情報として ($k=0$ に対する) 入出力データマトリクス $U_i(0|N+1)$, $U_h(0|N+1)$ および $Y_i(0|N+1)$ を構成して (5) 式により LQ 分解を行い、 L -要素よりなるマトリクス $\{\hat{L}_i(0), i=0,1,\dots,4\}$ を求める。

Step 1: 第 $(k+1)$ ステップで新しく入手される入出力

データ $\{u(k+1), y(k+1)\}$ より、第 $(k+1)$ ステップでの入出力ベクトル $u_i(k+1), y_i(k+1)$ および $u_h(k+1)$ を構成し、前段階 (第 k ステップ) で得られている $\{\hat{L}_i(k), i=0,1,\dots,4\}$ を (19)~(23) 式により更新する。

Step 2: つぎに、(28) 式より $L_{32}(k+1)L_{32}^T(k+1)$ を計算する。

Step 3: Step 2 で得られたマトリクスの固有値分解を行う：

$$\begin{aligned}L_{32}(k+1)L_{32}^T(k+1) &= \begin{bmatrix} U_n(k+1) & U_n^\perp(k+1) \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} S_1^2(k+1) & 0 \\ 0 & S_2^2(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n^T(k+1) \\ \{U_n^\perp(k+1)\}^T \end{bmatrix} \quad (30)\end{aligned}$$

これよりシステムの次元 n が決定できる。

Step 4: Step 3 で得られた $U_n^\perp(k+1) \in R^{i \times n}$ より、システムマトリクスの組 (A_T, C_T) を求める。

Step 5: ついで、(29) 式より $L_{31}(k+1)L_{11}^{-1}(k+1)$ を計算し、これと Step 3 で得た $U_n^\perp(k+1)$ とから、(7) 式の関係より残りのシステムマトリクスの組 (B_T, D) を求める。

以上、 $k=0,1,2,\dots$ として Step 1~Step 5 を繰り返すことによってシステムの次元とシステムマトリクス (A_T, B_T, C_T, D) の同定値を逐次更新する。なお、Steps 4, 5 においてシステムマトリクスを決定する方法については文献 [16] を参照されたい。

本アルゴリズムは、入出力データマトリクスの LQ 分解の L -要素を直接更新する方法であり、次のような特徴がある。(i) LQ 分解は $k=0$ (Step 0) においてただ 1 回だけであり、(ii) それ以後は L -要素の繰返しのみでよい。(iii) 毎時間ステップで固有値分解を実行しなければならないが、そのマトリクスの次元は $il \times il$ で、これは入出力データマトリクスの次元に比べればはるかに低次元である。本論文の基本的な考え方はデータサイズを一定に保つ update/downdate にあり、前述したようにこの考え方は Cho ら [1] や Loevra ら [4] によって提案されている。Cho ら [1] のアルゴリズムでは、出力データの射影マトリクスと観測雑音の共分散マトリクスのそれぞれの更新が必要であり、かつ後者の更新ではそれを generator ベクトルに分解した上で並べ替えの作業をするなど、入出力データによる更新にいたるまでの過程は煩雑である。さらには、彼らの開発した高速部分空間分解により信号部分空間の導出を行うなど、全体として非常に複雑なアルゴリズムとなっている。また、Loevra ら [4] は MOESP (multivariable output-error state space) クラスの部分空間同定アルゴリズムを導出しているが、やや複雑である。これらのアルゴリズムに比べれば、本論文で提案した逐次アルゴリズムは、入出力データの update/downdate の基礎式である (8) 式に基づくだけで

導出でき、直感的でしかも直截的である。

本論文で提案したアルゴリズムでは、データマトリクスの大きさを決める次元 N は一定値に固定されているが、これを固定しない逐次同定アルゴリズムも同様な考え方で導出することができる [8]。

4. 他のアルゴリズムとの比較

4.1 アプローチによる比較

緒言で述べたように、**3.** で提案した逐次アルゴリズム以外にもいくつかの逐次部分空間同定アルゴリズムが提案されている。まず、他の逐次アルゴリズムとアプローチという観点から比較を行う。ただし、記号の簡単化のために、データマトリクスを Y_i, U_i と記述する。

