過渡応答のロバスト性を考慮したモデル規範型 ILQ サーボ系の解析と設計*

國松 禎明[†]・藤井 正和[†]・藤井 隆雄[†]

Analysis and Synthesis of Model Reference ILQ Servo System with Tracking Robustness*

Sadaaki KUNIMATSU[†], Masakazu FUJII[†] and Takao FUJII[†]

In this paper, we propose a design method for servo systems with tracking robustness. Here we consider the control configuration of robust servo system plus a reference model, in which the robust servo system is designed by the ILQ design method as proposed by the third author. First, we show the configuration of this servo system and then provide a theoretical basis for parameter tuning. Second, we clarify the relation between these parameters and the closed loop performance such as robust stability and tracking robustness. Finally we establish a new design method of ILQ servo system with tracking robustness, and show its effectiveness by a numerical example.

1. はじめに

サーボ系設計問題は実用上重要な問題であり、これまでさまざまな設計法が提案されてきた。特に, Davison によって提案されたロバストサーボ系設計法 [9] は現代制御の発展とともに, 広く用いられてきた手法の一つである。著者らはこのロバストサーボ系の枠組みで目標値応答を容易に指定できる ILQ サーボ系設計法 [6] を確立し, これまでに 2 次安定化 [1–3] や周波数整形によるロバスト安定化 [5] など, 安定性に関するロバスト性について種々の拡張を行ってきた。しかし, 過渡応答に関するロバスト性は, 実用上重要であるにもかかわらず考慮してこなかった。実際, サーボ系設計問題では, オーバーシュートや振動などは好ましくない場合が多く, なるべく避けるべきである。ところが, 制御対象をモデル化するには不確かさの存在が避けられず, これに起因してそのような現象が起こる場合がある。過渡応答のロバスト性は, まさにこのような現象を未然に防ぐことであり, サーボ系の重要な性能の一つである。一般的には, 過渡応答のロバスト性もロバスト H_2 制御 [14] や μ 設計法 [12], $\mathcal{L}_1$ 制御 [13] などの形で, ロバスト性能問題

として取り扱われる。一方, Davison のロバストサーボ系の枠組みでは, 著者らの知る限り, これまで過渡応答のロバスト性はほとんど考慮されていない。

本論文では, 同じ枠組みの ILQ サーボ系で過渡応答のロバスト性を実現するために, 実際の出力と規範モデルの理想の出力との差を制御入力にフィードバックするモデル規範型 ILQ (MR-ILQ) サーボ系を用いる。MR-ILQ サーボ系は参考文献 [7] で基本的な枠組みとその設計手順が示されているが, 具体的な証明や詳細な解析結果までは与えられていない。そこでまず, 2. 節でこのサーボ系について述べた後, 本論文で考察する問題を定義する。つぎの 3. 節では, MR-ILQ サーボ系で 2 次安定化を達成する方法を述べた後に, 4. 節で主要結果である過渡応答のロバスト性について述べる。ここでは, 主に MR-ILQ サーボ系の利点やその性質を解析する。そして, 5. 節で MR-ILQ サーボ系の設計方針を与え, 6. 節の数値例において, 本論文で主張する結果の妥当性と有効性を確認する。

以下では, 標準的な記号を用いるが, 種々のノルムを用いるので, 区別のため記しておく。安定な伝達関数 $G(s) := C(sI - A)^{-1}B + D$ に関して $\|G(s)\|_\infty$ は H_∞ ノルム, $\|G(s)\|_2$ は H_2 ノルムである ($D=0$)。 $G(s)(D=0)$ のインパルス応答行列 $\mathcal{G}(t) := Ce^{At}B$ に関して $\|\mathcal{G}(t)\|_{\mathcal{L}_1} := \int_0^\infty \|\mathcal{G}(t)\| dt$ は $\mathcal{L}_1$ ノルムである。ただし, 行列 $\mathcal{G}$ に関して $\|\mathcal{G}\| := \bar{\sigma}(\mathcal{G})$ である。また, 時間信号ベクトル $x(t)$ に関してその $\mathcal{L}_\infty$ ノルムを $\|x(t)\|_{\mathcal{L}_\infty} :=$

* 原稿受付 2003 年 8 月 6 日

[†] 大阪大学 基礎工学研究科 Graduate School of Engineering Science, Osaka University; 1-3 Machikaneyama, Toyonaka, Osaka 560-8531, JAPAN

Key Words: ILQ design method, conditional feedback, tracking robustness, quadratic stability.

$\sup_{t \geq 0} \|x(t)\|$ と定義する。ただし, $\|x\| = (x^T x)^{1/2}$ である。最後に, 二つの記号を定義しておく。

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] := C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$\text{col}_{1 \leq i \leq m} \{A_i\} := [A_1^T, \dots, A_m^T]^T$$

2. 問題設定

2.1 準備

つぎのような不確かさを持つ, n 次元, m 入力, m 出力線形時不変システムを考える。

$$\dot{x}(t) = (A + D\Delta E_a)x(t) + (B + D\Delta E_b)u(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1b)$$

ただし, A, B ($\text{rank } B = m$), $C = [c_1^T, \dots, c_m^T]^T$, D, E_a, E_b はそれぞれ適切なサイズを持つ既知の定数行列であり, (A, B, C) は最小実現で複素閉右半面に不変零点を持たないとする。また, 初期状態 $x(0) = 0$ であり, Δ は行列ノルムが次式で制限される未知定数行列である。

$$\|\Delta\| \leq 1 \quad (2)$$

以下では簡単のため, $E_b^T E_a = 0$ を仮定する ($E_b^T E_a \neq 0$ の場合は, 参考文献 [1] を参照)。

本論文では, 不確かさを含むシステムの出力 $y(t)$ を一般の参照入力 $r(t)$ に追従させるサーボ系の設計問題を考える。

$$\dot{x}_c(t) = A_C x_c(t) + B_C(r(t) - y(t)) \quad (3a)$$

$$B_C := \text{blockdiag}\{b_r\}, \quad b_r := [0, \dots, 0, 1]^T \quad (3b)$$

$$G_C(s) := (sI - A_C)^{-1} B_C \quad (3c)$$

を導入してサーボ系を構成すれば, システムの特性変動に対してロバストな追従特性を有する, いわゆるロバストサーボ系が構成できる [9]。ただし, (A_r, b_r) は可制御正準形式とする。また, ロバストサーボ系の設計可能条件として知られるつぎの仮定が満たされているとする。

