解の部分固定により探索空間を縮小するメタ戦略の検討 —巡回セールスマン問題への適用*

沼田 一道[†]・岩倉 行信[‡]

Experiments of a New Meta-Heuristics to Reduce the Search Space by Partially Fixing of the Solution Values — Application to Traveling Salesman Problem*

Kazumiti NUMATA[†] and Yukinobu IWAKURA[‡]

In this paper we present a new meta-heuristic approach to the traveling Salesman problem (TSP) and evaluate its performance. Proposed method reproduces and selects a population of local optima searched by random start modified Lin-Kernighan (mLK) method. It enhances the search power and efficiency of mLK by fixing the part of the solution whose values coincide each other and thus reducing the search space of solutions. Results of numerical experiments on TSPLIB95 (500 or so cities instances) show that it is superiorly competitive to existing meta-heuristic methods for TSP. The reason of enhanced search power is also investigated through obserbation of its search processes.

1. はじめに

NP-困難な組合せ最適化問題に対しては、できるだけ良い解を許容時間内に求める近似解法が重要な意味をもつ。近年、コンピュータの演算速度の向上を背景に、余裕の生じた演算時間を利用して近似解の精度を能率よく高める様々な方法-メタ戦略-の研究が盛んである [10]。メタ戦略は、その性質が充分解明されていない問題に対し、一般的な局所探索（逐次改善）法の精度を手軽に向上させる枠組みとして用いられる。一方、問題の構造をふまえた高精度の発見的解法においても、得られる解の精度を少しでも改善するため様々なメタ戦略が試みられている。本論文では、「探索中に現れた複数個の良い解を保持・更新し、その共通部分を固定して探索空間を徐々に限定していくメタ戦略（RSB 戦略）」[8] をとりあげ、後者の状況におけるその効果を実験的に検証する。

沼田ら [8] は 2opt 法を基本探索法とした RSB 戦略（RSB-2opt 法）を提案し、小規模の対称巡回セールスマン

ン問題（TSPLIB95[9] の中の 50～100 都市程度の問題例）に対する実験結果から、探索の精度が 2opt 法の場合と比べて大幅に改善されることを報告している。一方、対称巡回セールスマン問題（symmetric Traveling Salesman Problem: 以下 TSP とよぶ）に対する局所探索法としては、Lin-Kernighan 法 [4]（以下 LK 法とよぶ）が有名である。この LK 法を基本探索法として、「LK 法で求まる局所最適解に小変更を加えて LK 法を施す」ことを繰り返す iterated-Lin-Kernighan 法 [2]（以下 i-LK 法とよぶ）や chained-Lin-Kernighan 法 [6]（以下 c-LK 法とよぶ）が高精度の解法として知られている。i/c-LK 法の用いているメタ戦略は「局所反復戦略」と総称されている¹。

本論文では、LK 法の一つである変形 Lin-Kernighan 法 [5]（以下 mLK 法とよぶ）を基本探索法とした RSB 戦略の変形版（RSB*-mLK 法）を提案し、mLK 法に局所反復戦略を適用した i-mLK 法と比較した。RSB*戦略は多数の解を保持するという点で遺伝的アルゴリズム（以下 GA とよぶ）と似ている。TSP 向けの GA としては「枝組立交叉による遺伝的アルゴリズム」[7]（以下 GA-EAX 法とよぶ）の精度の高さが注目されるが、これとの比較も行った。TSPLIB95 中の問題例、att532 お

* 原稿受付 2003 年 4 月 7 日

[†] 東京理科大学 工学部 経営工学科 Department of Management Science, Faculty of Engineering, Tokyo University of Science; 1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo 162-8601, JAPAN

[‡] (株) アルファシステムズ Alpha Systems Inc.; 3-32-13 Tsuruyacho, Kanagawa-ku, Yokohama city, Kanagawa 221-0835, JAPAN

Key Words: meta-heuristics, TSP, modified Lin-Kernighan method, reduction of search space.

¹ Helsgaun[1] は感度解析を用いて候補枝集合を選定する LK 法（LKH 法とよぶ）を提案し、この LKH 法に局所反復戦略を適用した解法が非常に精度の高いことを報告している。

および rat575 に対して, RSB*-mLK 法と i-mLK 法を同じ時間だけ実行した場合の比較結果, および, 文献 [7] に示されている結果との比較は, RSB*戦略 (RSB*-mLK 法) が既存の定評ある戦略 (解法) に十分匹敵しうること示している.

以下, 2 節では, 基本探索法として用いる mLK 法を概観する. 3 節で, RSB*戦略と RSB*-mLK 法を提案する. 4 節では, RSB*-mLK 法の実行結果を示し, i-mLK 法, GA-EAX 法などと比較する. 5 節では, RSB*-mLK 法がうまく機能する理由をその探索過程の観察を通して考察する. 6 節は結論である.

2. 巡回セールスマン問題と mLK 法

TSP は, 訪問対象となるすべての都市を 1 度ずつ訪問して出発した都市に戻るような巡回路の中で, 距離や時間に基づく移動費用の総和が最小となるものを求める問題である. 代表的な組合せ最適化問題の一つであり, NP-困難な問題のクラスに属する.

訪問対象の都市を $1, 2, \dots, n$, 都市 i から都市 j への移動費用を c_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) とするとき, TSP はつぎのように定式化される.

$$(TSP) \begin{cases} \text{minimize} & \sum_{i=1}^{n-1} c_{\sigma[i]\sigma[i+1]} + c_{\sigma[n]\sigma[1]} \\ \text{sub. to} & \sigma \in \mathcal{S}_n \end{cases}$$

ただし $\mathcal{S}_n$ は $1, 2, \dots, n$ の置換全体の集合をあらわす. 本論文では, 費用行列 $C = (c_{ij})$ がすべての i, j について $c_{ij} = c_{ji}$ である “対称 TSP” を扱う.

TSP に対する発見的解法は, 現在の巡回路 (現在解) を構成する枝のうち k 本を別の枝で置き換え, 巡回路のコストが改善されれば, その巡回路 (次の現在解) へ移行することを繰り返す k opt 法 が基本である. 交換する枝の本数をしかるべき基準に基づいて制御する LK 法 [4] はその発展形であり, 実行速度と得られる解の精度の点で定評がある. ただ [4] の記述はやや抽象的で, 実装上の自由度が多少残る. 本研究では, LK 法の一変種である mLK 法 [5] を基本探索法として採用する.

