パラメータを外乱と見なした非線形適応 $\mathcal{H}_\infty$ 制御系の構成法

— ある種の非線形パラメトリックモデルに対する適用*

宮里 義彦[†]

Nonlinear Adaptive $\mathcal{H}_\infty$ Control Systems for Bounded Variations of Parameters — Nonlinear Parametric Model*

Yoshihiko MIYASATO[†]

A new class of adaptive nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control systems for nonlinear and time-varying processes which include nonlinear parametric models approximated by neural networks (NN), is proposed in this manuscript. Those control schemes are derived as solutions of particular nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control problems, where unknown system parameters, approximation and algorithmic errors in NN, and estimation errors of layer weights in NN, are regarded as exogenous disturbances to the processes, and thus, in the resulting control systems, the $\mathcal{L}_2$ gains from those uncertain elements to generalized outputs are made less than $\gamma(>0)$ (the prescribed positive constants). The resulting control systems are bounded for arbitrarily large but bounded variations of time-varying parameters and layer weights, and modeling and algorithmic errors in NN approximators.

1. 緒言

ニューラルネット (Neural Network: NN) の関数近似能力に着目して, NN を非線形制御や非線形適応制御に適用する試みはこれまでに多くある. しかし NN は非線形関数の表現の誤差 (近似誤差) に加えて, 各層の重み係数の学習が NN の線形回帰モデルに基づいて行われる (誤差逆伝搬法) という算法上の誤差も存在するため, 大域的な安定解析は困難であり, 制御系の構成に関して厳密な解析に基づく結果は得られていなかった [1-4]. これに対し近年, 従来とは異なる線形回帰モデルに対する算法上の誤差の厳密な評価が可能になり [5], この評価と結びつけた安定解析に基づく NN のロバスト非線形適応制御も提案されつつある [5-7]. そこでは過渡特性などの制御性能に関する議論も行われているが, 最適性と関係づけた解析には至っていない.

これに対して本論文では, $\mathcal{H}_\infty$ 制御の規範に基づいて, NN を用いた非線形適応制御系の構成法について論じる. 提案する手法では, システムパラメータの時間変動成分, NN の近似誤差と算法上の誤差, および NN の各層の重

み係数の推定誤差をシステムに加わる等価的な外乱と見なして, その外乱から一般化出力 (制御誤差と入力信号の一部) への $\mathcal{L}^2$ ゲインを規定する非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御系を逆最適性の立場から構成する [8-13]. その結果得られる制御系においては, 非線形特性やシステムパラメータが時間変化する場合でも制御系全体の有界性が保たれ, また等価的な外乱から一般化出力への $\mathcal{L}^2$ ゲインを規定するパラメータを小さく設定することで, NN の関数近似誤差の大きさに関わらずに, 制御誤差を任意に小さくすることができる. さらにシステムの特性が時間不変で, NN の近似誤差と算法上の誤差が存在しない理想的な場合には, 制御誤差の零収束性も保証される. これらの事柄が安定解析だけではなく, 特定の指標に対する最適性と関連づけて議論できるところに提案する手法の特徴がある.

2. 問題設定

相対次数が n^* 次の 1 入力 1 出力非線形系を考える.

$$\frac{d}{dt}e(t) = f_1(e(t), r(t)) + f_2(e(t), r(t)) + b_0 u_{fn^*-1}(t) + \Phi_1^T \omega_1(t) \quad (1)$$

$$u_{fi}(t) = \frac{1}{(s+\lambda)^i} u(t) \quad (\lambda > 0) \quad (2)$$

ただし $e(t)$ は制御変数 (出力値または追従誤差など), $u(t)$ は制御入力, $r(t)$ は有界な外生信号, $f_1(e(t), r(t))$,

* 原稿受付 2004 年 1 月 9 日

[†] 統計数理研究所 The Institute of Statistical Mathematics; Minami-Azabu, Minato-ku, Tokyo 106-8569, JAPAN**Key Words:** adaptive control, nonlinear control, $\mathcal{H}_\infty$ control, neural network.