(仮定 1) [9] A_r のすべての固有値 η_j ($1 \leq j \leq q$) について次式が成り立つ。

$$\det \begin{bmatrix} A - \eta_j I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad (4)$$

そして, サーボ系設計で必要になる拡大偏差系を以下のように構成する。

$$\dot{x}_e(t) = (A_p + D_e \Delta E_p)x_e + (B_e + D_e \Delta E_b)u_e \quad (5a)$$

$$-e(t) = C_e x_e \quad (5b)$$

ただし, $x_e := [(x - \bar{x})^T, (x_c - \bar{x}_c)^T]^T$, $u_e := u - \bar{u}$

$$A_e := \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_C C & A_C \end{bmatrix}, \quad B_e := \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$C_e := [C \ 0], \quad D_e := [D^T \ 0]^T, \quad E_e := [E_a \ 0] \quad (7)$$

であり, $\bar{x}, \bar{x}_c$ と $\bar{u}$ はそれぞれ定常状態での状態と制御入力である。

2.2 MR-ILQ サーボ系

ILQ 設計法 [6] は参照入力 r から出力 y への目標値応答をフィードバックのみで漸近的に指定できるため, 通常は 2 自由度系で実現される目標値特性の改善が ILQ 設計法では冗長となる。この 2 自由度系での冗長性を, 陽な形で過渡応答のロバスト性改善のために用いるのが MR-ILQ サーボ系 [7] である。このサーボ系は, モデル化誤差に起因する出力応答の変動を抑えるために, 条件付きフィードバック系を構成する点に特徴がある。

MR-ILQ サーボ系の構成図を Fig. 1 に示す。

Fig. 1 Configuration of MR-ILQ servo system

ここで $\Sigma_V := V^{-1} \Sigma V$ であり, Σ は正定対角行列, V は E_b の特異値分解 UAV より得られる行列 V である [1]。Fig. 1 からわかるように, 拡大偏差系 (5) に対する制御器は次式で構成される。

$$u_e = -K_e x_e + Q_E(s)(y^* - y) \quad (8)$$

ただし, $K_e := \Sigma_V [K_F^0 \ -K_C^0]$, $Q_E(s) := \Sigma_V Q_E^0(s)$ であり, y^* は規範モデル $G_{yr}^*(s)$ の出力, つまり $y^* = G_{yr}^*(s)r$ である。これは従来の ILQ サーボ系の制御器 (右辺第 1 項) に条件付きフィードバック制御器 (右辺第 2 項) を付加した構成となっている。

MR-ILQ サーボ系では, まず, ILQ 設計法で実現された目標値特性を規範モデル $G_{yr}^*(s)$ に選ぶ。つまり,

$$G_{yr}^*(s) := C_e(sI - A_e + B_e K_e)^{-1} B_{C_e}$$

ただし, $B_{C_e} := [0 \ B_C^T]^T$ である。つぎに, できるだけシンプルな制御系が望ましいという考えから, Fig. 1 の誤差調整補償器 $Q_E^0(s)$ として, つぎのように参照入力の内部モデルと同じダイナミクスを持つもの考える。

$$Q_E^0(s) := Q_C(sI - A_C)^{-1} B_C + Q_D \quad (9a)$$

$$= D_c^{-1} \text{diag} \left\{ \frac{q_i \beta_i(s)}{\alpha(s)} \right\}_{1 \leq i \leq m} \quad (9b)$$

本論文では, まず (5) 式で $\Delta = 0$ としたノミナルシステムに対して制御系設計を行った後, 構造的な不確かさが安定性および過渡応答に及ぼす影響を軽減するように制

御器を改良するという立場をとる。したがって、以下では、ILQ 設計法によって、ノミナル性能を保証する制御器が得られたものとして、つぎの問題を考える。

【問題】 拡大偏差系 (5) に対して、ロバスト安定性と過渡応答のロバスト性を同時に達成する誤差調整補償器 $Q_E(s)$ を求めよ。

3. 2 次安定化

過渡応答のロバスト性を考慮する前に、制御系のロバスト安定性を保証する必要がある。MR-ILQ サーボ系は ILQ 設計法に基づいているので、逆問題を利用した 2 次安定化手法 [1–4] を用いて制御器 (8) を設計する。それに関してつぎの補題を得る。

【補題 1】 (8) 式は $u_e = -\tilde{K}_e x_e + \tilde{G}_{yr}^*(s)r$ のように状態フィードバック項とフィードフォワード項に分離でき、その状態フィードバック制御則 $\tilde{K}_e$ は ILQ 設計法により得られる K_e と同様に次式を満足する。

$$\tilde{K}_e = \Sigma_V \begin{bmatrix} \tilde{K}_F^0 & -\tilde{K}_C^0 \end{bmatrix} \quad (10a)$$

$$\tilde{K}_e B_e = \Sigma_V \quad (10b)$$

ただし、 $\tilde{K}_F^0 := K_F^0 + Q_D C$ 、 $\tilde{K}_C^0 := K_C^0 + Q_C$ である。

(証明) (10a) 式は $\tilde{K}_e$ の直接計算より、また (10b) 式は、 K_e が $K_e B_e = \Sigma_V$ を満たす [6] ことと、 Q_D^0 の定義と CB の構造から $Q_D C B = 0$ より成立する。□

つぎに、 Δ との閉ループを構成する $G_e(s)$ を

$$G_e(s) := (E_e - E_b \tilde{K}_e)(sI - A_e + B_e \tilde{K}_e)^{-1} D_e$$

と定義する。そして、 $\text{Im}(B_e)$ の補空間を張る適当な $\overline{n+qm \times n+m(q-1)}$ 行列 $\Pi := [\Pi_1^T \ \Pi_2^T]^T$ と $\tilde{K} := \tilde{K}_F^0 \Pi_1 - \tilde{K}_C^0 \Pi_2$ を用いた変換行列

$$T_e := \begin{bmatrix} \Pi_1 - B \tilde{K} & B V^{-1} \\ \Pi_2 & 0 \end{bmatrix}, T_e^{-1} := \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