2.1 Algorithm mLK

mLK 法は, LK 法の第 1 レベルの代替探索を省略し, その代わりに, 探索の各レベルにおいて, linkbase (現在の巡回路を構成する枝で, 最初に除去対象となるもの) の両端点に接続する枝を取入れ枝候補として扱うことで探索の幅を広げたものである¹. mLK 法 (LK 法) の基本動作は, 取入れ枝と除去枝を 1 組ずつ重ね合わせた 2-opt 操作 (2 本の枝を交換して巡回路長の変化を見る) の連鎖からなる. 初期巡回路 $\sigma = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ が与えられたとき, その探索過程 (逐次改善) の概略は以下のとおりである.

¹LK 法では片側に接続する枝のみを対象としている.

step 0 改善対象の巡回路 ($ctour$) を $ctour := \sigma$ とする.

step 1 最大改善量 ($bestGain$) を $-\infty$ とする.

2-opt 情報格納スタック ($mvSEQ$) を空とする. 操作対象巡回路 (τ) を $ctour$ とする. (Fig. 1)

call mLK-step(1,0) % 1:レベル, 0:累積改善量 (結果は $bestGain$, $mvSEQ$ と i_{best} に残る)

step 2 $bestGain$ が正の場合, $mvSEQ$ に残された 2-opt 動作 を $ctour$ に施し, 得られた巡回路を新たな $ctour$ として step 1 へ.

$bestGain$ が 0 以下 (改善不能) の場合, 現在の $ctour$ を 1 つずらす (linkbase の位置を 1 つずらす).

step 3 $ctour$ のどの枝を linkbase とする探索でも改善不能となれば step 4 へ. さもないと step 1 へ.

step 4 $ctour$ に 2-opt 改善 (可能なら) を加えたものを mLK 法の局所最適解とする.

step 1 でよばれる手続き mLK-step($level$, $cumGain$) は, $level$ を増減させながら交換すべき枝を再帰的にバックトラック探索する. 第 i レベル ($level = i$) の mLK-step が対象とする巡回路 $\tau^{(i)} = (t_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \dots, t_n^{(i)})$ を, 便宜的に $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ と表記する. また, 仮の 2opt 操作を施した次のレベルの対象巡回路を τ' で表す. 第 1 レベル開始時は $\tau^{(1)} = \tau = ctour$ である.

Fig. 1 Current tour

手続き mLK-step はつぎのように記述される.

```

procedure mLK-step(  $level$ ,  $cumGain$  )
  create  $ALIST$ ; /*  $|ALIST| \leq breadth(level)$  */
  if  $cumGain > bestGain$  then begin
     $bestGain := cumGain$ ;  $i_{best} := level - 1$ ;
  end;
  while  $ALIST \neq \emptyset$  do begin
    let  $(Bv, Pv)$  be the first element of  $ALIST$ ;
    (remove it from  $ALIST$ )
    if  $Bv = t_1$  then begin /*  $t_i \equiv t_i^{(level)}$  */
       $g1 := c[t_n, t_1] - c[t_1, Pv]$ ;
       $g2 := c[Pv, pred(Pv)] - c[pred(Pv), t_n]$ ;
    end else begin
       $g1 := c[t_1, t_n] - c[t_n, Pv]$ ;
       $g2 := c[Pv, next(Pv)] - c[next(Pv), t_1]$ ;
    end;
     $incrGain := \max\{g1, g2\}$ ;
  
```

```

testGain := cumGain + incrGain;
g := g1 + g2;
if testGain > bestGain then begin
  do-2opt( (Bv,Pv),  $\tau$ ); /*  $\tau \rightarrow \tau'$  */
  add (Bv,Pv) to the end of mvSEQ;
  call mLK-step(level+1, cumGain+g);
  undo-2opt( (Bv,Pv),  $\tau'$ ); /*  $\tau \leftarrow \tau'$  */
end; /*  $\tau \equiv \tau^{(level)}$ ,  $\tau' \equiv \tau^{(level+1)}$  */
if bestGain > 0 then RETURN
else begin
  delete the added element from the end of
    mvSEQ;
end;
end; /* of while */
RETURN
end. /* of procedure */

```

mLK-step は Fig. 2 に示す 2-opt 操作の繰返しにより探索（改善）を行う。一連の探索は、直前レベルの 2-opt 操作で最後に加えた枝を、次のレベルの 2-opt 操作の最初に取り除く枝（linkbase）として進める。第 i レベルでの 2-opt 操作における linkbase を $d^{(i)}$ 、付加する枝を $a^{(i)}$ 、除く枝を $b^{(i)}$ 、最後に加える枝を $x^{(i)}$ とする。ここで、 $d^{(i)} = x^{(i-1)}$ である。 $d^{(i)}$ が決まっているので、 $a^{(i)}$ を決めると $b^{(i)}$ と $x^{(i)}$ は一意に決まる。第 i レベルにおいては、取入れ枝を $width(i)$ 本試みる。取

入れ枝は linkbase の一方の端点 Bv ($\in \{t_n^{(i)}, t_1^{(i)}\}$) と巡回路 $\tau^{(i)}$ において Bv の両隣以外に位置する点 Pv との対 (Bv, Pv) で指定する。mLK-step が第 i レベルに進んだとき、後述の基準により、 $breadth(i)$ 個の点对 $(Bv_1, Pv_1), (Bv_2, Pv_2), \dots, (Bv_{width(i)}, Pv_{width(i)})$ からなるリスト $ALIST(i)$ を作成して、後のバックトラックに備える。

第 1 レベルの mLK-step から戻ったとき、 $bestGain$ が正であれば、 $mvSEQ$ に記録された ($bestGain$ を実現する) 一連の 2-opt 操作を実際に施して $ctour$ を更新する。非正の場合には、つぎの linkbase (の除去) から始まる探索を行う。第 1 レベルの linkbase は (一般性を失うことなく) $(t_n^{(1)}, t_1^{(1)})$ としている。

2.2 2-opt 連鎖の制御

枝 u の移動費用を $c[u]$ と書くと、2-opt の連鎖を m 回行った後の累積改善量は

$$cumGain(m) = c[d^{(1)}] - \sum_{i=1}^m c[a^{(i)}] + \sum_{i=1}^m c[b^{(i)}] - c[x^{(m)}]$$

