展開型 2 人非ゼロ和ゲームの均衡解と 2 次計画問題*

西崎 一郎[†]・片桐 英樹[†]・野津 拓馬[†]

Equilibrium Solutions of Two-Person Non-Zero-Sum Games in Extensive Form and the Corresponding Quadratic Programming Problems*

Ichiro NISHIZAKI[†], Hideki KATAGIRI[†] and Takuma NOTSU[†]

This paper deals with two types of two-person non-zero-sum games in extensive form. We formulate quadratic programming problems whose decision variables correspond to behavioral strategies of players and show that optimal solutions to the formulated problems are equilibrium solutions of the games. We give two examples and demonstrate how to obtain equilibrium solutions by using the relation between the equilibrium solutions and the quadratic programming problems.

1. はじめに

2 人ゼロ和ゲームの最適戦略は線形計画問題の最適解として計算できることはよく知られており [7], また 2 人非ゼロ和ゲームの均衡解も同様に 2 次計画問題の最適解として計算できる [3, 8]. 2 人非ゼロ和ゲームに関して, 2 人のプレイヤーの利得最大化問題の Kuhn-Tucker 条件を同時に満足する解が均衡解であるという事実から, Mangasarian and Stone は Kuhn-Tucker 条件の一部から目的関数を作り, その他を制約とすることによって, 2 次計画問題を定式化し, その最適解が均衡解であることを示している [3]. Lemke and Howson は異なる定式化から, 均衡解の計算方法を提案し [2], さらに 2 次計画問題との関連についても考察している [1].

一方, 展開型で示された 2 人ゼロ和ゲームに対しては, Ponssard が自然による偶然手番が一つの場合を取り上げ, 決定変数がプレイヤーの行動戦略である線形計画問題を定式化し, この線形計画問題を解くことによって均衡解が計算できることを示している [9]. さらに, Ponssard and Sorin は偶然手番が二つの場合の展開型で示された 2 人ゼロ和ゲームに対しても同様の結果を報告している [10].

本論文では, Ponssard [9] および Ponssard and Sorin [10]

の結果を 2 人非ゼロ和ゲームに拡張する. すなわち, 偶然手番が一つの場合と二つの場合の展開型で示された 2 人非ゼロ和ゲームを取り上げ, 決定変数がプレイヤーの行動戦略である 2 次計画問題を定式化し, これらの最適解がゲームの均衡解であることを示す. 二つの数値例を与え, 定式化された 2 次計画問題を解くことによって, 実際に均衡解が得られることを示す.

2. ゲームの定義と最適化問題

本節では, 展開型ゲームの基礎を紹介し, 展開型ゲームで表される偶然手番をもつ 2 人非ゼロ和ゲームの均衡解と 2 次計画問題との関係について考察する.

2.1 展開型ゲーム

展開型ゲームでは, プレイヤーの手番と行動の系列が Fig. 1 のような木構造グラフで表現される. Fig. 1 に示されるゲームを例として, 手短に展開型ゲームを説明する. ゲームはノード $N0$ から始まる. 各ノードには枝があり, 枝は選択枝を表現し, ノードに割り付けられたプレイヤーが複数の選択枝から一つを選ぶ. ノード $N0$ では, 自然のプレイヤーが二つの選択枝から一つの枝を選ぶ. ノード $N1$ あるいは $N2$ ではプレイヤー 1 が二つの選択枝から一つの枝を選択する. ノード $N3$ から $N6$ ではプレイヤー 2 が二つの選択枝から一つの枝を選択し, 右端にあらわされた二つの利得をプレイヤー 1 とプレイヤー 2 が受け取ってゲームが終了する. したがって, このゲームは自然のプレイヤー, プレイヤー 1, プレイヤー 2 の順で手番が移り, 各手番で各プレイヤーは二つずつの選択枝をもつ. 図中の破線で囲まれたノードは情報集

* 原稿受付 2003 年 3 月 20 日

[†] 広島大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Hiroshima University; 1-4-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, 739-8527, JAPAN

Key Words: equilibrium solution, two-person non-zero-sum game, extensive form.