($T_{21} = V \tilde{K}_F^0$, $T_{22} = -V \tilde{K}_C^0$) を定義すると、 $T_e^{-1} B_e = [0 \ V^T]^T$ 、 $\tilde{K}_e T_e = V^{-1} \Sigma [0 \ I_m]$,

$$T_e^{-1} A_e T_e =: \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$$

という関係から、 $G_e(s)$ の漸近特性伝達関数 $G_e^\infty(s) := \lim_{\Sigma \rightarrow \infty} G_e(s)$ として次式を得る。

$$G_e^\infty(s) = \bar{E}(sI - \bar{A}_{11})^{-1} T_{11} D - \bar{D} \quad (11)$$

ただし、 $\bar{D} := E_b \tilde{K}_F^0 D$ 、 $\bar{E} := E_a(\Pi_1 - B \tilde{K}) - E_b V^{-1} \bar{A}_{21}$ である。すると、この $G_e^\infty(s)$ を用いて 2 次安定化を考えることができる。

【補題 2】 [1] (10) 式を満たす $\tilde{K}_e$ が拡大偏差系 (5) の 2 次安定化制御則となる、つまり $A_e - B_e \tilde{K}_e$ が安定かつ $\|G_e(s)\|_\infty < 1$ となる十分条件は

$$1) \ \bar{A}_{11} \text{ が安定} \quad (12a)$$

$$2) \ \nu_\infty := \|G_e^\infty(s)\|_\infty < 1 \quad (12b)$$

が成立することである。このとき Σ の下限値 Σ_{QS} が必ず存在し、 $\Sigma > \Sigma_{QS}$ を満たす Σ で 2 次安定性が保証される。ただし、1) は必要条件でもある。

(注意 1) $Q_E(s)$ を内部モデルと同じダイナミクスに選んだことによって補題 1 が成立するだけでなく、補題 2 も成立する。これによって、参考文献 [1] の方法を用いて拡大系 (5) を容易に 2 次安定化できる。

4. 主要結果

過渡応答のロバスト化問題は出力誤差 $y^* - y$ の最大ゲイン、つまり $\mathcal{L}_\infty$ ノルム $\|y^* - y\|_{\mathcal{L}_\infty}$ を小さくすることである。 $\mathcal{L}_1$ ノルムは誘導 $\mathcal{L}_\infty$ ノルムの上界 [10] なので、過渡応答のロバスト性を評価するには、参照入力 r から出力誤差 $y^* - y$ への作用素の $\mathcal{L}_1$ ノルムを選択するのが妥当（最良ではない）であると考えられる。しかし、 $\mathcal{L}_1$ ノルムを直接評価するのは難しい（特に連続時間系）ので、ここでは次式の関係 [10] に着目する。

$$\|G(s)\|_\infty \leq \|C e^{At} B\|_{\mathcal{L}_1} \leq 2n \|G(s)\|_\infty \quad (13)$$

ただし、 $G(s) := C(sI - A)^{-1} B \in \mathbf{RH}_\infty$ 、 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ である。この不等式によって、 r から $y^* - y$ への伝達関数の H_∞ ノルムを小さくすることで、 $\mathcal{L}_1$ ノルムを間接的に小さくすることができる。もちろんこの評価式をそのまま用いると保守的となるが、経験的には $\mathcal{L}_1$ ノルムは H_∞ ノルムの 2 倍程度であることを言及しておく。

4.1 過渡応答のロバスト性解析

MR-ILQ サーボ系を上側線形分変換 (Upper-LFT) 形式として扱うと、Fig. 2 のようになる。ただし、 $w = \Delta z$ 、 $e_r := y^* - y$ である。また、 $P(s)$ は

$$\begin{bmatrix} z \\ e_r \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}, P(s) =: \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}$$

によって定義され、つぎのように与えられる。

$$P(s) = \left[\begin{array}{cc|cc} A_e - B_e K_e & 0 & 0 & B_{Ce} \\ 0 & A_e - B_e \tilde{K}_e & D_e & 0 \\ \hline E_e - E_b K_e & E_e - E_b \tilde{K}_e & 0 & 0 \\ 0 & -C_e & 0 & 0 \end{array} \right]$$

よって $P_{11}(s) = G_e(s)$ 、 $P_{12}(s) = (E_e - E_b K_e)(sI - A_e + B_e K_e)^{-1} B_{Ce}$ 、 $P_{21}(s) = -C_e(sI - A_e + B_e \tilde{K}_e)^{-1} D_e$ か

Fig. 2 Upper-LFT form

つ $P_{22}(s)=0$ である. この節での目的は, ロバスト安定性を満たす範囲つまり $\|G_e(s)\|_\infty < 1$ で, $\gamma_{\max} := \max_{\|\Delta\| \leq 1} \|\mathcal{F}_u(P(s), \Delta)\|_\infty$ をできるだけ小さくすることである. ($\mathcal{F}_u(P, \Delta) := P_{22} + P_{21}(I - \Delta P_{11})^{-1} \Delta P_{12}$)

以下では, すでにロバスト安定性は保証されたものとして議論することとし, $\|G_e(s)\|_\infty < 1$ を仮定する. すると, $\gamma_{\max}$ につぎの上界を与えることができる.

$$\begin{aligned} \gamma_{\max} &\leq \max_{\|\Delta\| \leq 1} \|P_{21}\|_\infty \|(I - \Delta P_{11})^{-1}\|_\infty \|\Delta P_{12}\|_\infty \\ &\leq \frac{\|P_{21}(s)\|_\infty \|P_{12}(s)\|_\infty}{1 - \|G_e(s)\|_\infty} \end{aligned} \quad (14)$$

上記のようにLFT表現でこのような上界を与えると, 通常はかなり保守的となる. しかし, 今回は $P_{22}(s)=0$ であるために, 上界の評価式に和の項が存在せず, そのぶん保守性が少ない. 以下では(14)式をもとに解析を行うが, その基礎となるのがつぎの補題 3, 4である.