で与えられる。ただし $cumGain(0) = 0$ とする。

$a^{(i)}$ を取入れ枝とする i 回目の 2-opt を行うか否かは、それがもたらす可能性のある改善量

$$incrGain(i) = \max\{c[d^{(i)}] - c[a^{(i)}], c[b^{(i)}] - c[x^{(i)}]\}$$

を指標として判定する。すなわち、 i 回目まで行ったときの予想累積改善量

$$testGain(i) = cumGain(i-1) + incrGain(i)$$

と $i-1$ 回目までに達成された最大の改善量

$$bestGain(i-1) = \max_{1 \leq j \leq i-1} cumGain(j)$$

を比較して、

$$testGain(i) \leq bestGain(i-1)$$

であれば他の取入れ枝候補を試し、候補がなければレベル $i-1$ に戻る（連鎖の停止）。そうでなければ取入れ枝 $a^{(i)}$ で決まる 2opt を施して ($\tau \rightarrow \tau'$)、レベル $i+1$ に進む。上のレベルから戻ったとき、 $bestGain$ が正であれば、さらに戻る。 $bestGain$ が 0 以下の場合、 $ALIST(i)$ に残り要素があれば、その先頭要素を $a^{(i)}$ として当該レベルの mLK-step の動作を復帰再開し、バックトラックを試みる。 $ALIST(i)$ に残り要素がなければ下のレベルへ戻る。第 1 レベルから戻るとき、mLK-step は終了して、step 4 の実行に移る。

2.3 ALIST

操作対象巡回路 $\tau^{(i)}$ (linkbase $d^{(i)}$ は $(t_n^{(i)}, t_1^{(i)})$) に対して、取入れ枝 $a^{(i)}$ の候補は、 $2(n-3)$ 本ある。 $incrGain(i)$ の計算、取入れ枝 $a^{(i)}$ の決定のためには、これらを全走査する必要があるが、実行時間短縮のため、 Pv (linkbase 側でない方の $a^{(i)}$ の端点) として、 $t_1^{(i)}$ あるいは $t_n^{(i)}$ との間の移動費用が小さいほうから 20 番目¹（重複を許して合計 40 点）までの点を走査対象とする。ただし、現

¹参考文献 [5] による。

Fig. 2 mLK move from linkbase (t_n, t_1)

在に至る 2-opt 連鎖で、取入れ／除去枝の端点になった点は走査対象から除く。この中から、

$$Gain = \max\{c[d^{(i)}] - c[a^{(i)}], c[b^{(i)}] - c[x^{(i)}]\}$$

の大きい順に $breadth(i)$ 個を選んで、 $ALIST(i)$ を作る¹。点对 (Bv, Pv) の情報により 2-opt 動作を完全に復元できるので、 $mvSEQ$ にはこれを格納していく。

$breadth(i)$ は mLK 法のパラメータであり、参考文献 [5] では、 $breadth(1) = breadth(2) = 5$, $breadth(i) = 1$ ($i = 3, 4, \dots$) と与えている。我々もそう設定した。

3. RSB*戦略と RSB*-mLK 法

参考文献 [8] で示された RSB 戦略はつぎの通りである。**[RSB 戦略]**

- step 1 問題のサイズを $s := n$ とする。
- step 2 ランダムに選んだ初期解を逐次改善して局所最適解を求めることを、 L 回行う。
- step 3 L 個の局所最適解から目的関数値の良いものを q 個選び出す。1 番目と 2 番目に良い解の間に一致した部分がなければ step 2 へ戻る。(この連続生起が一定回数に達したら停止する)
- step 4 目的関数値の良いほうから順に、解の一致部分を抽出し、 q に達するか一致部分がなくなる (直前) までの一致部分を固定し、問題のサイズを縮小する。 $(s$ を更新する)
- step 5 問題のサイズが十分小さくなったら step 6 に進む。そうでなければ、縮小された問題を新たな問題として、step 2 に戻る。
- step 6 今まで得られた最良の解を出力する。

[8] はこの戦略を用いて TSP を解いた。局所探索 (逐次改善) 法として 2-opt 法を用い、 $L = 100 \sim 400$, $q = 5 \sim 11$ で、100 都市程度以下の問題例に適用し、良好な実験結果を報告している。しかし、この方法をそのまま都市数の大きな問題に適用すると、4.2 節で見るように、実行時間と精度の点で壁にぶつかる。

そこで、より大きな問題 (TSP) に耐えられるよう、RSB 戦略をつぎのように変更する。

- (1) 精度の高い解を比較的少数保持する。
- (2) 親世代の各解 (巡回路) を構成する枝集合の共通部分を「緩く」固定し、探索を限定する。
- (3) 子世代の解は、親世代の解と共通 (合併) 枝集合の情報とランダム性を加味して初期解を作り、それを逐次改善して生成する。
- (4) 親世代から子世代へ一斉に交代するのではなく、両世代の解全体から評価値の良いものを半分残して (集団サイズを一定に保って) 次世代の親とする。

¹ $ALIST$ の要素は点对 (Bv, Pv) である。 $Gain \leq 0$ のものは格納しないので、 $ALIST$ の要素数はたかだか $breadth$ 個である。

(1) は、(3) における逐次改善に mLK 法を用いることで対処する。(2) は、RSB 戦略のように共通枝を完全に固定して問題を縮小するのではなく、mLK 法の実行過程で、固定されている linkbase からの探索を省略することにより探索の能率化を図る。(4) は、GA の不完全世代交代と同様で、良い解の情報を失わないようにしている。

(3) の初期解作成については、予備実験を行って 3 通りの方法を検討した。まず、(a) 共通枝を固定し、それ以外の部分をランダムにつなぎ合わせて初期解を与える方法を試した。この方法は [8] で用いられたもので、RSB 戦略として最も素朴 (自然) なものであるが、保持する解が少数で問題のサイズが大きい (500 都市程度) と、探索の集中 (枝固定) が進まず、ランダム多スタート戦略と同程度の精度しか達成されなかった。つぎに、(b) 合併枝集合 (集団内のいずれかの巡回路で用いられた枝集合から共通枝集合を除いたもの) を利用する方法を検討した。共通枝集合の要素を固定し、合併枝集合の要素をランダムに選んで初期巡回路を構成してみたが、時間のかからない簡便な方法では、合併集合に属さない (もちろん共通枝集合にも含まれない) 枝をかなり多く取り込まざるを得ず、(a) と同様探索の集中 (枝固定) は進まなかった。最後に、(c) 親世代の各解にランダムな「小変更」を加えたものを初期解とする方法を試みた。この方法だと探索の集中 (枝固定) が順調に進み、得られる解の精度も高かった。以上の観察をふまえ、本研究では (c) を採用することにした。