Fig. 1 Game tree

合とよばれる。プレイヤー 1 の情報集合は $U1 = \{N1\}$ と $U2 = \{N2\}$ に分かれており、それぞれ要素が一つなので、プレイヤー 1 は自身がノード $N1$ にいるのか、あるいはノード $N2$ にいるのかを知っている。つまり、プレイヤー 1 は自然のプレイヤーの行った行動を知っていることを意味する。一方、プレイヤー 2 の情報集合は $U3 = \{N3, N4\}$ と $U4 = \{N5, N6\}$ となるので、プレイヤー 2 はノード $N3$ か $N4$ のどちらかか、ノード $N5$ か $N6$ のどちらかにいるかはわかっているが、ノード $N3$ か $N4$ のどちらにいたかがわからない。また、ノード $N5$ か $N6$ のどちらにいたかもわからない。この場合、プレイヤー 2 は自然のプレイヤーの行った行動は知っているが、プレイヤー 1 の行った行動はわからないことを意味する。

このゲームでは、情報集合 $U0, U1, U2$ にはそれぞれ二つの枝がある。情報集合 $U3, U4$ には四つの枝があるが、 $U3, U4$ では二つのノードのどちらにプレイヤー 2 自身がいるかわからないので、取り得る選択肢はいずれも二つである。したがって、各プレイヤーは個々の情報集合のなかで二つの選択肢のなかから一つの枝を選ぶ、あるいは混合戦略を考慮すれば二つの選択肢を確率的に選択することになる。各情報集合における選択肢全体の確率分布を局所混合戦略とよび、各プレイヤーのもつ個々の情報集合に対する局所混合戦略すべてを合わせた戦略を行動戦略とよぶ。

このような状況のもとで、各プレイヤーは最終的に得られる期待利得を最大化するように行動する。

2.2 展開型で示された 2 人非ゼロ和ゲームと 2 次計画問題

偶然手番が一つの場合と二つの場合の展開型で示された 2 人非ゼロ和ゲームを取り上げ、均衡解がある種の 2

次計画問題の最適解と等価となることを示す。

2.2.1 偶然手番が一つの場合

$K = \{1, \dots, r\}$ を偶然手番での自然の純戦略の集合とし、その確率分布を $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r)$ とする。また、 $I = \{1, \dots, m\}$ と $J = \{1, \dots, n\}$ をそれぞれプレイヤー 1 とプレイヤー 2 の純戦略の集合とする。自然の純戦略が $k \in K$ ときのプレイヤー 1 とプレイヤー 2 の利得双行列を $G^k = (A^k, B^k)$ とし、双行列 G^k の ij 要素を a_{ij}^k, b_{ij}^k とする。

ゲームの手順は次の四つのステップからなる。

手順 1-0 偶然手番において、確率分布 $\mathbf{p}$ に従って $k \in K$ が選択され、プレイヤー 1 にはその結果 k が知らされるが、プレイヤー 2 には知らされない。

手順 1-1 プレイヤー 1 は k を知ったうえで $i \in I$ を選ぶ。

手順 1-2 プレイヤー 2 は k は知らないが、 i を知ったうえで $j \in J$ を選択する。

手順 1-3 手順 1-0, 1-1, 1-2 で選択された k, i, j に応じてプレイヤー 1 は利得 a_{ij}^k を、プレイヤー 2 は利得 b_{ij}^k を得る。

プレイヤー 1 のすべての情報集合における局所混合戦略を指定した行動戦略の集合 X 、プレイヤー 2 の行動戦略の集合 Y を以下のように定義する。

$$X = \left\{ \mathbf{x} = (x_1^1, \dots, x_m^1; \dots; x_1^r, \dots, x_m^r) \mid \sum_{i=1}^m x_i^k = 1, \forall k \in K, x_i^k \geq 0, \forall i \in I, \forall k \in K \right\} \quad (1)$$

$$Y = \left\{ \mathbf{y} = (y_1^1, \dots, y_n^1; \dots; y_1^m, \dots, y_n^m) \mid \sum_{j=1}^n y_j^i = 1, \forall i \in I, y_j^i \geq 0, \forall i \in I, \forall j \in J \right\} \quad (2)$$