【補題 3】 $P_{21}^\infty(s) := \lim_{\Sigma \rightarrow \infty} P_{21}(s)$ とする. このとき $P_{21}^\infty(s)$ は次式で表される.

$$P_{21}^\infty(s) = -\bar{C}_1(sI - \bar{A}_{11})^{-1} T_{11} D \quad (15a)$$

$$= -\text{diag}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\alpha(s)}{\phi(s)} \right\} D_p(s) D \quad (15b)$$

ただし, $C_e T_e = [\bar{C}_1 \ \bar{C}_2]$, $\tilde{\phi}_i(s) := \phi_i(s) + q_i \beta_i(s)$ であり, ここで $\phi_i(s)$ は付録の (A1) 式で与えられる. また, $D_p(s) := \text{col}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{k=1}^{d_i-1} \theta_i^{(k)}(s) c_i A^{k-1} \right\}$ であり (ただし, $d_i=1$ では $\sum_{k=1}^0 (*) := 0$ とする), $\theta_i^{(k)}(s)$ は $\psi_i(s) = \theta_i^{(k)}(s) s^k + \zeta_i^{(k)}(s)$ を満たす. ただし, $\psi_i(s)$ は付録の (A1) 式で与えられる.

(証明) 付録 2. 参照 $\square$

【補題 4】 $P_{21}(s)$ は $\sigma(\Sigma) \rightarrow \infty$ で $P_{21}^\infty(s)$ に一様収束する. つまり, $\lim_{\sigma(\Sigma) \rightarrow \infty} \|P_{21}(s) - P_{21}^\infty(s)\|_\infty = 0$ が成り立つ.

(証明) $P_{21}(s)$ を計算すると次式となる.

$$P_{21}(s) = P_{21}^\infty(s) + F_1(s)[sI + \Sigma - F_2(s)]^{-1} F_3(s)$$

ただし, $F_1(s) := \bar{C}_1(sI - \bar{A}_{11})^{-1} \bar{A}_{12} + \bar{C}_2$, $F_2(s) := \bar{A}_{21} \times (sI - \bar{A}_{11})^{-1} \bar{A}_{12} + \bar{A}_{22}$, $F_3(s) := \bar{A}_{21}(sI - \bar{A}_{11})^{-1} T_{11} \times D + T_{21} D$ である. 補題 2 より $\bar{A}_{11}$ は安定なので,

$$\|P_{21}(s) - P_{21}^\infty(s)\|_\infty \leq \frac{\|F_1(s)\|_\infty \|F_3(s)\|_\infty}{\sigma(\Sigma) - \|F_2(s)\|_\infty}$$

となり, 一様収束性が成立する. $\square$

また上記の証明から, Σ に依存しない ξ_1, ξ_2 を用いて

$$\|P_{21}(s)\|_\infty \leq \|P_{21}^\infty(s)\|_\infty + \xi_1 / (\sigma(\Sigma) - \xi_2) \quad (16)$$

となることがわかる.

以上の準備のもと, 主要結果である過渡応答のロバスト性に関するつぎの定理を得る.

【定理 1】 $\|r(t)\|_{\mathcal{L}_\infty} < \infty$ でかつ $G_e^\infty(s)$ は(12)式を

満たすとする. このとき $G(s)$ の相対次数が $d_i = 1$ となる第 i 行誤差出力 $e_{r_i}(t)$ は, $\sigma_i \rightarrow \infty$ で $\|e_{r_i}(t)\|_{\mathcal{L}_\infty} \rightarrow 0$ となる.

(証明) 補題 3 より, $d_i = 1$ の行では $P_{21}^\infty(s) = 0$ となる. また, ILQ 設計法の特徴より, $\Sigma > \Sigma_{LQ}$ での安定性は保証されるだけでなく, $\lim_{\sigma(\Sigma) \rightarrow \infty} \|P_{12}(s)\|_\infty < \infty$ でかつ補題 2 より $\nu_\infty < 1$ ならば $\Sigma > \Sigma_{QS}$ で $1 - \|G_e(s)\|_\infty > 0$ である. よって, 第 i 行で伝達関数を評価した場合の $\gamma_{\max}$ に相当する値を γ_i とすると, $\Sigma > \Sigma_{QS}$ のとき, (14) 式より一様収束性 $\lim_{\sigma_i \rightarrow \infty} \gamma_i = 0$ が成り立つ. したがって, (13) 式より $\sigma_i \rightarrow \infty$ で $\|e_{r_i}(t)\|_{\mathcal{L}_\infty} \rightarrow 0$ となる. $\square$

特別な場合として, 相対次数 d_i がすべて 1 もしくはマッチング条件を満たすとき, つまり $\det(CB) \neq 0$ または $\text{Im}(D) \subset \text{Im}(B)$ のときを考える. このとき $P_{21}^\infty(s) = 0$ となり, つぎの系が成立する.

【系 1】 定理 1 と同じ条件を仮定する. $\det(CB) \neq 0$ または $\text{Im}(D) \subset \text{Im}(B)$ ならば, $\Sigma \rightarrow \infty$ で $\|e_r(t)\|_{\mathcal{L}_\infty} \rightarrow 0$ となる.

本来(13)式の評価は保守的であるが, 極限を考えると相対次数 $d_i = 1$ の行に関する H_∞ ノルムが 0 となり, $\mathcal{L}_1$ ノルムも 0 となる. その結果, 十分大きな σ_i に関して過渡応答のロバスト性を評価することができた. ところが実際にはそれほど大きな σ_i を用いる必要はなく, Σ_{LQ} 程度の大きさで十分である (6. 節参照). これは上述したように, $\mathcal{L}_1$ ノルムが H_∞ ノルムの 2 倍程度であることに起因すると思われる.

$Q_E^0(s) = 0$ の場合, 通常の ILQ 設計法によって指定される漸近極によって $P_{12}^\infty(s)$, $P_{21}^\infty(s)$, $G_e^\infty(s)$ は定まる. このとき, 漸近極を小さく指定すると $\|P_{21}^\infty(s)\|_\infty$ は小さくなるが, $\|P_{12}^\infty(s)\|_\infty$ は必ずしも小さくなるとは限らない. したがって, 系 1 のような場合を除いて, 一般には ILQ サーボ系では過渡応答のロバスト性を達成できない. 一方, MR-ILQ サーボ系では, $P_{12}^\infty(s)$ が $Q_E^0(s)$ に依存しないので, 漸近極を小さくしなくとも $Q_E^0(s)$ の方を適当に選ぶことで $\|P_{21}^\infty(s)\|_\infty$ を小さくでき, その結果, 過渡応答のロバスト性を達成できる. このロバスト性は雑雑に言えば q_i を大きくすることで達成されるが, 具体的にはつぎの二つの場合に分かれる.