$f_2(e(t), r(t))$ は未知の非線形項とする. とくに $f_1(e, r)$ は構造が規定できる非線形項 (NN で近似できる), $f_2(e, r)$ は外乱も含めた構造の規定できない非線形項とする. $\omega_1(t)$ は測定可能な信号から構成されるベクトル, b_0 と Φ_1 は未知のシステムパラメータ (時変パラメータでもよい) とする. 次の仮定をおく.

(仮定 1) 1) b_0 は時変の場合も考えるが, その符号は不変で既知とする. 以後では一般性を失うことなく $b_0 > 0$ とする.

2) 未知の非線形要素 $f_2(e, r)$ は次のように評価される.

$$|f_2(e, r)| \leq d_2 \cdot \phi_2(e, r) \quad (3)$$

ただし d_2 は未知の正の定数で, $\phi_2(e, r) (> 0)$ は既知の関数とする.

3) $\omega_1(t)$ は次のように評価される [12].

$$\|\omega_1(t)\| \leq N_1 \cdot \sup_{t \geq \tau} |e(\tau)| + N_2 \quad (N_1, N_2 > 0) \quad (4)$$

また $\dot{\omega}_1(t) \sim \omega_1^{(n^*-1)}(t)$ は測定可能な信号ベクトルであり以下のように評価される.

$$\begin{aligned} \|\omega_1^{(i)}(t)\| &\leq N_3 \cdot \sup_{t \geq \tau} |e(\tau)| + N_4 \cdot \sup_{t \geq \tau} |u_{fn^*-i}(\tau)| \\ &\quad + N_5 \quad (5) \\ (N_3 \sim N_5 > 0), \quad (1 \leq i \leq n^* - 1) \end{aligned}$$

4) パラメータ Φ_1 のノルムの上界 (M_1) が既知とする. また高調波利得 b_0 の上界 $\bar{b}_0$ と下界 $\underline{b}_0$ を評価する δ_b, M_b も既知であり

$$0 < \delta_b \leq \underline{b}_0 \leq b_0 \leq \bar{b}_0 \leq M_b < \infty \quad (6)$$

以下の p の上界 $\bar{p}$ と下界 $\underline{p}$ に関しても同様の δ_p, M_p が既知とする.

$$p \equiv \frac{1}{b_0}, \quad \bar{p} \equiv \frac{1}{\underline{b}_0}, \quad \underline{p} \equiv \frac{1}{\bar{b}_0} \quad (7)$$

$$0 < \delta_p \leq \underline{p} \leq p \leq \bar{p} \leq M_p < \infty \quad (8)$$

以上のような設定のもとで, 次の性質を有する非線形適応制御系を導出する.

1. (安定性の条件) 任意の有界な時変パラメータに対して制御系は有界となる. またとくに時不変パラメータまたは時変パラメータが一定値に収束し, NN に含まれる誤差が 0 の時には, 制御変数 $e(t)$ の漸近安定性が保証される.

2. (最適性の条件) 得られた制御系が特定の制御指標に対して, 最適または準最適となる.

【注意 1】 (1), (2) 式の制御対象は, いくつかの適応制御問題を含む一般的な表現形式となっている [12,13] (たとえば文献 [12] の付録 A 参照). また仮定 1-3 はそのような適応制御問題において制御対象の最小位相性に対応している (文献 [12] の付録 B 参照).

3. 非線形パラメトリックモデル

非線形成分 $f_1(e, r)$ を 3 層の NN の出力 $g(z)$ で近似する.

$$g(z) = W^T S(V^T \bar{Z}) \in \mathbf{R} \quad (9)$$

$$S(V^T \bar{Z}) = [s(v_1^T \bar{Z}), \dots, s(v_m^T \bar{Z})]^T \in \mathbf{R}^m \quad (10)$$

$$\bar{Z} = [z^T, 1]^T = [e, r, 1]^T \in \mathbf{R}^3, \quad z = [e, r]^T \in \mathbf{R}^2 \quad (11)$$

$$s(x) = \frac{1}{1 + \exp(-\gamma x)} \quad (\gamma > 0) \quad (12)$$

$$W = [w_1, \dots, w_m]^T \in \mathbf{R}^m \quad (13)$$

$$V = [v_1, \dots, v_m] \in \mathbf{R}^{3 \times m} \quad (v_i \in \mathbf{R}^3) \quad (14)$$

NN のユニット数 (m) を十分多くとることで $g(z)$ が $f_1(e, r)$ を十分よく近似して [14], 次の仮定 2 が成立するものとする.