(c) における「小変更」(「突然変異」) は、親巡回路のランダムな箇所 (Fig. 3 のような枝交換 (double bridge) を (1 回以上) 施すことで実現した。double bridge は参考文献 [4] で導入されたもので、LK (mLK) 法の操作では実現できない変更を巡回路にもたらす効果がある。変更箇所には共通枝集合 (固定枝) の部分も含めることとした。探索の途中までは固定枝を除外したほうが集中が早く進み探索時間が多少短くて済むが、探索の終盤では固定枝も変更対象に含めたほうが若干精度が良かったからである。これは間違って固定された枝を解除する機会が増すからであろう。

Fig. 3 Double-bridge

次節で扱う i-mLK 法でも double bridge を用いている。また、小変更で (1 度に) 行う double bridge の回数については次節で検討する。

変更された RSB 戦略と mLK 法を組み合わせた TSP に対する RSB*-mLK 法はつぎのように書ける。

RSB*-mLK 法

- step 0 k 個の初期解（初期巡回路）からなる集合 $S = \{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots, \sigma^{(k)}\}$ を生成する.
- step 1 S の各要素 σ に局所最適化法（mLK 法+2-opt 法）を適用し、得られた k 個の局所最適解（局所最適巡回路）で S を置き換える.
- step 2 S の k 個の巡回路に共通して含まれる枝の集合 E_{and} を求める.
- step 3 S の各巡回路にランダムな double-bridge 操作を施し、 k 個の反復初期解を生成する. 反復初期解の集合を S_{mt} で表す.
- step 4 S_{mt} の各要素に mLK 法を適用する. このとき、 E_{and} に属する枝は第 1 レベルの linkbase として使用しない. 適用後の各巡回路を 2-opt 法でチェックし（必要があれば）さらに改善した局所最適解の集合を S_{new} とする.
- step 5 $S \cup S_{new}$ の $2k$ 個の要素から巡回路長の短い k 個（best k ）を選び、それらを新たな S とする.
- step 6 終了条件を満たしていれば step 7 へ、さもなければ step 2 へ行く.
- step 7 S 中の最良解を近似解とする. 停止.

RSB*-mLK 法は、「局所反復戦略」を“並列に”実行し、そこから得られる共通枝集合 E_{and} の情報を利用して探索のさらなる集中化と、複数解の保持による探索の分散（安定化）を同時に行うものである. ここでいう“並列実行”は比喩的であるが、物理的に並列化することも自然かつ容易と考えられる.

戦略のパラメータは、集団サイズ k 、何らかの停止基準（本論文では、「 S 中の最良解が連続して r 回更新されなければ停止する」としている）、および double-bridge を施す回数 $\#db$ （1 ないし 2 回）だけである.

4. 比較実験

提案した RSB*-mLK 法の性能を 2opt 法を用いた RSB 戦略と RSB*戦略（それぞれ RSB-2opt 法, RSB*-2opt 法とよぶ）、同一の mLK 法を用いた i-mLK 法、および、同様に集団的（多点）探索を行う GA-EAX 法と比較する. 実験は、PC-AT 互換機（Pentium 1GHz, メモリ 128MB, Windows 2000, Delphi 5）の上で行った.

4.1 RSB*-mLK 法の実行結果

TSPLIB95 中の att532 と rat575 を対象とした RSB*-mLK 法の実行結果を Table 1 に示す. “params”の列は「 $k-r-\#db$ 」を、“average”の列は 30 回の試行における（各試行の）最終巡回路長の平均と最適巡回路長からの平均相対誤差（百分率）を、“#opt”の列は（30 回の試行中）最適解を得た回数を示す. att532（532 都市）は都市配置に偏りのある問題例、rat575（575 都市）は一樣にランダムな都市配置の問題例である.

Table 1 Results of RSB*-mLK (30 trials)

att532(optimum: 27686)			
	params	average	#opt
RSB*	40-40-1	27698.7 (0.046%)	9
	40-80-1	27697.9 (0.043%)	11
	80-40-1	27693.5 (0.027%)	17
	80-80-1	27692.5 (0.023%)	18
	40-40-2	27692.8 (0.024%)	17
	40-80-2	27692.8 (0.024%)	17
	80-40-2	27691.3 (0.019%)	21
	80-80-2	27691.3 (0.019%)	21
	100-40-2	27687.7 (0.006%)	26
rat575(optimum: 6773)			
	params	average	#opt
RSB*	40-40-1	6775.2 (0.032%)	1
	40-80-1	6774.8 (0.027%)	3
	80-40-1	6774.2 (0.018%)	3
	80-80-1	6773.8 (0.011%)	11
	100-100-1	6773.3 (0.004%)	24
	40-40-2	6774.8 (0.027%)	2
	40-80-2	6774.4 (0.020%)	4
	80-40-2	6774.2 (0.017%)	5
	80-80-2	6773.6 (0.009%)	12

まず、集団サイズ k 、非更新継続回数 r 、double-bridge 適用回数 $\#db$ を、それぞれ (40,80), (40,80), (1,2) の 2 水準に設定して計 8 通りを実行した. Table 1 からは、 k の増加が（問題に関係なく）解の精度向上をもたらしていることを確認できる. att532 に対しては r を大きくしても精度はあまり変わらないが、 $\#db$ を 1 から 2 にすると精度が向上する. att532 では都市配置に偏りがあるので、ある局所最適解とそれを改善する他の局所最適解との距離が（mLK 探索の尺度で）大きい局面が少なからずあり、現在解に対する大きな変更は、そのような場合の移行の可能性を増すからではないかと想像される. 一方、rat575 に対しては $\#db$ によって精度はあまり変わらないが、 r を大きくすると精度は向上する. rat575 では都市配置がランダムに一樣なので、解空間においても局所最適解が比較的単調（ $\#db=1$ とした mLK 探索で最適解までたどれる程度）かつ一樣に存在すると思われる. したがって、大きな r で現在解の近くから何回も丁寧に探すことは、最適解に至る経路に乗るうえで効果があると想像される.

以上の観察をふまえて、パラメータ「 $k-r-\#db$ 」を、att532 については「100-40-2」に、rat575 については「100-100-1」に設定して実行したところ、得られる解の精度は、かなり高い水準に達した.