A. Oku の逐次アルゴリズムとの比較

Oku[9] のアルゴリズムでは、出力データマトリクスの重みつき射影により $L_{32}(k)$ 要素を取り出し、マトリクス

$$L_{32}(k)L_{32}^T(k) = Y_i \Pi_{U_i}^\perp \Phi^T \Psi \Phi \Pi_{U_i}^\perp Y_i^T \quad (31)$$

を求め、この逐次更新を行う。ここで、 $\Pi_{U_i}^\perp$ は $\Pi_{U_i} := U_i^T (U_i U_i^T)^{-1} U_i$ と定義するとき $\Pi_{U_i}^\perp = I - \Pi_{U_i}$ であるマトリクスであり、 Φ は本論文の $U_h(\cdot)$ に相当する補助変数マトリクス、また $\Psi = (\Phi^T \Pi_{U_i}^\perp \Phi)^{-1}$ である。Oku の方法では、 $Y_i \Pi_{U_i}^\perp \Phi$ と Ψ の逐次更新を行うが、これらに (5) 式の LQ 分解を施すと次の結果が得られ、結局 (28) 式の計算は **3.** で導出したものと同じであることがわかる：

$$\begin{aligned} Y_i \Pi_{U_i}^\perp \Phi^T &= Y_i \left[I - U_i^T (U_i U_i^T)^{-1} U_i \right] \Phi^T \\ &= Y_i \Phi^T - Y_i U_i^T (U_i U_i^T)^{-1} U_i \Phi^T \\ &= \hat{L}_4 - \hat{L}_2 \hat{L}_0^{-1} \hat{L}_1^T \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \Phi \Pi_{U_i}^\perp \Phi^T &= \Phi \left[I - U_i^T (U_i U_i^T)^{-1} U_i \right] \Phi^T \\ &= \Phi \Phi^T - \Phi U_i^T (U_i U_i^T)^{-1} U_i \Phi^T \\ &= \hat{L}_3 - \hat{L}_1 \hat{L}_0^{-1} \hat{L}_1^T \end{aligned} \quad (33)$$

B. Takei らの逐次アルゴリズムとの比較

Takei ら [13] のアルゴリズムでは、シューア補部分マトリクスの考え方をを用いることにより、マトリクス

$$L_{32}(k)L_{32}^T(k) = Y_i \Pi_{\Omega} \Pi_{U_i}^\perp \Pi_{\Omega} Y_i^T \quad (34)$$

の更新を行う。ここで、 $\Omega = [U_i^T, \Phi^T]^T$ である。また (34) 式は $\hat{E} = Y_i - \hat{G}^* U_i$ 、 $\hat{E}^* = Y_i - \hat{G}^* U_i$ 、 $\hat{E} = Y_i \Pi_{U_i}^\perp$ 、 $\hat{E}^* = Y_i \Pi_{\Omega}^\perp$ とおくことにより、

$$Y_i \Pi_{\Omega} \Pi_{U_i}^\perp \Pi_{\Omega} Y_i^T = \hat{E} \hat{E}^T - \hat{E} \hat{E}^{*T} \quad (35)$$

と変形できる。これを残差平方和とみて (35) 式の逐次更新を行っている。ここでも、直接 $L_{32}(k)L_{32}^T(k)$ を求めていることから、Oku の方法と同様にアルゴリズム中に逆マトリクスの更新を含んでいることが推測される (アルゴリズムの詳細は [13] を参照されたい)。

これらよりわかるように、Oku と Takei らのアルゴ

リズムでは $\Psi = (\Phi^T \Pi_{U_i}^\perp \Phi)^{-1}$ と逆マトリクスの更新によって構成されているのに対し、**3.** のアルゴリズムでは (19)~(23) 式に示したマトリクスの更新となっていることが相違点となっている。