(仮定 2) 次式を満たす重み係数 V と W (時変も含む) が存在する.

$$f_1(e, r) = g(z) + \mu_1, \quad |\mu_1| \leq d_1 \cdot \phi_1(e, r) \quad (15)$$

ただし d_1 は未知の正の定数で, $\phi_1(e, r) (> 0)$ は既知の関数とする. またこの V と W のノルムの上界が既知とする.

V と W の推定値をそれぞれ $\hat{V}$ と $\hat{W}$ とおいて, 推定値を逐次的に求める. この時, 推定モデル $\hat{g}(z) = \hat{W}^T S(\hat{V}^T \bar{Z})$ と真のモデル $g(z)$ の間に次のような関係式が成立する [5,15].

【補題 1】 $\hat{g}(z)$ と $g(z)$ の誤差は次のように評価される.

$$\begin{aligned} \hat{g}(z) - g(z) &= \hat{W}^T S(\hat{V}^T \bar{Z}) - W^T S(V^T \bar{Z}) \\ &= \tilde{W}^T (\hat{S} - \hat{S}' \hat{V}^T \bar{Z}) + \hat{W}^T \hat{S}' \tilde{V}^T \bar{Z} + \mu_2 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\tilde{W} = \hat{W} - W, \quad \tilde{V} = \hat{V} - V \quad (17)$$

$$\hat{S} = S(\hat{V}^T \bar{Z}) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}' &= \text{diag}(\hat{s}'_1, \dots, \hat{s}'_m) \\ \hat{s}'_i &= s'(\hat{v}_i^T \bar{Z}) = \left[\frac{ds(z)}{dz} \right]_{z=\hat{v}_i^T \bar{Z}} \end{aligned} \quad (19)$$

$$|\mu_2| \leq \|V\| \cdot \|\bar{Z}\| \hat{W}^T \hat{S}' + \|W\| \cdot \|\hat{S}' \hat{V}^T \bar{Z}\| + |W|_1 \quad (20)$$

【注意 2】 μ_2 を直接に表すと以下ようになる.

$$\mu_2 = \tilde{W}^T \hat{S}' V^T \bar{Z} + \mathcal{O}\{(\tilde{V}^T \bar{Z})^2\} \quad (21)$$

つまり μ_2 を評価する式は $\tilde{W} = 0, \tilde{V} = 0$ で 0 にならないが, μ_2 そのものは $\tilde{W} = 0, \tilde{V} = 0$ で 0 になる. また通常の誤差逆伝搬法で用いられる線形回帰モデルは次式の部分である.

$$\tilde{W}^T \hat{S} + \hat{W}^T \hat{S}' \tilde{V}^T \bar{Z} \quad (22)$$

【注意 3】 NN の関数近似はコンパクトな領域で論じられるが, ここでは大域的な領域 $\mathbf{R}^2$ で仮定 2 が成立す

るものとする．このため重み係数 W, V は一定の値とは限らず，領域の変化に応じて変動するものとする．これらは時間変動の重み係数として捉えることができる．また $f_1(e, r)$ の大域的な挙動は μ_1 を評価する $\phi_1(e, r)$ にも反映されているものとする（そのように $\phi_1(e, r)$ を決定する）．

4. 非線形適応 $\mathcal{H}_\infty$ 制御

以下にバックステッピング [16] に基づいて n^* ステップ ($n^* + 1$ ステップ目は補助信号と適応則の決定) で構成法を示す．

Step 1) $z_1(t)$ と $z_2(t)$ を次のように定めて

$$z_1(t) \equiv e(t) \quad (23)$$

$$z_2(t) \equiv u_{fn^*-1}(t) - \alpha_1(t) \quad (24)$$

仮想入力 $\alpha_1(t)$ を以下のように決定する．

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= -\hat{p}(t)\{\hat{\Phi}_1(t)^T \omega_1(t) + \hat{W}(t)^T S(\hat{V}(t)^T \bar{Z}(t))\} \\ &\quad + v_1(t) + \tilde{\alpha}_1(t) \\ &\equiv -\hat{p}(t)v_0(t) + v_1(t) + \tilde{\alpha}_1(t) \end{aligned} \quad (25)$$