プレイヤー 1 が戦略 $\mathbf{x}$ 、プレイヤー 2 が戦略 $\mathbf{y}$ をとったとき、プレイヤー 1 とプレイヤー 2 の期待利得は

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k a_{ij}^k x_i^k y_j^i \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k b_{ij}^k x_i^k y_j^i \quad (4)$$

と表すことができる。よって均衡解は任意の $\mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y$ に対して

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k a_{ij}^k x_i^{*k} y_j^{*i} \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k a_{ij}^k x_i^k y_j^{*i} \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k b_{ij}^k x_i^{*k} y_j^{*i} \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k b_{ij}^k x_i^k y_j^{*i} \quad (6)$$

を満たす $\mathbf{x}^* \in X, \mathbf{y}^* \in Y$ である。

一方、各プレイヤーは自己の期待利得を最大にしようとするので、2 人のプレイヤーに対して次の問題が定式化できる。

$$\left. \begin{array}{l} \max_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k a_{ij}^k x_i^k y_j^i \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^m x_i^k = 1, k=1, \dots, r \\ x_i^k \geq 0, i=1, \dots, m, k=1, \dots, r \end{array} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \max_{\mathbf{y}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k b_{ij}^k x_i^k y_j^i \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^n y_j^i = 1, i=1, \dots, m \\ y_j^i \geq 0, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n \end{array} \right\} \quad (8)$$

したがって、均衡解は問題 (7), (8) の最適性の Kuhn-Tucker 条件が同時に満足される戦略の対 $\mathbf{x}^* \in X, \mathbf{y}^* \in Y$ でもある。このような事実から、次の定理が導かれる。

【定理 1】 手順 1-0 から手順 1-3 に従う展開型で示された 2 人非ゼロ和ゲームの均衡解が $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ であることの必要十分条件は $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$ が次の 2 次計画問題の最適解であることである。

$$\left. \begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k a_{ij}^k x_i^k y_j^i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k b_{ij}^k x_i^k y_j^i \\ - \sum_{k=1}^r \alpha_k - \sum_{i=1}^m \beta_i \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^n p_k a_{ij}^k y_j^i \leq \alpha_k, i=1, \dots, m, k=1, \dots, r \\ \sum_{k=1}^r p_k b_{ij}^k x_i^k \leq \beta_i, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^m x_i^k = 1, k=1, \dots, r \\ \sum_{j=1}^n y_j^i = 1, i=1, \dots, m \\ x_i^k \geq 0, i=1, \dots, m, k=1, \dots, r \\ y_j^i \geq 0, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n \end{array} \right\} \quad (9)$$

(証明) 問題 (9) の 1 番目と 2 番目の制約式から、3 番目と 5 番目の制約を満たす $\mathbf{x}$ と 4 番目と 6 番目の制約を満たす $\mathbf{y}$ に対して

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k a_{ij}^k x_i^k y_j^i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k b_{ij}^k x_i^k y_j^i - \sum_{k=1}^r \alpha_k - \sum_{i=1}^m \beta_i \leq 0 \quad (10)$$

を得る。つまり目的関数は最適値であっても非正である。

また、プレイヤーの最大化問題 (7), (8) は線形計画問題であるので、均衡解であるための必要十分条件は次の Kuhn-Tucker 条件を満たすことである。

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k a_{ij}^k x_i^k y_j^i - \sum_{k=1}^r \alpha_k = 0 \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k b_{ij}^k x_i^k y_j^i - \sum_{i=1}^m \beta_i = 0 \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^n p_k a_{ij}^k y_j^i - \alpha_k \leq 0, i=1, \dots, m, k=1, \dots, r \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^r p_k b_{ij}^k x_i^k - \beta_i \leq 0, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^m x_i^k = 1, k=1, \dots, r \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j^i = 1, i=1, \dots, m \quad (16)$$

$$x_i^k \geq 0, i=1, \dots, m, k=1, \dots, r \quad (17)$$

$$y_j^i \geq 0, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n \quad (18)$$