$E_b = 0$ の場合 $G_e^\infty(\infty) = 0$ となり, q_i を大きくしたとき ν_∞ は一定値に収束する. したがって, $\bar{A}_{11}$ の安定性が満たされる範囲内で, q_i をできるだけ大きくすればよい.

$E_b \neq 0$ の場合 $G_e^\infty(\infty) = \bar{D} = E_b(K_F^0 + Q_D C) D$ となる. このため, q_i を大きくしていくと, 6. 節の数値例で示すように, ある値 $\bar{q}_i$ からは ν_∞ は q_i の 1 次関数にはほぼ等しくなり, 最後に ν_∞ は発散する. したがって, $\bar{q}_i$ を超えてからは $\|P_{21}^\infty(s)\|_\infty$ と ν_∞ の両方を同時に小さくできないが, 幸い ν_∞ は $\bar{q}_i$ までは減少する傾向にあるので, それを利用する.

以上をまとめると、 $E_b = 0$ の場合は、 q_i を大きくすればよいが、 $E_b \neq 0$ の場合は単純に大きくすることはできず、トレードオフが存在する。後の数値例で示すとおり、 q_i の増大とともに ν_∞ は V 字になる傾向にあり、その最小値を与える $\bar{q}_i$ を選ばばよいことになる。

4.2 ロバスト H_2 解析

前節で用いた評価式には残念ながら保守性が存在するので、その妥当性の検証をロバスト H_2 解析 [14] を用いて行う。 H_2 ノルムはよく知られているように、時間領域と周波数領域での評価が一致するので、過渡応答を評価するのに用いられている。ただし、今回はピーク値を抑えることを主眼としているので、必ずしも最良ではない。このロバスト H_2 解析を用いることで、前節までの妥当性を評価することができる。

参照入力はい知の多項式 $\alpha(s)$ 、 $n_i(s)$ とベクトル r_0 を用いて、 $r(s) = \text{diag}_{1 \leq i \leq m} \{n_i(s)/\alpha(s)\} r_0$ と書けるので、 e_r のロバスト H_2 ノルムは

$$\begin{aligned} \max_{\|\Delta\| \leq 1} \|e_r\|_2 &= \max_{\|\Delta\| \leq 1} \|\mathcal{F}_u(P(s), \Delta)r(s)\|_2 \\ &= \max_{\|\Delta\| \leq 1} \left\| \frac{d_r(s)}{\alpha(s)} \mathcal{F}_u(P(s), \Delta) \text{diag}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{n_i(s)}{d_r(s)} \right\} r_0 \right\|_2 \\ &\leq \max_{\|\Delta\| \leq 1} \|\tilde{P}_{21}(s)(I - \Delta P_{11}(s))^{-1} \Delta\|_\infty \|\tilde{P}_{12}(s)\|_2 \\ &\leq \frac{\|\tilde{P}_{21}(s)\|_\infty}{1 - \|G_e(s)\|_\infty} \|\tilde{P}_{12}(s)\|_2 \end{aligned} \quad (17)$$

と評価できる。ただし、 $\tilde{P}_{21}(s) := P_{21}(s)d_r(s)/\alpha(s)$ かつ $\tilde{P}_{12}(s) := P_{12}(s)\text{diag}_{1 \leq i \leq m} \{n_i(s)/d_r(s)\} r_0$ であり、 $d_r(s)$ は任意の安定多項式である。(17)式右辺で $\Sigma \rightarrow \infty$ とすると、 $\tilde{P}_{21}^\infty(s)$ は (15b) 式より $\tilde{P}_{21}^\infty(s) = \text{diag}_{1 \leq i \leq m} \{d_r(s)/\tilde{\phi}_i(s)\} D_p(s)D$ となる。ここで、 $G_e(s)$ が共通で、 $\tilde{P}_{12}$ も q_i に依存しないことから、ロバスト H_2 ノルムを小さくする問題は $\|G_e(s)\|_\infty$ と $\|\tilde{P}_{21}(s)\|_\infty$ を同時に小さくする問題と解釈できる。すると、 $P_{21}^\infty(s)$ と $\tilde{P}_{21}^\infty(s)$ の類似性から、この問題は本質的に前節までとほぼ同じであることがわかる。したがって、 $\|G_e(s)\|_\infty$ と $\|P_{21}^\infty(s)\|_\infty$ を同時に小さくすることの妥当性が、ロバスト H_2 解析の観点からも示されたことになる。

5. MR-ILQ 設計法

5.1 漸近非干渉化

MR-ILQ 設計法は ILQ 設計法同様、漸近的に非干渉化して設計できることを示しておく。

ただし、 $\hat{G}_{yr}^*(s) := \hat{Q}_E^0(s)G_{yr}^*(s)$ 、 $\hat{Q}_E^0(s) := D_c Q_E^0(s)$ 、 $\hat{G}_C(s) := D_c K_C^0 G_C(s)$ であり、その定義より、 $\Sigma \rightarrow \infty$ でいずれも対角行列となる。また、 $G^0(s)$ は $G(s)$ を $\Delta = 0$ とした伝達関数である。Fig. 3 において、 d から y の伝達関数 $G_{yd}(s) = C_e(sI - A_e + B_e \tilde{K}_e)^{-1} B_e \Sigma_V D_c^{-1}$ は通常の ILQ 設計法の構成に $\hat{Q}_E^0(s)$ のフィードバック項が並列に加わったものであるので、 $\Sigma \rightarrow \infty$ においてつぎのように非干渉化される。

Fig. 3 Decoupling of MR-ILQ servo system

$$\begin{aligned} G_{yd}^\infty(s) &= \bar{C}_1(sI - \bar{A}_{11})^{-1} \bar{A}_{12} V D_c^{-1} + C B D_c^{-1} \\ &= \text{diag}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\alpha(s)}{\tilde{\phi}_i(s)} \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

5.2 閉ループ極の指定

補題 2 の条件 1) である $\bar{A}_{11}$ の安定性は、2 次安定化の必要条件でもあるので、その安定性を保証する必要がある。そこで、(18) 式からわかるように、 $\tilde{\phi}_i(s) = \phi_i(s) + q_i \beta_i(s)$ と $\bar{A}_{11}$ の安定性が等価であることを利用する。つぎの補題は、根軌跡法の代数的アプローチから $\tilde{\phi}_i(s)$ が安定となる q_i の範囲を与えている。