4.2 時変システムの同定への適用

つぎに、時変システムの同定問題への適用という視点から比較を行う。Verhaegen-Deprettere [15] は離散時変システムに対して、システムマトリクスが時間的にゆっくりと変動するという仮定 (quasi-stationarity assumption) のもとで、古い入出力データに忘却係数をかけることで逐次アルゴリズムを提案している。また、Oku は彼の学位論文 [9] の一つの章で時変 (離散時間) システムに対する逐次 4SID 法を提案している。そこでは、文献 [15] と同じく古い入出力データに忘却係数をかけることを提案しているが、シミュレーションによるアルゴリズムの有効性の検証は行われていない。しかし、システムの突発変動の検出にそのアルゴリズムを適用して検証を行っている [12]。

本論文の **3.** で導出したように同定に使用する入出力データのサイズ N を固定するのではなく、古い入出力データに重みをかけて現時刻での同定値へその影響を低減しようという考えに基づいている。その考え方は、

$$U_i(k+1|k_0) = \left[\sqrt{\lambda} U_i(k|k_0) : u_i(k+1) \right] \quad (36)$$

$$Y_i(k+1|k_0) = \left[\sqrt{\lambda} Y_i(k|k_0) : y_i(k+1) \right] \quad (37)$$

のように記述される。 λ ($0 < \lambda < 1$) が忘却係数である。この考え方に従って導かれるアルゴリズムでは、古いデータを忘却係数の重みにより漸次消滅させ、最新データに重きをおいて、時変システムの同定に対処しようとしている。この忘却係数を用いるアルゴリズムでは、データマトリクスのブロック行数の約 2 倍程度の入出力データを保持するだけでよい。

逐次アルゴリズムは、新しいデータが取得されるたびに最新の同定値を生成するのが使命であるから、それは基本的に時変システムに対処できるはずである。実際、**3.** で導出したアルゴリズムはそのまま時変システム Σ_D に対して適用できる。著者の一人は、システムのあるまいが局所的に定常であるとみなせるという仮定のもとで、時変システム Σ_C に対する部分空間同定法を確立しているので [7]、この“局所定常性”の仮定 (local stationarity assumption) を導入することによって、逐次同定アルゴリズムの導出が行える。この仮定は、時変システムのシステムマトリクス ($A(t), B(t), C(t), D(t)$) あるいは ($A(k), B(k), C(k), D(k)$) が時間的にゆっくりと変化することを意味し、定性的に言えば、各マトリクスが時間連続的かつ滑らかに変化し、突発的变化はしないということである。 I_k を時刻 $t = t_k$ 近傍の時間区間とし、そこではシステムマトリクス、たとえ

ば $A(t)$ は一定, すなわち, $A(t) = A(t_k) = A_k$, あるいは $A(k) = A_k$ とみなす. このような仮定のもとで, 入出力方程式 (4) を得ることができる. このとき, (4) 式の $\Gamma_i(k)$, $H_i(k)$ および $\Sigma_i(k)$ は A_k, B_k, C_k および D_k により構成されるマトリクスとなる.

5. シミュレーション例

本章では, 時変システムを対象としたシミュレーションを行い, 提案アルゴリズムの有効性について確認する. 連続時間システム Σ_C と離散時間システム Σ_D では, 入出力代数方程式を作った後の逐次アルゴリズムは同じであるが, それまでの過程が多少異なる. 連続時間システムに対する入出力代数方程式を作る方法は著者らの論文 [6] を, また離散時間システムについては Verhaegen ら [16] など多くの論文が発表されているのでそれらを参照されたい.

5.1 連続時間時変システム

システムマトリクスが次のように与えられる 2 次元システム Σ_C を考える.