ここで、 α_k, β_i はラグランジュ乗数である。

$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ を均衡解とすると、対応する $(\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}})$ が存在し、 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}})$ は Kuhn-Tucker 条件 (11)–(18) を満たす。

(13)–(18) より $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}})$ は問題 (9) に対して実行可能である。また、(11), (12) より

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k a_{ij}^k \hat{x}_i^k \hat{y}_j^i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k b_{ij}^k \hat{x}_i^k \hat{y}_j^i - \sum_{k=1}^r \hat{\alpha}_k - \sum_{i=1}^m \hat{\beta}_i = 0 \quad (19)$$

となり、(10) と (19) より $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}})$ は問題 (9) の最適解である。

$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$ を問題 (9) の最適解とする。このとき、(10) より最適値は 0 以下である。展開型ゲームは等価な戦略型ゲームが対応付けられることと、Nash の均衡解の存在性定理 [4] より、手順 1-0 から手順 1-3 に従うゲームの均衡解は存在し、均衡解は Kuhn-Tucker 条件 (11)–(18) を満たすので、

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k a_{ij}^k x_i^k y_j^i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k b_{ij}^k x_i^k y_j^i - \sum_{k=1}^r \alpha_k - \sum_{i=1}^m \beta_i = 0$$

を満たす問題 (9) の実行可能解 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ が少なくとも一つ存在する。 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$ が問題 (9) の最適解ならば、

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k a_{ij}^k x_i^{k*} y_j^{i*} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k b_{ij}^k x_i^{k*} y_j^{i*} - \sum_{k=1}^r \alpha_k^* - \sum_{i=1}^m \beta_i^* = 0 \quad (20)$$

とならねばならない。問題 (9) の 1 番目と 2 番目の制約式と (20) から

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k a_{ij}^k x_i^{k*} y_j^{i*} - \sum_{k=1}^r \alpha_k^* = 0 \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r p_k b_{ij}^k x_i^{k*} y_j^{i*} - \sum_{i=1}^m \beta_i^* = 0 \quad (22)$$

が得られ, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$ は Kuhn-Tucker 条件 (11)–(18) を満足する. よって $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ は均衡解である. □

問題 (9) は必ずしも凸ではないが, いくつかの初期値を与え, たとえば逐次 2 次計画法を用いて繰り返し解くことにより, 複数個の均衡解を得ることができる.

2.2.2 偶然手番が二つの場合

$K = \{1, \dots, r\}$, $L = \{1, \dots, s\}$ を 1 番目および 2 番目の偶然手番での自然の純戦略の集合とし, その確率分布を $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_s)$ とする. また, $I = \{1, \dots, m\}$ と $J = \{1, \dots, n\}$ をそれぞれプレイヤー 1 とプレイヤー 2 の純戦略の集合とする. 自然の純戦略が $k \in K$, $l \in L$ のときのプレイヤー 1 とプレイヤー 2 の利得双行列を $G^{kl} = (A^{kl}, B^{kl})$ とし, 双行列 G^{kl} の ij 要素を a_{ij}^{kl} , b_{ij}^{kl} とする.

ゲームの手順は次の三つのステップからなる.

手順 2-0 最初の偶然手番において, 確率分布 $\mathbf{p}$ に従って $k \in K$ が, 2 番目の偶然手番において, 確率分布 $\mathbf{q}$ に従って $l \in L$ が選択され, プレイヤー 1 には k が知らされ, プレイヤー 2 には l が知らされる.

手順 2-1 プレイヤー 1 は k を知ったうえで $i \in I$ を選ぶ. プレイヤー 2 は l を知ったうえで $j \in J$ を選ぶ. ただし, プレイヤー 1 とプレイヤー 2 は互いに相手の戦略を知らずに, 自己の戦略を選択する.