【補題 5】 [11] $H(a)$ は多項式 $a(s)$ のフルビッツ行列とする。このとき $\tilde{\phi}_i(s)$ が安定から不安定となる $q_i \geq 0$ の最小値は $q_i^+ = 1/\lambda_{\max}^+(-H^{-1}(\phi_i)H(\beta_i))$ で与えられる。ただし、 $\lambda_{\max}^+(A)$ は行列 A の正の実固有値の最大値であり、正の実固有値が存在しない場合は $q_i^+ = +\infty$ である。また、 $H(\beta_i)$ は $\beta_i(s)$ を $\deg(\phi_i)$ 次の多項式とみなして構成するものとする。

上の補題で定まる $q_i \in [0, q_i^+)$ の範囲内で、設計者は適当な q_i を指定することになる。

5.3 個別解析

ここでは、制御対象と参照入力を限定して、より詳細な安定化条件を導く。相対次数がすべて 3 次以下でステップ参照入力の場合について考察する。制御対象を機械系に限定すれば、ほとんどの場合で相対次数は 2 次以下であり、このような場合の解析も十分意味があると考えられる。

参照入力をステップに限定した場合、 $\alpha(s) = s$ 、 $\beta_i(s) = \beta_i^{(1)}s + \beta_i^{(0)}$ 、 $\deg(\phi_i(s)) = d_i$ であり、目標値特性をつぎのような高次遅れ系で指定する場合を考える。 $G_{yr}^\infty(s) = \text{diag}_{1 \leq i \leq m} \{p_i^{d_i}/(s + p_i)^{d_i}\} = \text{diag}_{1 \leq i \leq m} \{1/(T_i s + 1)^{d_i}\}$ ただし、 $p_i > 0$ 、 $T_i := 1/p_i$ である。このとき、 $\tilde{\phi}_i(s) = \phi_i(s) + q_i \beta_i(s)$ の安定性が容易に解析でき、Table 1 のようになる。ただし、 $q_i \geq 0$ とする。

Table 1 Stability condition of $\tilde{\phi}_i(s)$

d_i	$\beta_i^{(1)} > *$	$\beta_i^{(0)} > *$	Other condition
1	—	$-p_i/q_i$	—
2	$-2p_i/q_i$	$-p_i^2/q_i$	—
3	$-3p_i^2/q_i$	$-p_i^3/q_i$	$q_i(\beta_i^{(1)} - \beta_i^{(0)}) + 8p_i^3 > 0$

端的にいえば、 $d_i = 1, 2$ の場合 $\beta_i(s)$ の係数が非負であ

れば, q_i を連続的に $q_i \rightarrow \infty$ としても $\tilde{\phi}_i(s)$ の安定性が成立する (つまり $q_i^+ = +\infty$). $d_i = 3$ の場合は $\beta_i(s)$ の係数が非負に加えて, $\beta_i^{(1)} \geq \beta_i^{(0)}$ ならば q_i を連続的に $q_i \rightarrow \infty$ としても $\tilde{\phi}_i(s)$ の安定性が成立する ($q_i^+ = +\infty$). ところで, ここでは詳しく触れなかった $d_i \geq 4$ の場合には, q_i のみの調整では安定性を確保することが難しく, $\phi(s)$ の根を非重複にするなどして対応する必要がある.

5.4 設計手順

4. 節およびこの節での考察をもとに, MR-ILQ 設計法のアルゴリズムをつぎのように構築する.

【MR-ILQ 設計アルゴリズム】

- (1) E_b を特異値分解し, V を定める.
- (2) ILQ 設計法で目標値応答 (規範モデル $G_{yr}^*(s)$) を指定し, K_F^0, K_C^0 を求める.
- (3) 5.3 節を参考に $\beta_i(s)$ を指定し, 補題 5 に従って q_i^+ を計算する.
- (4) $\nu_\infty < 1$ となるような $q_i \in [0, q_i^+)$ を指定する. ただし, ロバスト安定性と過渡応答のロバスト性の間にトレードオフが存在するので, それを考慮に入れる必要がある. (4.1 節参照)
- (5) 補題 2 の Σ_{QS} を求め, $\Sigma > \Sigma_{QS}$ を満たす Σ を, 目標値応答特性と 2 次安定度および制御入力の大さきとのトレードオフで定める.

6. 数値例

参考文献 [4] で扱われている, マッチング条件を満たさない不確かさを持つ多入出力系の単位ステップ応答について検討する.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & 0 \\ 5.5 & -3 & -0.4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

非干渉化行列 D_c は

$$D_c = \begin{bmatrix} c_1 AB \\ c_2 B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -1.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \det(D_c) \neq 0$$

であり, 相対次数は $d_1 = 2, d_2 = 1$ である. いま, $V = I$ かつ $E_b^T E_a = 0$ なので, 前節の設計手順に従い, まず, 目標値応答 $G_{yr}(s) (= G_{yr}^*(s))$ の漸近伝達関数を $G_{yr}^\infty(s) = \text{diag}\{4/(s+2)^2, 2/(s+2)\}$ のように定めると, K_F^0, K_C^0 は次式となる.

$$K_F^0 = D_c^{-1} \begin{bmatrix} 5.5 & -3 & 3.6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, K_C^0 = D_c^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

つぎに, $\beta_1(s) = s+4, \beta_2(s) = 2$ と定めると, $Q_C^0 = \text{diag}\{4, 2\}, Q_D^0 = \text{diag}\{1, 0\}$ となり, $Q_E^0(s) = D_c^{-1} \text{diag}$