4.2 RSB-2opt 法, RSB*-2opt 法との比較

RSB*-mLK 法の出発点となった RSB-2opt 法の精度を見ておく。まず, $L=300$, $q=5$ の RSB-2opt 法で, att532 と rat575 を 10 回ずつ解いた結果を Table 2 に示す。length (巡回路長), error (相対誤差), etime (実行時間), #2opt (2opt 実行回数) は 10 回の平均である。

Table 2 Results of RSB-2opt (10 trials)

Problem	length (error)	etime	#2opt
att532	28435.7 (2.708%)	966 [s]	21780
rat575	7045.6 (4.025%)	1038 [s]	21900

10 試行の中の最良のものでも, att532 の場合, 相対誤差 1.93% (誤枝数 125 本), rat575 の場合, 相対誤差 3.09% (誤枝数 138 本) であり, Table 1 と比べると精度は非常に低い。可能な範囲でパラメータを変えても, 得られる解の精度は有意には変わらない。RSB 戦略は「3 本以上連続して固定された枝の列」を点とみなして問題そのものを縮小するが, 実行過程を見るとこの縮約がなかなか進まず, 半分のサイズ (250 都市前後) に縮小するのに全体の 8 割程度の時間がかかっている。

50~100 都市程度の問題に対して良好な結果を与えた RSB-2opt 法が, 500 都市程度の問題に対してうまく働かないのは,

- (1) 2opt 法の探索能力が 500 都市程度の問題に対しては十分でなく, 「良い解の共通部分を固定する」という戦略が効果を発揮できない
- (2) 都市数が大きくなると縮約の回数が多くなり, 誤って (最適解に含まれない枝を) 固定する機会が増すので, 「共通枝を完全に固定して問題を縮小する」という戦略が有効でない

からだと考えられる。実際, 多スタート 2opt 法を 10 回実行し得られる解 (各回の最良のもの) の相対誤差を調べたところ, att532 の場合, 各回 510 秒¹ (平均 7219 回の 2opt) の探索で平均 5.99% (最良で 5.72%) 程度, rat575 の場合, 各回 483 秒¹ (平均 6382 回の 2opt) の探索で平均 8.06% (最良で 7.60%) 程度であった。これらの問題に対して, RSB 戦略の効果は多スタート戦略の相対誤差を半減させる程度に留まるといえる。

上記 (2) に対する対策として, (a) 問題縮小に代わる探索能率化の工夫, (b) 誤った枝固定を回復する機会の導入, (c) 良い解を蓄積する不完全世代交代の採用, が考えられる。この方向で構想されたのが RSB* 戦略である。

基本探索法は 2opt 法のままで戦略のみを RSB* にした RSB*-2opt 法で同じ問題を解くと結果は Table 3 のようになる。

戦略のパラメータは, どちらも, $k=r=80$, $\#db=1$

¹RSB*-mLK:40-40-1 の att532 に対する所要時間が 510 秒, rat575 に対する所要時間が 483 秒である。

Table 3 Results of RSB*-2opt (10 trials)

Problem	length (error)	etime	#2opt
att532	27916.1 (0.831%)	988 [s]	40136
rat575	6881.8 (1.606%)	1303 [s]	46712

とし, 「探索の限定」は 2opt 探索から固定枝を除外することにより行っている。Table 1 には及ばないが, Table 2 と比べると精度はかなり高い。10 回の試行のうち最良のものの相対誤差は, att532 の場合, 0.256% (誤枝数 66 本), rat575 の場合, 0.694% (誤枝数 108 本) である。2opt 探索の回数も同程度の時間で 2 倍くらいに達しており, 探索の能率化もある程度実現されている。しかし, 各試行の停止直前において固定されている枝の本数は 300~400 程度であり, 探索の集中は十分に進んでいないように思われる。この原因は 2opt 法の (都市数の大きな問題に対する) 精度の低さであろう。RSB*-mLK 法はこの 2opt 法を mLK 法に置き換えて, 精度を向上させたものである。

2opt 法の場合と同様, 多スタート mLK 法を 10 回実行し得られる解の相対誤差を調べると, att532 の場合, 各回 510 秒¹ (平均 543 回の mLK) の探索で平均 0.536% (最良で 0.358%) 程度, rat575 の場合, 各回 483 秒¹ (平均 949 回の mLK) の探索で平均 0.681% (最良で 0.678%) 程度であった。Table 1 に示した RSB*-mLK 法の相対誤差は, これらの 1/10 以下になっている。

RSB* 戦略は, 2opt 法に対しても, mLK 法に対しても, その探索能力を明確に強化しているが, 単独でも精度の高い mLK 法を基本探索法として用いた場合, 改善の度合いはより大きい。

4.3 i-mLK 法との比較

mLK 法 (LK 法) を基本とする解法としては, 局所反復戦略を用いた i-LK 法が有名である。この i-LK 法の LK 法部分を mLK 法に置き換えた i-mLK 法を実装し, RSB*-mLK 法と比較する。

i-mLK 法は時間の許す限り以下を実行するものである。
step 0 初期巡回路をランダムに生成し, それを σ とする。さらに $\tau \leftarrow \sigma$ とする。

step 1 τ に mLK 法を適用し, 適用後の巡回路を 2-opt 法で最終改善したものを τ' とする。

step 2 τ' と σ の巡回路長の小さい方を σ とする。 σ にランダムな double-bridge 操作を施した巡回路を τ として step 1 へ戻る。

att532 と rat575 について, i-mLK 法を RSB* の所要時間と同じ時間だけ実行した結果を Table 4 に示す。att532 では, 反復の際に double bridge を 1 回施すものと 2 回のものを試みた。1 回のものを i1-mLK 法, 2 回のものを i2-mLK 法とよび, それぞれ “i1”, “i2” と記す。ただし, rat575 に対しては i1-mLK 法のみ行った。