手順 2-2 手順 2-0, 2-1 で選択された k, l, i, j に応じてプレイヤー 1 は利得 a_{ij}^{kl} を, プレイヤー 2 は利得 b_{ij}^{kl} を得る.

プレイヤー 1 のすべての情報集合における局所混合戦略を指定した行動戦略の集合 X , プレイヤー 2 の行動戦略の集合 Y を以下のように定義する.

$$X = \left\{ \mathbf{x} = (x_1^1, \dots, x_m^1; \dots; x_1^r, \dots, x_m^r) \mid \sum_{i=1}^m x_i^k = 1, \forall k \in K, x_i^k \geq 0, \forall i \in I, \forall k \in K \right\} \quad (23)$$

$$Y = \left\{ \mathbf{y} = (y_1^1, \dots, y_n^1; \dots; y_1^s, \dots, y_n^s) \mid \sum_{j=1}^n y_j^l = 1, \forall l \in L, y_j^l \geq 0, \forall i \in I, \forall l \in L \right\} \quad (24)$$

プレイヤー 1 が戦略 $\mathbf{x}$, プレイヤー 2 が戦略 $\mathbf{y}$ をとったとき, プレイヤー 1 とプレイヤー 2 の期待利得は

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s p_k q_l a_{ij}^{kl} x_i^k y_j^l \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s p_k q_l b_{ij}^{kl} x_i^k y_j^l \quad (26)$$

と表すことができる. よって均衡解は任意の $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in Y$ に対して

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s p_k q_l a_{ij}^{kl} x_i^{k*} y_j^{l*} \\ & \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s p_k q_l a_{ij}^{kl} x_i^k y_j^{l*} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s p_k q_l b_{ij}^{kl} x_i^{k*} y_j^{l*} \\ & \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s p_k q_l b_{ij}^{kl} x_i^{k*} y_j^l \end{aligned} \quad (28)$$

を満たす $\mathbf{x}^* \in X$, $\mathbf{y}^* \in Y$ である.

偶然手番が二つの場合も, 偶然手番が一つの場合と同様に次の定理が得られる.

【定理 2】 手順 2-0 から手順 2-2 に従う展開型で示された 2 人非ゼロ和ゲームの均衡解が $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ であることの必要十分条件は $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$ が次の 2 次計画問題の最適解であることである.

$$\begin{aligned} \max & \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s p_k q_l a_{ij}^{kl} x_i^k y_j^l \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s p_k q_l b_{ij}^{kl} x_i^k y_j^l - \sum_{k=1}^r \alpha_k - \sum_{l=1}^s \beta_l \right. \\ \text{s. t. } & \left. \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^s p_k q_l a_{ij}^{kl} y_j^l \leq \alpha_k, i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, r \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r p_k q_l b_{ij}^{kl} x_i^k \leq \beta_l, j = 1, \dots, n, l = 1, \dots, s \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^m x_i^k = 1, k = 1, \dots, r \right. \\ & \left. \sum_{j=1}^n y_j^l = 1, l = 1, \dots, s \right. \\ & \left. x_i^k \geq 0, i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, r \right. \\ & \left. y_j^l \geq 0, i = 1, \dots, m, l = 1, \dots, s \right\} \quad (29) \end{aligned}$$

定理 2 の証明は定理 1 の証明と同様の手順で示され, 問題 (9) と同様に, いくつかの初期値を与え, たとえば逐次 2 次計画法を用いて繰り返し解くことにより, 複数個の均衡解を得ることができる.

なお, 定理 1 および定理 2 とともにゼロ和の条件を満たすときにも適用可能で, Ponssard[9] および Ponssard and Sorin[10] の結果の拡張になっている.

3. 数値例

前節で示した偶然手番が一つの場合と偶然手番が二つの場合のゲームの例をそれぞれ一つずつ与え, 2 次計画問題を定式化し, 実際に均衡解が得られることを示す.