$\{q(s+4)/s, 2q/s\}$ となる. ただし, $Q_P^0 = qI_2$ とした. よって, $P_{21}^\infty(s) = \text{diag}\{-s/((s+2)^2 + q(s+4)), 0\}$ と計算できる. また, 5.3 節より $q^+ = \infty$ である. 時定数 T_i を変化させて H_∞ ノルムを描く T-プロット [2] の代わりに, q の値を変化させて ν_∞ の値を描く Q-プロットを示すと Fig. 4 となる. この Q-プロットの結果をもとに, $\Sigma = 30I_2, \Delta = 1$ における出力の単位ステップ応答を Fig. 5 に示す. 続いて, 対応する規範モデルの出力と実際の出力との差を取った誤差出力応答を Fig. 6 に示す. ただしここでは, Fig. 5 の場合に加えて破線 ($q = 20$) の場合も描いている. まず Fig. 5 では, 鎖線 ($q = 0$), 点線 ($q = 7$) は第 1 出力, 実線 ($q = 0, q = 7$ が重なっている) は第 2 出力である. 鎖線 ($q = 0$) の場合は $\nu_\infty = 0.50$ であり, ロバスト安定化条件を満たしているが, 20% 程度のオーバーシュートが生じており, 制御系としては受け入れがたい結果である. また $q = 0$ なので, 鎖線はロバスト ILQ 設計法 [1,2] を用いた場合に等しい. これは ILQ サーボ系の枠組みにおける過渡応答のロバスト化の限界を意味する. 点線 ($q = 7$) は Fig. 4 で ν_∞ がほぼ最小値の $\nu_\infty = 0.23$ をとる $q = 7$ に選んだものであり, Fig. 6 からわかるように, この場合はほぼ規範モデルの出力に等しいものが得られている. 実線 (相対次数 $d_2 = 1$) については Fig. 6 で触れる.

一方 Fig. 6 において, 鎖線 ($q = 0$) の場合, 最大で 37% 程度の出力誤差が出ているが, 点線 ($q = 7$) の場合の誤差は最大 5% 程度と小さいことがわかる. また破線 ($q = 20$) では, 誤差は最大で 2% 程度とさらに小さくなっていることがわかる. このことから, q をある程度まで大きくすることの有効性がわかる. 最後に実線 ($d_2 = 1$ の第 2 出力) の場合の誤差は, q の値によらずほとんど 0 であり, Fig. 5 とともに定理 1 の結果を裏付けている. それと同時に, $\Sigma = 30I_2$ というさほど大きくない Σ で過渡応答のロバスト性が実現されていることにも注意する必要がある. 以上から, MR-ILQ 系の有効性が確認できる.

Fig. 4 Q-plot

Fig. 5 Output response

 Fig. 6 Error output response ($y - y^*$)

7. おわりに

本論文では、過渡応答のロバスト化を実現する MR-ILQ サーボ系を提案し、その利点や性質を解析した。これをもとに設計法を構築し、その設計手順を示した。MR-ILQ 設計法では、本質的にゲイン調整パラメータ Σ と誤差調整補償器のゲイン Q_p^0 を調整するだけで、安定性と過渡応答の二つのロバスト性を実現することができることを示した。特に、制御対象の相対次数が1となる出力では、モデルの不確かさは過渡応答に影響を及ぼさないことを示し、数値例でもその点を確認した。

本論文では、MR-ILQ サーボ系における過渡応答のロバスト性を解析的に示すために、保守性はあるが解析が容易な H_∞ ノルムによる評価を用いた。参考文献 [8] では、このロバスト性を評価するのに最適と思われる「誤差出力のピーク値」を評価にとり、線形行列不等式 (LMI) を用いて、MR-ILQ サーボ系の枠組みでの過渡応答のロバスト性を数値的に明らかにしている。

参考文献

- [1] 國松, 藤井, 辻野: 参照入力を一般化した ILQ サーボ系に対する 2 次安定化; 計測自動制御学会論文集, Vol. 39, No. 3, pp. 307–309 (2003)

- [2] 藤井, 辻野, 植松: 二次安定論に基づくロバストサーボ系の設計法; システム制御情報学会論文誌, Vol. 4, No. 11, pp. 462–472 (1991)
- [3] 辻野, 藤井: オブザーバを用いたロバスト追従制御系の設計; システム制御情報学会論文誌, Vol. 12, No. 6, pp. 357–365 (1999)
- [4] 杉本: 主要極を配置したサーボ系の 2 次安定化; 計測自動制御学会論文集, Vol. 34, No. 10, pp. 1419–1424 (1998)
- [5] 酒井, 藤井: ループ整形機能を有する ILQ ロバストサーボ系の解析的設計法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 36, No. 4, pp. 340–347 (2000)
- [6] 黒江, 阿部, 藤井: 参照入力を一般化した ILQ 最適サーボ系設計法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 32, No. 4, pp. 539–546 (1996)
- [7] S. Kunimatsu and T. Fujii: Design method of ILQ servo system with tracking robustness; *Proc. of 4th IFAC Symposium on ROCOND*, CD-ROM (2003)
- [8] S. Kunimatsu and T. Fujii: Analysis and synthesis of model reference ILQ servo system using robust $\mathcal{L}_\infty$ performance measure for a fixed input; *Proc. of 42nd IEEE CDC*, pp. 1818–1823 (2003)
- [9] E. J. Davison: The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 21, No. 1, pp. 25–34 (1976)
- [10] K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover: *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall (1995)
- [11] B. R. Barmish: *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan Publishing Company (1994)
- [12] J. C. Doyle: Synthesis of robust controllers and filters; *Proc. of 22nd IEEE CDC*, pp. 109–114 (1983)
- [13] M. Khammash and J. B. Pearson: Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainties; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 36, No. 4, pp. 398–412 (1991)
- [14] A. A. Stoorvogel: The robust H_2 control problem: a worst case design; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 38, No. 9, pp. 1358–1370 (1993)
- [15] 小郷, 美多: システム制御理論入門, 実教出版 (1979)

付 録

付録 1. ILQ 設計法

ILQ 設計法は LQ 最適性を保証しつつ、所望の目標値特性を得ることが可能な設計法であり、制御則 $K_e = \Sigma_V [K_F^0 \quad -K_C^0]$ は以下のように得られる。

【補題 6】 [6] 漸近伝達関数 $G_{yr}^\infty(s) := \lim_{\Sigma \rightarrow \infty} G_{yr}(s)$ は次式のように指定可能である。

$$G_{yr}^\infty(s) = \text{diag} \left\{ \frac{r_i(s)}{\phi_i(s)} \right\} \in \text{RH}_\infty \quad (\text{A1a})$$

$$\phi_i(s) = \psi_i(s)\alpha(s) + r_i(s) \quad (\text{A1b})$$

$$r_i(s) := r_i^{(q-1)} s^{q-1} + \dots + r_i^{(1)} s + r_i^{(0)} \quad (\text{A1c})$$

$$\deg \phi_i(s) = d_i + q - 1 \quad (\text{A1d})$$

$$\deg \psi_i(s) = d_i - 1 \quad (\text{A1e})$$

このとき、基準最適ゲイン K_F^0, K_C^0 は次式となる。

$$K_F^0 = D_c^{-1} \text{col}_{1 \leq i \leq m} \{c_i \psi_i(A)\} \quad (\text{A2a})$$

$$K_C^0 = D_c^{-1} \text{blockdiag} \left\{ [r_i^{(0)}, \dots, r_i^{(q-1)}] \right\}_{1 \leq i \leq m} \quad (\text{A2b})$$