$v_1(t)$ と $\tilde{\alpha}_1(t)$ は後に定める信号である．また先の $g(z)$ と $\hat{g}(z)$ の誤差を次のように表す．

$$\begin{aligned} \hat{g}(z) - g(z) &= \tilde{W}^T(\hat{S} - \hat{S}' \hat{V}^T \bar{Z}) + \hat{W}^T \hat{S}' \hat{V}^T \bar{Z} + \mu_2 \\ &= \tilde{W}^T \omega_{20} + \sum_{i=1}^m \tilde{v}_i^T \omega_{2i} + \mu_2 \equiv \tilde{\Phi}_2^T \omega_2 + \mu_2 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\omega_{20} = \hat{S} - \hat{S}' \hat{V}^T \bar{Z} \in \mathbf{R}^m \quad (27)$$

$$\omega_{2i} = (\hat{w}_i \hat{s}_i') \bar{Z} \in \mathbf{R}^3 \quad (1 \leq i \leq m) \quad (28)$$

$$\Phi_2 = [W^T, v_1^T, \dots, v_m^T]^T \in \mathbf{R}^{4m} \quad (29)$$

$$\hat{\Phi}_2 = [\hat{W}^T, \hat{v}_1^T, \dots, \hat{v}_m^T]^T \in \mathbf{R}^{4m} \quad (30)$$

$$\tilde{\Phi}_2 = \hat{\Phi}_2 - \Phi_2 = [\tilde{W}^T, \tilde{v}_1^T, \dots, \tilde{v}_m^T]^T \in \mathbf{R}^{4m} \quad (31)$$

$$(\tilde{v}_i = \hat{v}_i - v_i)$$

$$\omega_2 = [\omega_{20}^T, \omega_{21}^T, \dots, \omega_{2m}^T]^T \in \mathbf{R}^{4m} \quad (32)$$

調整パラメータ $\hat{p}(t)$ は射影型の適応則 [17] により決定する．

$$\dot{\hat{p}}(t) = \begin{cases} g_3 v_0 z_1(t) & \text{Case I}_p \\ 0 & \text{Case II}_p \end{cases} \quad (33)$$

ただし $g_3 > 0$ で Case I_p, II_p は次のように定める．

Case I_p : $\delta_p < \hat{p} < M_p$, または $\hat{p} = \delta_p$ & $v_0(t)z_1(t) \geq 0$,
または $\hat{p} = M_p$ & $v_0(t)z_1(t) \leq 0$

Case II_p : その他の場合

これに対して正定関数 $V_1(t)$ を定めて (ただし Φ_i^* は時変パラメータ Φ_i の代表値 (時不変) とする．とくに Φ_i が時不変の時は $\Phi_i^* = \Phi_i$ となる.)

$$V_1(t) = \frac{1}{2} z_1(t)^2$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \{\hat{\Phi}_i(t) - \Phi_i^*\}^T G_i^{-1} \{\hat{\Phi}_i(t) - \Phi_i^*\} \\ &+ \frac{b_0}{2} \{\hat{p}(t) - \bar{p}\}^2 / g_3 \\ &+ \frac{1}{2} \{\hat{b}_0(t) - \bar{b}_0\}^2 / g_4 \end{aligned} \quad (34)$$

$$(G_i = G_i^T > 0, g_4 > 0)$$

$V_1(t)$ の時間微分を計算する．

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &\leq \tilde{\Theta}^T \tilde{\omega}_1(t) z_1(t) + f_2(e, r) z_1(t) \\ &\quad + (\mu_1 + \mu_2) z_1(t) \\ &\quad + \{\hat{b}_0(t) + \tilde{b}_0(t)\} v_1(t) z_1(t) \\ &\quad + b_0 z_1(t) z_2(t) + b_0 \tilde{\alpha}_1(t) z_1(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \{\hat{\Phi}_i(t) - \Phi_i^*\}^T G_i^{-1} \{\dot{\hat{\Phi}}_i(t) - \tau_{\Phi_i 1}(t)\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \sigma_i(\|\hat{\Phi}_i\|) \{\Phi_i^* - \hat{\Phi}_i(t)\}^T \hat{\Phi}_i(t) \\ &\quad + \{\hat{b}_0(t) - \bar{b}_0\} \{\dot{\hat{b}}_0(t) - \tau_{b1}(t)\} / g_4 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\tilde{\Theta} \equiv [(\Phi_1 - \Phi_1^*)^T, (\Phi_2 - \Phi_2^*)^T, b_0 - \bar{b}_0]^T \quad (36)$$