例 1 偶然手番が一つの場合の数値例として Osborne and Rubinstein によるビールかキッシュのゲーム [6] を取り上げる. このゲームでは, 偶然手番によってプレイヤー

1のタイプが決定される．プレイヤー1のタイプは2種類で、強いタイプと弱いタイプであり、偶然手番での自然の純戦略の集合は $K = \{1, 2\}$ となる．強いタイプはビールを好み、弱いタイプはキッシュを好む．プレイヤー1の戦略は朝食に「ビールを飲む」か「キッシュを食べる」であり、純戦略の集合は $I = \{1, 2\}$ となる．プレイヤー2はプレイヤー1のタイプは知らないが、プレイヤー1が朝食に何を食べたかを知ることができる．そしてプレイヤー1と「戦う」か「戦わない」かの戦略を選択する．よって、プレイヤー2の純戦略の集合は $J = \{1, 2\}$ となる．自然、プレイヤー1、プレイヤー2の純戦略の数はすべて2であり、 $r = m = n = 2$ となる．また、偶然手番の確率分布は $\mathbf{p} = (0.9, 0.1)$ とする．

プレイヤー1は朝食に好きなものを食べれば利得1、プレイヤー2が戦ってこなければ、さらに2の利得を得る．プレイヤー2は、強いタイプと戦えば0、戦わなければ1を得て、弱いタイプと戦えば利得1、戦わなければ0を得る．よって、利得双行列は次のように示される．

$$G^1 = (A^1, B^1) = \begin{bmatrix} (1, 0) & (3, 1) \\ (0, 0) & (2, 1) \end{bmatrix}$$

$$G^2 = (A^2, B^2) = \begin{bmatrix} (0, 1) & (2, 0) \\ (1, 1) & (3, 0) \end{bmatrix}$$

以上のゲームを示すゲームの木を Fig. 2 に示す．破線で囲まれたノードは情報集合を表す．

この例に対する問題 (9) は次のように定式化される．

Fig. 2 Beer or quiche

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{9}{10}x_1^1y_1^1 + \frac{18}{5}x_1^1y_2^1 + \frac{27}{10}x_2^1y_2^1 + \frac{1}{10}x_1^2y_1^1 + \frac{1}{5}x_1^2y_2^1 \\ & + \frac{1}{5}x_2^2y_1^1 + \frac{3}{10}x_2^2y_2^1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2 \\ \text{s. t.} \quad & \frac{9}{10}y_1^1 + \frac{27}{10}y_2^1 \leq \alpha_1, \quad \frac{9}{5}y_2^2 \leq \alpha_1 \\ & \frac{1}{5}y_2^1 \leq \alpha_2, \quad \frac{1}{10}y_1^1 + \frac{3}{10}y_2^1 \leq \alpha_2 \\ & \frac{1}{10}x_1^2 \leq \beta_1, \quad \frac{9}{10}x_1^1 \leq \beta_1 \\ & \frac{1}{10}x_2^2 \leq \beta_2, \quad \frac{9}{10}x_2^1 \leq \beta_2 \\ & x_1^1 + x_2^1 = 1, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ & y_1^1 + y_2^1 = 1, \quad y_1^2 + y_2^2 = 1 \\ & x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2 \geq 0 \\ & y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

初期値を変えて逐次2次計画法を用いて繰り返し上記の問題を解くと以下の2種類の均衡解が得られた．

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= ((1, 0; 1, 0), (0, 1; y_1^2, y_2^2)), \text{ where } y_1^2 \geq y_2^2 \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= ((0, 1; 0, 1), (y_1^1, y_2^1; 0, 1)), \text{ where } y_1^1 \geq y_2^1 \end{aligned}$$

また、上記の問題の偶然手番の確率分布を $\mathbf{p} = (0.1, 0.9)$ に変更すると次の均衡解が得られた．

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\left(1, 0; \frac{1}{9}, \frac{8}{9} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 0 \right) \right)$$

偶然手番の確率分布が $\mathbf{p} = (0.9, 0.1)$ の場合には、均衡解は純戦略の列挙によっても得られるが、確率分布が $\mathbf{p} = (0.1, 0.9)$ の場合の均衡解は混合戦略であるので、純戦略の列挙では均衡解が見つからず、このような問題に対しては提案した計算方法によって効率的に均衡解が見つけれられる．