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & 1 \\ -0.4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1.5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1.5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ただし, $a_{11}(t) = 0.1 - 0.3\exp\{t/1500\}$ である. 雑音 $w(t)$, $v(t)$ はそれぞれ平均値零で互いに独立, さらに共分散マトリクス $\mathcal{E}\{w(t)w^T(s)\} = \mathcal{E}\{v(t)v^T(s)\} = 0.1^2 I_{2 \times 2} \delta(t-s)$ ($I_{2 \times 2}$: 2×2 次元単位マトリクス, $\delta(\cdot)$: ディラックの δ 関数) を持つ正規性白色雑音とした. 入力 $u(t)$ は平均値零で共分散マトリクス $Q_u = I_{2 \times 2} \delta(t-s)$ の正規性白色雑音とした. また, 同定に必要なパラメータはそれぞれ $i=6$, $h=10$, $N=500$, サンプル間隔は $\delta t=0.01$ とした. また, テスト関数は $\varphi(t; t_j) = \exp\{-(t-t_j)^2/2\sigma_0\}$ (U_i , Y_i に対しては $\sigma_0=0.8$, U_h に対しては $\sigma_0=5.0$) とし, 離散化パラメータ (各 t_j 間の間隔) は $\Delta t=0.5$ とした.

Fig.1 と Fig.2 にはそれぞれシステム極の同定値の実部と虚部を, Fig.3 には伝達零点の実部を示しており (零点の虚部は零である), また Fig.4 には (30) 式のシステムの次元を判別するための固有値をそれぞれ示した. シミュレーションでは, 定常とみなす区間 I_k を $I_k = [k-N+1, k] = N\Delta t$ とし, 各図の同定値はその中央時刻での値をプロットしている.

Figs.1-3 より, 同定値がシステムの真値の変化をよく追従している様子がわかる. また, Fig.4 よりシステムの次元が 2 次元であることが判断できる.

時変システムの同定に対して著者の一人が提案しているバッチ処理方式のアルゴリズム [7] では, 計算時間が

Fig. 1 Estimated real part of the pole

Fig. 2 Estimated imaginary part of the pole

Fig. 3 Estimated real part of the transmission zero

Fig. 4 Estimated eigenvalues ($N=500$)

184.295[s] であるのに対し, 提案した逐次アルゴリズムでは, 23.563[s] であり, 約 1/8 弱の時間短縮が見られた [8].

5.2 突発的に変化するシステムの同定

5.1 節で考察したのと同じ連続時間システムを考える. ただし, システムマトリクス A の要素 $a_{11}(t)$ が

$$a_{11}(t) = \begin{cases} -0.2 & (0 < t \leq 700) \\ 0.2 & (t > 700) \end{cases}$$

のように $t=700$ で突発的に変化するものとする. 本論文で導出した逐次アルゴリズムでは, 理論的には時変システムに対してはシステムマトリクスは時間的にゆっくりと変化すると仮定のもとでのみ適用可能であるが,

Fig. 5 Real part (top) and imaginary part (bottom) of the estimated pole ($N=500$)

このような突発的な変化にも対応できることをシミュレーションによって示す。

Fig.5が、 $N=500$ に対する結果である。 $a_{11}(t)$ が急激に変化する前後でゆるやかに追従している。その追従の速さは、データ幅 N を変えることによって変わることは容易にわかるであろう。

5.3 離散時間時変システム

同定対象は

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}(k) & 0.4 \\ -0.4 & a_{22}(k) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1.5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

のシステムマトリクスで与えられる2次元システム Σ_D とする。ただし、 A の時変要素は、 $a_{11}(k) = 0.1 + 0.5\exp\{-0.5k/500\}$ 、 $a_{22}(k) = 0.5 + 0.6\exp\{-0.5k/500\}$ である。 w_k 、 v_k は互いに独立な雑音系列（平均値零、共分散マトリクスはともに $0.1^2 I_{2 \times 2} \delta_{kj}$ ）、ブロックマトリクスのサイズは $i=h=10$ と設定した。上述の設定のもとで $N=500$ (Case 1) と $N=250$ (Case 2) の二つの場合について、それぞれ100回のモンテカルロ・シミュレーションを行った。

Figs. 6, 7にCase 1に対する同定したシステム極の実部のサンプル平均値とそのサンプル分散値の時間的挙動を実線で示し（破線は真値）、Fig.8には固有値を示した。これらの図より、同定の初期においては分散は大きいものの平均値は真値によく一致していることと、時間が経つにつれて同定精度が良くなって行く様子がわかり、Fig.8に示した固有値からも、システムの次元は2次元であることが判断できる。これより、本論文の提案アルゴリズムが有効であることが理解できる。Case 2につい