ただし、 d_i と D_c はそれぞれ 2.2 節で定義された $G(s)$ の第 i 行相対次数と非干渉化行列である。

制御則 K_e が LQ 最適となるための下限値 $\Sigma_{LQ} > 0$ が必ず存在し、 $\Sigma > \Sigma_{LQ}$ を満たす Σ で LQ 最適性が保証される。

付録 2. 補題 3 の証明

(証明) (15) 式の代わりに $P_\alpha(s) := -\{1/\alpha(s)\}P_{21}^\infty(s) = \text{diag}_{1 \leq i \leq m} \{1/\tilde{\phi}_i(s)\} D_p(s) D$ を証明する。

$\{1/\alpha(s)\} I_m = C_W(sI - A_C)^{-1} B_C$ と書ける。ただし、 $C_W := \text{blockdiag}_{1 \leq i \leq m} \{c_w\}$, $c_w := [1, 0_{1 \times (q-1)}]$ である。よって、 $\{1/\alpha(s)\} P_{21}(s)$ の実現を計算した後、 $\Sigma \rightarrow \infty$ とすると、 $P_\alpha(s) = -C_W \Pi_2(sI - \bar{A}_{11})^{-1} T_{11} D$ を得る。ここで、(18) 式の両辺に $\{1/\alpha(s)\} I_m$ をかけて変形したものを考える。すると、 $G_\alpha(s) := \{1/\alpha(s)\} G_{yd}^\infty(s) = \text{diag}_{1 \leq i \leq m} \{1/\tilde{\phi}_i(s)\}$ となり、その実現は次式となる。

$$\begin{aligned} G_\alpha(s) &= -C_W \Pi_2(sI - \bar{A}_{11})^{-1} \bar{A}_{12} V D_c^{-1} \\ &=: C_\alpha(sI - A_\alpha)^{-1} B_\alpha, \quad C_\alpha =: \text{col}_{1 \leq i \leq m} \{c_{\alpha_i}\} \end{aligned}$$

したがって、 $P_\alpha(s)$ と $G_\alpha(s)$ は最初の $C_\alpha(sI - A_\alpha)^{-1}$ が共通である。以下ではこれを利用することとなるが、その準備として、つぎの行列を定義する。

$$\begin{aligned} S_\alpha &:= \begin{bmatrix} \text{col}_{1 \leq i \leq m} \{S_i\} \\ W \end{bmatrix}, \quad \det(S_\alpha) \neq 0 \\ S_i &:= \text{col}_{1 \leq k \leq \hat{d}_i} \{c_{\alpha_i} A_\alpha^{k-1}\}, \quad \hat{d}_i := d_i + q - 1 \end{aligned}$$

ただし、 W は $\det(S_\alpha) \neq 0$ とする行列である。 $G_\alpha(s)$ は非干渉化されているので、非干渉化行列が I_m となることや、 $c_{\alpha_i} \tilde{\phi}_i(A_\alpha) = 0$ となることなどを利用すると、 S_α を用いて、つぎのような正準形式に変換できる [15]。

$$\begin{aligned} G_\alpha(s) &= C_\alpha S_\alpha^{-1} (sI - S_\alpha A_\alpha S_\alpha^{-1})^{-1} S_\alpha B_\alpha \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \text{b-diag}_{1 \leq i \leq m} \{\hat{A}_i\} & 0 \\ \hline \hat{A}_{01} & \hat{A}_0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} \text{b-diag}_{1 \leq i \leq m} \{\hat{b}_i\} \\ \hline \hat{B}_0 \end{array} \right] \\ &\quad \left[\begin{array}{c|c} \text{b-diag}_{1 \leq i \leq m} \{\hat{c}_i\} & 0 \\ \hline & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

ただし、 $\hat{b}_i := [0_{1 \times (\hat{d}_i-1)} \quad 1]^T$, $\hat{c}_i := [1 \quad 0_{1 \times (\hat{d}_i-1)}]$,

$$\hat{A}_i := \begin{bmatrix} 0 & I_{\hat{d}_i-1} \\ -\tilde{\phi}_i^{(0)} & \dots & -\tilde{\phi}_i^{(\hat{d}_i-1)} \end{bmatrix}$$

$\tilde{\phi}_i(s) =: s^{\hat{d}_i} + \tilde{\phi}_i^{(\hat{d}_i-1)} s^{(\hat{d}_i-1)} + \dots + \tilde{\phi}_i^{(0)}$ である。ここで、 $S_i T_{11}$ を計算すると、煩雑な計算の結果、次式となる。

$$S_i T_{11} = \begin{bmatrix} 0_{q \times 1} \\ \text{col}_{1 \leq j \leq \hat{d}_i-1} \left\{ \sum_{k=1}^j c_w A_r^{k+q-2} b_r c_i A^{j-k} \right\} \end{bmatrix}$$

ただし、 $d_i = 1$ の場合は $S_i T_{11} = 0_{q \times 1}$ である。よって、 $c_{\alpha_i}(sI - A_\alpha)^{-1} T_{11} = \hat{c}_i(sI - \hat{A}_i)^{-1} S_i T_{11}$ となる。詳細は割愛するが、 $\tilde{\phi}_i(s)$ の $q+1$ 次以上 ($d_i = 1$ の場合のみ q 以上) の係数は $\phi_i(s)$ に等しいことや、各行列の定義を用いて計算すると、 $c_{\alpha_i}(sI - A_\alpha)^{-1} T_{11} = \sum_{k=1}^{\hat{d}_i-1} \theta_i^{(k)}(s) c_i A^{k-1} / \tilde{\phi}_i(s)$ を得る。最後に、1 行目から m 行目まで計算してまとめた後、右から D をかけると、 $P_\alpha(s) = \text{diag}_{1 \leq i \leq m} \{1/\tilde{\phi}_i(s)\} D_p(s) D$ を得る。□