$$\tilde{b}_0 \equiv b_0 - \bar{b}_0 (\geq 0) \quad (37)$$

$$\tilde{\omega}_1(t) = [\omega_1(t)^T, \omega_2(t)^T, \hat{p}(t)v_0(t)]^T \quad (38)$$

$$\tau_{\Phi_{11}}(t) = G_1 \omega_1(t) z_1(t) - \sigma_1(\|\hat{\Phi}_1\|) G_1 \hat{\Phi}_1(t) \quad (39)$$

$$\tau_{\Phi_{21}}(t) = G_2 \omega_2(t) z_1(t) - \sigma_2(\|\hat{\Phi}_2\|) G_2 \hat{\Phi}_2(t) \quad (40)$$

$$\tau_{b1}(t) = g_4 v_1(t) z_1(t) \quad (41)$$

ただし $\sigma_i(\|\hat{\Phi}_i\|)$ ($i = 1, 2$) は後に定める連続微分可能な正値の関数とする．[13] と同様にして (35) 式右辺の第 1 項～4 項より次の仮想的なシステムを考え

$$\dot{z}_1 = f(z_1) + g_{11} d + g_{12} v_1 \quad (42)$$

$$f(z_1) = 0 \quad (43)$$

$$\begin{aligned} g_{11} &= [\|\tilde{\omega}_1\|, \phi_1(e, r), \phi_2(e, r), \\ &\quad \|\bar{Z} \hat{W}^T \hat{S}'\|, \|\hat{S}' \hat{V}^T \bar{Z}\|, 1] \\ &\equiv \Omega_1(z_1, r, \tilde{\omega}_1)^T \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} d &= [\|\tilde{\Theta}\|, d_1, d_2, \|V\|, \|W\|, \|W\|_1]^T \\ &\equiv \Delta(\Phi_1, \Phi_2, b_0) \end{aligned} \quad (45)$$

$$g_{12} = \hat{b}_0 + \tilde{b}_0 \quad (46)$$

$d = \Delta(\Phi_1, \Phi_2, b_0)$ ((45) 式) をシステムに加わる未知外乱と考えて，非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の手法で v_1 を用いてシステムを安定化する．そのために正定数 γ_1^* に対して正定関数 $\tilde{V}_1$

$$\tilde{V}_1(t) = \frac{1}{2} z_1(t)^2 \quad (47)$$

が次の Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) 方程式の解となるように正値の関数 h_1 と r_1 を求める．

$$\frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial z_1} f_1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\|g_{11}\|^2}{\gamma_1^{*2}} - \frac{g_{12}^2}{r_1} \right) \left(\frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial z_1} \right)^2 + h_1 z_1^2 \leq 0$$

(48)

$$\Leftrightarrow \left\{ \frac{\|\Omega_1\|^2}{\gamma_1^{*2}} - \frac{(\hat{b}_0 + \tilde{b}_0)^2}{r_1} \right\} \frac{z_1^2}{4} + h z_1^2 \leq 0 \quad (49)$$

上式には未知の $\tilde{b}_0$ が含まれるので, $\tilde{b}_0 \geq 0$ ((37) 式) を考慮して次式を満足する h_1 と r_1 を求める (下記の式は上式の十分条件) .

$$\left(\frac{\|\Omega_1\|^2}{\gamma_1^{*2}} - \frac{\hat{b}_0^2}{r_1} \right) \frac{z_1^2}{4} + h_1 z_1^2 \leq 0 \quad (50)$$

これより非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の解としての入力 v_1^* が以下のようになるが

$$v_1^* = -\frac{1}{2r_1} g_{12} \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial z_1} = -\frac{1}{2r_1} (\hat{b}_0 + \tilde{b}_0) z_1 \quad (51)$$