てはFigs.9-11に示した。この場合も良好な推定結果が得られていることから、提案アルゴリズムがデータサイズ N に対して過敏に反応せず、安定した同定値を得ることができるといえる。

本論文で提案したアルゴリズムをOku[9]のアルゴリズムによるシミュレーション結果と比較してみる。前述したように、Okuのアルゴリズムでは忘却係数 λ が任意に与えるパラメータである。本シミュレーションでは、 $\sqrt{\lambda}=1 \sim 0.4$ までの間の14種類の値を変化させた。Figs.12-16がそれらのうちの代表的な結果である。なお、Okuのアルゴリズムでは徐々にデータを蓄積する形となっていることから、本提案アルゴリズムとの整合性を保つために、データ幅と同じ $N=250$ ステップまでの逐次アルゴリズムによる結果を同定の初期値として用い、それ以後の同定値をプロットしている。

Figs.12-16より、忘却係数を導入したOkuのアルゴリズムでは、同定結果の平均値は $\sqrt{\lambda}$ の値を適切に選べば本提案アルゴリズムとさほどかわりはないが、分散は忘却係数の設定に大きく依存していることがわかる。システム極の虚部の同定についても同様な傾向にある。忘却係数の役割が古いデータを漸次消滅させることであることを想起すれば、本提案アルゴリズムにおけるデータサイズ N がこれに相当するパラメータであるとみることができる。このことに留意してFigs.6-11とFigs.12-16をみくらべると、本アルゴリズムで得られたサンプル平均値の結果であるFig.6あるいはFig.9（いずれも上図）に対応する数値結果が得られているのはFig.15の $\sqrt{\lambda}=0.8$ の場合であるが、その場合のサンプル分散値（Fig.15下図）は明らかに零に収束していない。計算時間についていえば、本論文のアルゴリズムでは1回の試行に要する時間は19.9[s]であるのに対し、Okuのそれは16.2[s]であり、演算速度の点からは多少優れている。

6. 結言

本論文では、入出力データマトリクスに対する LQ 分解の L 要素（の積のマトリクス）を逐次更新する逐次部分空間同定アルゴリズムを提案した。この L 要素を逐次化することによって、入出力データサイズを固定した場合の逐次同定アルゴリズムの導出が容易になったといえる。本手法は、同定に用いる情報の量（すなわち入出力のデータサイズ）を一定に保つことにより、時変システムの同定に適用可能である点が特徴となっている。またその有効性は数値例によって示された。

なお、本論文で提案した逐次アルゴリズムは一部文献[8]において発表したものであり、その導出法と4.1節で述べた他のアプローチとの比較について九州大学 和田清教授より適切な助言を得た[18]。そのことによって逐次同定アルゴリズムの導出がよりすっきりしたものになったことを記し、同教授に深甚の謝意を表す。また、査読者から適切なコメントを得、本論文に反映させるこ

Fig. 6 Time-varying features of the sample mean (top) and variance (bottom) of the real part of estimated pole by the proposed algorithm (Case 1. $N = 500$)

Fig. 7 Time-varying features of the sample mean (top) and variance (bottom) of the imaginary part of estimated pole by the proposed algorithm (Case 1. $N = 500$)

Fig. 8 Estimated eigenvalues by the proposed algorithm (Case 1. $N = 500$)

Fig. 9 Time-varying features of the sample mean (top) and variance (bottom) of the real part of estimated pole by the proposed algorithm (Case 2. $N = 250$)

Fig. 10 Time-varying features of the sample mean (top) and variance (bottom) of the imaginary part of estimated pole by the proposed algorithm (Case 2. $N = 250$)

Fig. 11 Estimated eigenvalues by the proposed algorithm (Case 2. $N = 250$)

Fig. 12 Time-varying features of the sample mean (top) and variance (bottom) of the real part of estimated pole by the Oku's algorithm ($\sqrt{\lambda}=0.998$)

Fig. 13 Estimated eigenvalues by the Oku's algorithm ($\sqrt{\lambda}=0.998$)