例2 偶然手番が二つの例として、岡田による男女の争いゲーム [5] を取り上げる．二つの偶然手番において2人のプレイヤーのタイプが決まる．プレイヤーのタイプは2種類で、男性タイプと女性タイプであり、偶然手番での自然の純戦略の集合は $K = L = \{1, 2\}$ となる．男性タイプはボクシングをバレエより好み、女性タイプはバレエをボクシングより好む．各プレイヤーは「ボクシングを見に行く」か、「バレエを見に行く」かを定める．プレイヤー1およびプレイヤー2の戦略はそれぞれ「ボクシングを見に行く」か「バレエを見に行く」かであり、純戦略の集合は $I = J = \{1, 2\}$ となる．自然、プレイヤー1、プレイヤー2の純戦略の数はすべて2であり、 $r = s = m = n = 2$ となる．また、偶然手番の確率分布は $\mathbf{p} = \mathbf{q} = (0.5, 0.5)$ とする．両プレイヤーともに、好きな方を一緒に見に行くことができれば利得2、そうでない方を一緒に見に行ったら利得1、一緒に行けなければ利得0を得る．よって、利得双行列は次のように示される．

$$G^{11} = (A^{11}, B^{11}) = \begin{bmatrix} (2, 2) & (0, 0) \\ (0, 0) & (1, 1) \end{bmatrix}$$

$$G^{12} = (A^{12}, B^{12}) = \begin{bmatrix} (2, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (1, 2) \end{bmatrix}$$

$$G^{21} = (A^{21}, B^{21}) = \begin{bmatrix} (1,2) & (0,0) \\ (0,0) & (2,1) \end{bmatrix}$$

$$G^{22} = (A^{22}, B^{22}) = \begin{bmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (0,0) & (2,2) \end{bmatrix}$$

上述のゲームの木を Fig. 3 に示す. 破線で囲まれたノードは情報集合を表す.

Fig. 3 Battle of sexes

この例に対する問題 (29) は以下のように定式化される.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1^1 y_1^1 + \frac{1}{2} x_2^1 y_2^1 + \frac{3}{4} x_1^2 y_1^1 + \frac{3}{4} x_2^2 y_2^1 + \frac{3}{4} x_1^1 y_1^2 \\ & + \frac{3}{4} x_2^1 y_2^2 + \frac{1}{2} x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2 \\ \text{s. t.} \quad & \frac{1}{2} y_1^1 + \frac{1}{2} y_2^1 \leq \alpha_1, \quad \frac{1}{4} y_2^1 + \frac{1}{4} y_2^2 \leq \alpha_1 \\ & \frac{1}{4} y_1^1 + \frac{1}{4} y_1^2 \leq \alpha_2, \quad \frac{1}{2} y_2^1 + \frac{1}{2} y_2^2 \leq \alpha_2 \\ & \frac{1}{2} x_1^1 + \frac{1}{2} x_2^1 \leq \beta_1, \quad \frac{1}{4} x_2^1 + \frac{1}{4} x_2^2 \leq \beta_1 \\ & \frac{1}{4} x_1^1 + \frac{1}{4} x_1^2 \leq \beta_2, \quad \frac{1}{2} x_2^1 + \frac{1}{2} x_2^2 \leq \beta_2 \\ & x_1^1 + x_2^1 = 1, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ & y_1^1 + y_2^1 = 1, \quad y_1^2 + y_2^2 = 1 \\ & x_1^1 \geq 0, \quad x_2^1 \geq 0, \quad x_1^2 \geq 0, \quad x_2^2 \geq 0 \\ & y_1^1 \geq 0, \quad y_2^1 \geq 0, \quad y_1^2 \geq 0, \quad y_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

初期値を変えて逐次 2 次計画法を用いて繰り返し上記

の問題を解くと以下の五つの均衡解が得られた.