上式には未知の $\tilde{b}_0$ が含まれるので, 以下の制御入力 v_1 で代用する.

$$v_1^* = -\frac{\hat{b}_0}{2r_1} z_1 \quad (52)$$

この時, 元の系と $V_1(t)$, および $v_1^*(t)$ に特定化しない $v_1(t)$ に対して, 次の関係式が得られる.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &\leq r_1 \left\{ \frac{\hat{b}_0(t) z_1(t)}{2r_1} + v_1(t) \right\}^2 \\ &\quad - \{h_1 z_1(t)^2 + r_1 v_1(t)^2\} \\ &\quad - \gamma_1^{*2} \left\| \Delta - \frac{1}{2\gamma_1^{*2}} \Omega_1 |z_1(t)| \right\|^2 + \gamma_1^{*2} \|\Delta\|^2 \\ &\quad + \tilde{b}_0(t) v_1(t) z_1(t) + b_0 z_1(t) z_2(t) + b_0 \tilde{\alpha}_1(t) z_1(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \{ \hat{\Phi}_i(t) - \Phi_i^* \}^T G_i^{-1} \{ \dot{\hat{\Phi}}_i(t) - \tau_{\phi_i}(t) \} \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \sigma_i(\|\hat{\Phi}_i\|) \{ \Phi_i^* - \hat{\Phi}_i(t) \}^T \hat{\Phi}_i(t) \\ &\quad + \{ \hat{b}_0(t) - \underline{b}_0 \} \{ \dot{\hat{b}}_0(t) - \tau_{b1}(t) \} / g_4 \end{aligned} \quad (53)$$

Step i) ($2 \leq i \leq n^*$) $z_i(t)$ の時間微分を計算する.

$$z_i(t) \equiv u_{fn^*-i+1}(t) - \alpha_{i-1}(t) \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= -\lambda u_{fn^*-i+1}(t) + u_{fn^*-i}(t) - \beta_{i-1}(t) \\ &\quad - \gamma_{i-1}(t) \{ f_1(z_1, r) + f_2(z_1, r) \\ &\quad + b_0 u_{fn^*-1}(t) + \Phi_1^T \omega_1(t) \} \\ &\quad - \gamma_{pi-1}(t) \dot{p}(t) - \gamma_{\phi_1 i-1}(t) \dot{\hat{\Phi}}_1(t) \\ &\quad - \gamma_{\phi_2 i-1}(t) \dot{\hat{\Phi}}_2(t) - \gamma_{bi-1}(t) \dot{\hat{b}}_0(t) \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \beta_{i-1}(t) &= \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \omega_{(i-1)}} \dot{\omega}_{(i-1)}(t) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial z_j} \{ -\lambda u_{fn^*-j+1}(t) \\ &\quad + u_{fn^*-j}(t) - \beta_{j-1}(t) \} \end{aligned} \quad (56)$$

$$\gamma_{i-1}(t) = \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial z_1} - \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial z_j} \gamma_{j-1}(t) \quad (57)$$

$$\gamma_{pi-1}(t) = \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{p}} - \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial z_j} \gamma_{pj-1}(t) \quad (58)$$

$$\gamma_{\phi_1 i-1}(t) = \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\Phi}_1} - \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial z_j} \gamma_{\phi_1 j-1}(t) \quad (59)$$

$$\gamma_{\phi_2 i-1}(t) = \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\Phi}_2} - \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial z_j} \gamma_{\phi_2 j-1}(t) \quad (60)$$

$$\gamma_{bi-1}(t) = \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{b}_0} - \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial z_j} \gamma_{bj-1}(t) \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \omega_{(i-1)}(t) &= \{ u_{fn^*-1}(t) \sim u_{fn^*-i+2}, r, \dot{r}, \sim r^{(i-2)}, \\ &\quad \omega_{(i-2)}(t), \dot{\omega}_{(i-2)}(t) \text{ の独立な成分から} \\ &\quad \text{成る信号ベクトル} \} \end{aligned} \quad (62)$$