Table 4 Results of i-mLK under equal execution time to RSB*-mLK (30 trials)

att532 (optimum: 27686)				
e-time		#mLK	average	#opt
510 [s]	i1	1056	27706.0 (0.072%)	8
	i2	858	27720.1 (0.123%)	0
	40-40-1	3701	27698.7 (0.046%)	9
601 [s]	i1	1248	27706.0 (0.072%)	8
	i2	1013	27717.1 (0.112%)	1
	40-80-1	5601	27697.9 (0.043%)	11
990 [s]	i1	2077	27702.3 (0.059%)	10
	i2	1678	27711.0 (0.090%)	3
	40-40-2	4688	27692.8 (0.024%)	17
1110 [s]	i1	2335	27702.2 (0.059%)	10
	i2	1884	27709.4 (0.090%)	4
	80-40-1	6917	27693.5 (0.027%)	17
1216 [s]	i1	2562	27702.2 (0.058%)	10
	i2	2065	27705.7 (0.071%)	5
	40-80-2	6288	27692.8 (0.024%)	17
1265 [s]	i1	2667	27702.2 (0.058%)	10
	i2	2149	27705.3 (0.070%)	5
	80-80-1	10403	27692.5 (0.023%)	18
2141 [s]	i1	4542	27699.7 (0.049%)	12
	i2	3653	27703.8 (0.064%)	6
	80-40-2	8520	27691.3 (0.019%)	21
2460 [s]	i1	5226	27699.4 (0.048%)	12
	i2	4204	27703.3 (0.063%)	8
	80-80-2	11843	27691.3 (0.019%)	21
2902 [s]	i1	6173	27699.4 (0.048%)	12
	i2	4965	27702.9 (0.061%)	8
	100-40-2	10970	27687.7 (0.006%)	26

rat575(optimum: 6773)				
e-time		#mLK	average	#opt
483 [s]	i1	2024	6780.3 (0.108%)	1
	40-40-1	4300	6775.2 (0.032%)	1
582 [s]	i1	2446	6780.0 (0.103%)	1
	40-80-1	6365	6774.8 (0.027%)	3
952 [s]	i1	4031	6779.1 (0.090%)	2
	80-40-1	8016	6774.2 (0.018%)	3
1214 [s]	i1	5141	6778.9 (0.087%)	2
	80-80-1	13029	6773.8 (0.011%)	11
1617 [s]	i1	6853	6778.7 (0.084%)	2
	100-100-1	19910	6773.3 (0.004%)	24

平均実行時間（単位は秒）を示す“e-time”の列には、対応するRSB*法のパラメータを記した。“#mLK”の列は、i-mLK法あるいはRSB*法で行われたmLK探索の回数を示している。RSB*法の場合は、保持する k 個の

解それぞれに対する探索回数を合計したものである。したがって、 $\#mLK/k$ が平均世代数であり、最終解はこれより r 世代前に現れている。“average”の列は、30回の試行における平均巡回路長と平均相対誤差（百分率），“#opt”の列は最適解を得た回数である。

Table 4は、i-mLK法（特にi1）の精度が定評通り良好であることを示している。mLK法の探索能力は局所反復戦略により明確に強化されている。

att532に対してはi1-mLK法の精度がi2-mLK法の精度を有意に上回っており、Table 1に示したRSB*-mLK法の場合とは振る舞いが異なる。これは、i-mLK法の場合1点（1つの解）しか保持しないので、探索が相対的に不安定になりやすい（解空間において探索が集中する部分の「良し悪し」のバラツキが相対的に大きい）からだと思われる。そのような状況では、近くの解を丁寧に探す（i1-mLK法）方が安定しており、良い解に至る可能性が高いということであろう。またmLK探索の回数もi1-mLK法のほうが2～3割多い。RSB*-mLK法の場合 $\#db=2$ の方が結果が良いのは、少し遠い解（から）の探索を行っても多点探索により安定性が保たれ、より広く探すことの効果が出るからではないかと思われる。

i-mLK法とRSB*-mLK法の結果を比較すると、2つの問題の、すべての実行時間において、明確に後者の精度が上回っている。その差は実行時間を増やしても縮まらず、むしろ広がる傾向にある¹。同一のmLK法を基礎とし同様に反復する両解法の精度の差は、つぎのような点でRSB*戦略がうまく機能しているからだと考えられる。

- (1) 探索空間の縮小（固定枝をmLK探索のlinkbaseから除外すること）による探索能率の向上。Table 4で示したように、RSB*-mLK法におけるmLK探索の回数はi-mLK探索の2～3倍に達している。この差は、多数の枝が固定されmLKの所要時間が小さくなったRSB*反復の終盤で生じている。結局、最適解にかなり近づいた局面であり時間をかけずに多くの探索が行われることになり、良い解が得られる可能性が高くなる。
- (2) 多点探索による探索の分散と淘汰による探索の集中。多数の解を保持することにより、解空間を幅広く探索し、淘汰によって良い解の存在する方向に集団を導く。これは(1)の探索に安定性を与える。実際、Table 4からわかるように、RSB*-mLK法はi-mLK法と比べて得られる解のバラツキが小さい。

¹ここで比較対象としているのは本節の冒頭に示したi-mLK法である。与えられた時間いっぱい続ける代わりに適当なところで反復を打ち切り、（同時間で）試行数を増やすことによって、平均精度を改善することは可能かもしれない。30試行中、最終解の得られた反復回数（経過時間）の平均は、att532（i1-mLK法）で、1262回（577秒）である。

4.4 GA-EAX 法との比較

メタ戦略を用いた TSP 向けの解法として, GA-EAX 法 [7] の精度の高さも注目される. GA-EAX 法は枝組立交叉により子世代生成を行う GA の一種であり, 動作の概略は以下の通りである.

step 0 N_{pop} 個のランダムな初期巡回路を生成し, それぞれに 2-opt 法を施したものを初期集団 C とする.

step 1 C から非復元抽出により $N_{pop}/2$ ペアの両親をつくる.

step 2 各両親 (巡回路 A, B) に対して, 下記の枝組立交叉を N_{cross} 回施し (N_{cross} 個の) 子巡回路を生成する. 両親を加えた $N_{cross} + 2$ 個の巡回路の中から最良の 2 個を選んで ($N_{pop}/2$ 個のペアについてこれを行い) 次世代の C を構成する.

step 3 終了条件を満たせば終了. さもない場合は step 1 へ戻る.

ここで, 親巡回路 A, B に含まれる枝の集合を E_A, E_B とする. また, A に含まれて B に含まれない枝の集合を $E_{xor}^{(A)}$, B に含まれて A に含まれない枝の集合を $E_{xor}^{(B)}$ とする. 枝組立交叉はつぎのように行われる.

step 2-1 枝集合 $E_{xor}^{(A)} \cup E_{xor}^{(B)}$ から, $E_{xor}^{(A)}$ の要素と $E_{xor}^{(B)}$ の要素が交互に現れるランダムな閉路 $X_A + X_B$ ($X_A \subset E_{xor}^{(A)}, X_B \subset E_{xor}^{(B)}$) を生成する.

step 2-2 X_A, X_B をもとに $E_A - X_A + X_B$ ($E_B - X_B + X_A$) を作る. これは全都市を覆う部分巡回路の集合 (緩和個体) となる.

step 2-3 この緩和個体を 2-opt 法に類似の局所探索操作で完全な巡回路に修正して子巡回路とする.