$$\begin{aligned} (x, y) &= ((1, 0; 1, 0), (1, 0; 1, 0)) \\ (x, y) &= ((1, 0; 0, 1), (1, 0; 0, 1)) \\ (x, y) &= ((0, 1; 0, 1), (0, 1; 0, 1)) \\ (x, y) &= \left(\left(1, 0; \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(1, 0; \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right) \\ (x, y) &= \left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; 0, 1 \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; 0, 1 \right) \right) \end{aligned}$$

利得行列あるいはゲームの木からわかるように, 各プレイヤーが違う行動をとったときは利得が 0 で, 同じ行動をとったときのみ正の利得がある. 得られた五つの均衡解でも両者ともに同じ戦略を取っている. とくに均衡解 $(x, y) = ((1, 0; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (1, 0; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$ については, 混合戦略が均衡解になっている. この解ではプレイヤー 2 が $y = (1, 0; \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ のとき, プレイヤー 1 の利得を最大にするのは $x = (1, 0; x_1^2, x_2^2)$ であるが, $x_1^2 < \frac{1}{3}$ のときはプレイヤー 2 が戦略を $y = (1, 0; 0, 1)$ にした方が利得が高くなり, $x_1^2 > \frac{1}{3}$ のときはプレイヤー 2 が戦略を $y = (1, 0; 1, 0)$ にした方が利得が高くなる. 逆にプレイヤー 1 が $x = (1, 0; \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ のとき, プレイヤー 2 の利得を最大にするのは $y = (1, 0; y_1^2, y_2^2)$ であるが, $y_1^2 < \frac{1}{3}$ のときはプレイヤー 1 が戦略を $x = (1, 0; 0, 1)$ にした方が利得が高くなり, $y_1^2 > \frac{1}{3}$ のときはプレイヤー 2 が戦略を $x = (1, 0; 1, 0)$ にした方が利得が高くなるので, $(x, y) = ((1, 0; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (1, 0; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$ が均衡解となる. 均衡解 $(x, y) = ((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; 0, 1), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; 0, 1))$ についても同様である.

4. おわりに

本論文では, 展開型で示された偶然手番が一つ, あるいは二つである場合の非ゼロ和 2 人ゲームを取り上げ, プレイヤーの行動戦略に対応する決定変数をもつ 2 次計画問題を定式化し, その最適解がゲームの均衡解であることを示した. これにより, 定式化された 2 次計画問題を解くことによって均衡解が計算できることがわかるが, 具体的な数値例により均衡解の計算手順を示し, 得られたいくつかの均衡解を示した. 今後の研究の展開として, 複数の利得をもつ多目的ゲームへの拡張を考えている.

参考文献

- [1] C. E. Lemke: Bimatrix equilibrium points and mathematical programming; *Management Science*, Vol. 11, pp. 681–689 (1965)
- [2] C. E. Lemke and J. T. Howson Jr.: Equilibrium points of bimatrix games; *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 12, pp. 413–423 (1964)
- [3] O. L. Mangasarian and H. Stone: Two-person nonzero-sum games and quadratic programming; *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 9, pp. 348–355 (1964)

- [4] J. F. Nash: Noncooperative games; *Annals of Mathematics*, Vol. 54, pp. 286–295 (1951)
- [5] 岡田: ゲーム理論, 有斐閣 (1996)
- [6] M. J. Osborne and A. Rubinstein: *A Course in Game Theory*, MIT Press (1994)
- [7] G. Owen: *Game Theory*, Academic Press, Second Edition (1982), Third Edition (1995)
- [8] T. Parthasarathy and T. E. S. Raghavan: *Some Topics in Two-Person Games*, American Elsevier Publishing Company (1971)
- [9] J. P. Ponssard: A note on the L-P formulation of zero-sum sequential games with incomplete information; *International Journal of Game Theory*, Vol. 4, pp. 1–5 (1975)
- [10] J. P. Ponssard and S. Sorin: The LP formulation of finite zero-sum games with incomplete information; *International Journal of Game Theory*, Vol. 9, pp. 99–105 (1980)