Fig. 14 Time-varying features of the sample mean (top) and variance (bottom) of the real part of estimated pole by the Oku's algorithm ($\sqrt{\lambda}=0.99$)

Fig. 15 Time-varying feature of the sample mean (top) and variance (bottom) of the real part of estimated pole by the Oku's algorithm ($\sqrt{\lambda}=0.8$)

Fig. 16 Estimated eigenvalues by the Oku's algorithm ($\sqrt{\lambda}=0.8$)

とができた。併せて謝意を表す。

本研究の一部は科学研究費補助金 (B) 16360046 によって行われた。

参考文献

- [1] Y. M. Cho, G. Xu and T. Kailath: Fast recursive identification of state space models via exploitation of displacement structure; *Automatica*, Vol. 30, pp. 45–59 (1994)
- [2] T. Gustafsson: Recursive system identification using instrumental variable subspace tracking; *Proc. 11th IFAC Symp. System Identification (SYSID'97)*, pp. 1683–1688 (1997)
- [3] M. Lovera: Recursive subspace identification based on projector tracking; *Proc. 13th IFAC Symp. System Identification (SYSID2003)*, pp. 1619–1624 (2003)
- [4] M. Lovera, T. Gustafsson and M. Verhaegen: Recursive subspace identification of linear and non-linear Wiener state-space models; *Automatica*, Vol. 36, pp. 1639–1650 (2000)

- [5] G. Mercère, S. Lecoecue and C. Vasseur: A new recursive method for subspace identification of noisy systems: EIVPM; *Proc. 13th IFAC Symp. System Identification (SYSID2003)*, pp. 1637–1642 (2003)
- [6] A. Ohsumi, K. Kameyama and K.-I. Yamaguchi: Subspace identification for continuous-time stochastic systems via distribution-based approach; *Automatica*, Vol. 38, pp. 63–79 (2002)
- [7] A. Ohsumi and T. Kawano: Subspace identification for a class of time-varying continuous-time stochastic systems via distribution-based approach; *Proc. 15th IFAC World Congress*, Vol. F, pp. 241–246 (2002)
- [8] A. Ohsumi, Y. Matsuiura and K. Kameyama: Recursive subspace identification for continuous-/discrete-time stochastic systems; *Proc. 13th IFAC Symp. System Identification (SYSID2003)*, pp. 911–916 (2003)
- [9] H. Oku: Sequential subspace state-space system identification and state estimation of unknown multi-variable systems; Ph.D. Dissertation, Univ. of Tokyo (2000) (*E-mail: oku@elc.oit.ac.jp*)
- [10] H. Oku and H. Kimura: A recursive 4SID from the input-output point of view; *Asian J. Control*, Vol. 1, pp. 258–269 (1999)
- [11] H. Oku and H. Kimura: Recursive 4SID algorithms using gradient type subspace tracking; *Automatica*, Vol. 38, pp. 1035–1043 (2002)
- [12] H. Oku, G. Nijisse, M. Verhaegen and V. Verdult: Change detection in the dynamics with recursive subspace identification; *Proc. 40th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 2297–2302 (2001)
- [13] Y. Takei, J. Imai and K. Wada: Recursive subspace identification based on subspace extraction via Schur complement; *Proc. 32nd ISCIE Int. Symp. Stochastic System Theory and Its Applications*, pp. 27–32 (2000)
- [14] P. Van Overschee and B. De Moor: *Subspace System Identification for Linear Systems*; Kluwer Academic Pub (1996)
- [15] M. Verhaegen and E. Deprettere: A fast recursive MIMO state space model identification algorithm; *Proc. 30th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 1349–1354 (1991)
- [16] M. Verhaegen and P. Dewilde: Subspace model identification, Part 1: The output-error state-space model identification class of algorithms; *Int. J. Control*, Vol. 56, No. 5, pp. 1187–1210 (1992)
- [17] M. Viberg: Subspace-based methods for the identification of linear time-invariant systems; *Automatica*, Vol. 31, No. 12, pp. 1835–1851 (1995)
- [18] K. Wada: Private communication (2003)