親巡回路に共通して含まれる枝全体と, どちらか一方の親に含まれる枝を基礎としてできるだけ短い巡回路を生成する過程を「交叉」としてとらえるのが EAX の着想である. Table 5 に GA-EAX 法の実行結果 [7] を引用した. “params” の列は「 $N_{pop} - N_{cross}$ 」を示す. “average” の列と “#opt” の列は, 30 回の試行における最終巡回路長の平均精度と最適解到達回数である.

Table 5 Results of GA-EAX [7] (30 trials)

att532 (optimum: 27686)			
	params	average	#opt
EAX	250-10	27696.7 (0.039%)	3
	250-100	27691.4 (0.020%)	12
	250-500	27689.9 (0.014%)	15
	250-1000	27691.5 (0.020%)	13
rat575 (optimum: 6773)			
	params	average	#opt
EAX	300-10	6775.4 (0.035%)	1
	300-100	6774.2 (0.017%)	8
	300-500	6774.0 (0.015%)	10

Table 1 におけるパラメータ “100-40-2” (att532) と “100-100-1” (rat575) の RSB*-mLK 法の結果は, 集団サイズを 250 (att532) あるいは 300 (rat575) とした EAX で N_{cross} を変化させて解いたすべての結果を上回っている. EAX の結果は N_{pop} の値を 1 つに限っているし, 実行時間¹も考慮しなくてはならないので簡単には比較できないが, RSB*-mLK 法の性能は GA-EAX 法に十分匹敵するものと思われる.

5. 実行過程

4.3 節で指摘した (1), (2) に関連して, RSB*-mLK 法の実行過程を観察する. まず, 1 反復当りの所要時間 (の推移) を Fig. 4 (att532 に対する RSB*-100-40-2) と Fig. 5 (rat575 に対する RSB*-100-100-1) に示す. 30 回の試行のうち, 反復回数が最少 (a:att532: 80 回, c:rat575: 149 回) および最多 (b:att532: 160 回, d:rat575: 265 回) のもののみ示した. 試行により繰返し回数は変化するが, 所要時間推移の傾向はあまり変わらない. 例外的に固定枝の本数が少ないまま終了する試行 (att532 で 2 回ほど見られた) では, 少し大きめの所要時間で横ばいになる.

つぎに, 探索の安定性について観察できたところを記す. まず att532 であるが, 30 回の試行中, 17 回は初回反復以降 1 度も誤って固定することなく最終的に 530 本の枝を固定して最適解に達し終了している. 便宜上, 各試行の過程を “(誤固定枝の最大本数, 誤固定出現回数)” の対で表現すると, 残り 13 回中 9 回は (1,2), (1,5), (3,1), (3,4), (3,21), (4,11), (5,7), (5,17), (11,2) であり, 最終的に 530 本の枝を固定し最適解に達して終了している. 枝の誤固定を回復するうえで, mLK 法の 2 レベル以上の探索に加えて, double bridge 2 回の突然変異が貢献していると思われる. 最適解に達しなかった 4 回のうち 2 回は 527 本の枝を固定し (そのうち 19 本は誤固定), 巡回路長 27693 で終了している. 比較的早い回 (10~19 反復目) から 1~3 本の誤固定が始まり, 徐々にその数を増やして, 19 本に至る. この解は最適解から枝数で 21 本分離れた局所最適解である. ただし, 実験の中で att532 には少なくとも 2 つの最適解があることが確認された. 両者は枝 3 本分 (3-opt 近傍) の距離にある. したがって「19 本」も「21 本」も目安である. 残り

¹参考文献 [7] では rat575 を $N_{pop} = 300$, $N_{cross} = 100$ で解いた場合の所要時間 (563 秒) しか報告されていない. 実験は Pentium 200MHz, 64MB 上の Solaris2.5.1/GNU C で行われている. RSB*の実行時間は Table 4 に示すとおりである. EAX の終了条件や問題・パラメータが変わったときの所要時間が不明であり, OS, 言語処理系, データ構造の洗練度が異なる (可能性がある) ので不確定要素を含むが, 同一条件下での所要時間の違いは数倍以内と推測される.

Fig. 4 The time required for an iteration
(att532: 100-40-2)

Fig. 5 The time required for an iteration
(rat575: 100-100-1)

2回のうち1回は、438本の枝を固定し（そのうち誤固定10本）巡回路長27705で終了している。この場合は解集団中に、枝数で互いに76本（78本）分離れた巡回路長27705の2つの局所最適解が現れてしまい、それ以上枝固定が進まず、また、そこからの脱出もできなかったものである。もう1回は、472本の枝を固定し（そのうち誤固定29本）巡回路長27703で終了している。この場合も解集団中に、枝数で互いに15, 13, 12, 10本分離れた巡回路長27703の複数の局所最適解が現れてしまい、それ以上枝固定が進まず、また、そこからの脱出もできなかったものである。

rat575の探索過程は、「比較的一様な振舞いの中に、細かいバラツキがある」という印象である。これは、解空間中に巡回路長6774, 6775, 6776などの局所最適解が多数存在し¹, double bridgeによる摂動とmLK探索によって、それらおよび最適解の間を推移する確率が0で

はないという事実によって裏付けられる²。

30回の試行のうち最初の10回分余の探索過程の最終段階を観察した。10回中8回が最適巡回路長6773に達し、2回（第3試行と第7試行）は6774で終わっている³。第1, 4, 5, 9試行では最良巡回路長=6774の状態を22~34回繰り返している。その後半では保持する100個の解すべてが巡回路長6774である。このとき、相異なる解の個数は平均8~18程度確保されている。最適解からの距離は、第1試行の場合24~32とやや大きい。第4, 5, 9試行では（1, 2の例外を除き）11~19である。固定枝数は536~566で徐々に増え、誤固定数は2~19の範囲で変動する。幅広い（安定な）探索が行われているといえよう。第2, 6, 8試行では最良巡回路長=6774の状態を61~84回繰り返している。その約3/4の期間は保持する100個の解すべてが巡回路長6774である。このとき、保持している相異なる解は（数回の例外を除き）2個、最適解からの距離は16~19であった。固定枝数は572, 誤固定数は16である。この状態での探索はi-mLKとほぼ同等であるが、延べ $6100 \times (3/4) \sim 8400 \times (3/4)$ 回以上という多数の探索により、最適解に達したと考えられる。第10試行は巡回路長6779, 6777, 6775と、ほとんど誤固定なしに、固定枝を425~492と増やしていき、55回目の反復で最適解を発見している。この間の相異なる解の保持数は25~30である。第3, 7試行では、最良巡回路長=6774の状態を100回繰り返してそのまま終了している。そのうち、84~85回は保持する100個の解すべてが巡回路長6774である。このとき、保持している相異なる解の保持数は12~15、最適解からの距離はほとんどが27~35であった。固定枝数は532~566, 誤固定数は7~26である。解集団に保持された解が最適解から大分離れているため、最適解に達しなかったのであろう⁴。

最終段階に至る探索過程では、相異なる解の保持個数はずっと多く、幅広い（安定な）探索が行われている。

²RSB*戦略はこの推移確率を補強している。

³ほかに、第14, 28試行が6774, 第13試行が6775, 第27試行が6776である。

⁴第11試行以後の最適解に達しない場合は以下の通りである。第13, 28試行は第3, 7試行に類似している。それぞれ、最適解から枝数で29~34離れた巡回路長6775の解, 25~36離れた巡回路長6774の解が集団中の多数を占めるに至り、その状態で終了している。第14試行は第2, 6, 8試行とまったく同様の経過をたどるが、6773に達する前に終了した場合である。第27試行は最良巡回路長が6776に達したとき、すでに30本以上の誤固定をしている。この後、570本の枝を固定し（誤固定38）、最適解からの距離が39~43の解（相互距離2, 3, 5）に収束して終了する。

¹たとえば、巡回路長6774を与える巡回路（解）は少なくとも21個は存在する。それらと最適解の間の枝距離は11~36にわたる。ただしrat575の場合にも少なくとも二つの最適解が存在する。両者は枝2本分（2-opt近傍）の距離にある。

6. おわりに

本論文では参考文献 [8] で示された「多数の局所最適解を保持・淘汰し、それらの一致部分の固定により探索精度・能率の向上を図るメタ戦略 (RSB)」を、より大きなサイズの問題に対応できるよう改変した戦略 RSB* を提案し、標準的な組合せ最適化問題である TSP に適用してその性能を評価した。適用に際しては、mLK 法の採用により基盤となる解の精度を確保し、mLK 探索の一部省略と突然変異を用いた次世代解の生成により探索空間の縮小を行っている。

提案した RSB*-mLK 法のメタ戦略部分は簡単なものであるが、ベンチマーク問題集 TSPLIB95 の中の 600 都市程度までの問題例に対し、安定的に非常に大きな探索精度向上効果のあることが確認された。att532 と rat575 問題に対する結果の比較からは、RSB*-mLK 法の精度が、GA の枠組みで枝組立交叉を行う GA-EAX 法 [7] に十分匹敵し、局所反復戦略のもとで mLK 法を繰り返す i-mLK 法を明確に上回ることがわかった。後者との精度の差は RSB* 戦略の正味の有効性を示すものと考えられる。

RSB*-mLK 法がうまく働く理由として、(1)「探索空間の縮小 (固定枝を mLK 探索の linkbase から除外すること) による探索能率の向上」と、(2)「多点探索による探索の分散と淘汰による探索の集中」の 2 つを推定した。RSB*-mLK 法の実行過程の観察結果はこれらの仮説を支持している。RSB*-mLK 法は、多数の解を保持しその共通部分を固定することで安定 (頑健) かつ能率的な探索を実現し、その結果、精度の高い解を得ることに成功していると思われる。

TSP の実行可能解 (巡回路) は、部分巡回路を含まず、各点の接続枝数が 2 (枝数=点数) の枝集合である。したがって、ある巡回路 (現在の解) から、しかるべき複数の枝をそれと共有し、全体としてはそれと異なる新しい巡回路を生成するには、若干の工夫が必要である。GA-EAX 法の枝組立交叉は二つの解をもとにこれを行うものであり、i-mLK 法の突然変異 (局所反復) は一つの解をもとにこれを行う。本論文では後者を借用したが、3. 節の (3-b) の方向で工夫する余地があるかもしれない。

以下は今後の課題である。

- (1) RSB*-mLK 法における次世代巡回路生成法の改良
- (2) 1000 都市以上の TSP を扱うための戦略の再検討や実装技術の改善
- (3) RSB* 戦略の TSP 以外の問題への適用

謝 辞

有益なコメント、ご指摘を下された査読者の方々に感謝いたします。

参 考 文 献

- [1] K. Helsgaun: An effective implementation of the Lin-Kernighan traveling salesman heuristic; *European Journal of Operational Research*, Vol. 126, pp. 106–130 (2000)
- [2] D.S. Johnson: Local optimization and the traveling salesman problem; *Proceedings of 17th Colloquium of Automata, Languages, and Programming*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 443, Springer-Verlag, pp. 446–461 (1990)
- [3] S. Lin: Computer solutions of the traveling-salesman problem; *BSTJ*, Vol. 44, pp. 2245–2269 (1965)
- [4] S. Lin and B.W. Kernighan: An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem; *Operations Research*, Vol. 21, pp. 498–516 (1973)
- [5] K.-T. Mak and A.J. Morton: A modified Lin-Kernighan traveling-salesman heuristic; *Operations Research Letters*, Vol. 13, pp. 127–132 (1993)
- [6] O. Martin, S.W. Otto and E.W. Felten: Large-step Markov chains for TSP incorporating local search heuristics; *Operations Research Letters*, Vol. 11, pp. 219–224 (1992)
- [7] 永田, 小林: 巡回セールスマン問題に対する交叉: 枝組み立て交叉の提案と評価; 人工知能学会誌, Vol. 14, pp. 88–99 (1999)
- [8] 沼田, 児玉: 解の淘汰により変数の固定を行う探索法について; システム制御情報学会論文誌, Vol. 12, No. 6, pp. 375–377 (1999)
- [9] G. Reinelt: TSPLIB95, <http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/> (1995)
- [10] 柳浦, 茨木: 組合せ最適化—メタ戦略を中心として—; 朝倉書店 (2001)