ただし $\sum_{j=2}^1(\cdot)$ の場合はこの項を加えないものとする. $z_i(t)$ に対して, $z_{i+1}(t)$ と $\alpha_i(t)$ を以下のように定める. ただし $v_i(t)$ と $\tilde{\alpha}_i(t)$ は後に定める信号である.

$$z_{i+1}(t) \equiv u_{fn^*-i}(t) - \alpha_i(t) \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \alpha_i(t) &= \lambda u_{fn^*-i+1}(t) + \beta_{i-1}(t) - \hat{c}_i(t) z_{i-1}(t) \\ &\quad + \gamma_{i-1}(t) \{ \hat{\Phi}_1(t)^T \omega_1(t) \\ &\quad + \hat{W}(t)^T S(\hat{V}(t)^T \bar{Z}(t)) \} \\ &\quad + \hat{b}_0(t) \gamma_{i-1}(t) u_{fn^*-1}(t) + v_i(t) + \tilde{\alpha}_i(t) \\ &\quad + \gamma_{\phi_1 i-1}(t) \tau_{\phi_1 i}(t) + \gamma_{\phi_2 i-1}(t) \tau_{\phi_2 i}(t) \end{aligned} \quad (64)$$

$$\hat{c}_i(t) = \begin{cases} \hat{b}_0(t) & (i=2) \\ 1 & (i \geq 3) \end{cases} \quad (65)$$

これに対して正定関数 $V_i(t)$ を定め

$$V_i(t) = \frac{1}{2} z_i(t)^2 \quad (66)$$

時間微分を計算すると, 先と同様にして次の関係が得られる.

$$\begin{aligned} c_i z_{i-1}(t) z_i(t) &+ \sum_{j=1}^2 \{ \hat{\Phi}_j(t) - \Phi_j^* \}^T G_j^{-1} \{ \dot{\hat{\Phi}}_j(t) - \tau_{\phi_j i-1}(t) \} \\ &+ \{ \hat{b}_0(t) - \underline{b}_0 \} \{ \dot{\hat{b}}_0(t) - \tau_{bi-1}(t) \} / g_4 + \dot{V}_i(t) \\ &= \tilde{\Theta}^T \tilde{\omega}_i(t) z_i(t) + z_i(t) z_{i+1}(t) + \gamma_{i-1}(t) (\mu_1 + \mu_2) z_i(t) \\ &\quad - \gamma_{i-1}(t) f_2(z_1, r) z_i(t) + z_i(t) \{ v_i(t) + \tilde{\alpha}_i(t) \} \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 z_i(t) \gamma_{\phi_j i-1}(t) \{ \tau_{\phi_j i}(t) - \dot{\hat{\Phi}}_j(t) \} \\ &\quad - \gamma_{pi-1}(t) \dot{p}(t) z_i(t) - \gamma_{bi-1}(t) \dot{\hat{b}}_0(t) z_i(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 \{ \hat{\Phi}_j(t) - \Phi_j^* \}^T G_j^{-1} \{ \dot{\hat{\Phi}}_j(t) - \tau_{\phi_j i}(t) \} \\ &\quad + \{ \hat{b}_0(t) - \underline{b}_0 \} \{ \dot{\hat{b}}_0(t) - \tau_{bi}(\tau) \} / g_4 \end{aligned} \quad (67)$$

$$\tau_{\phi_1 i}(t) = \tau_{\phi_1 i-1}(t) - G_1 \gamma_{i-1}(t) \omega_1(t) z_i(t) \quad (68)$$

$$\tau_{\phi_2 i}(t) = \tau_{\phi_2 i-1}(t) - G_2 \gamma_{i-1}(t) \omega_2(t) z_i(t) \quad (69)$$

$$\tau_{bi}(t) = \tau_{bi-1}(t) - g_4 \gamma_{i-1}(t) u_{fn^*-1}(t) z_i(t) \quad (70)$$

$$\tilde{\omega}_i(t) = [-\gamma_{i-1}(t) \omega_1(t)^T, -\gamma_{i-1}(t) \omega_2(t)^T,$$

$$\gamma_{i-1}(t)u_{fn^*-1}(t),]^T \quad (71)$$

$$c_i = \begin{cases} b_0 & (i=2) \\ 1 & (i \geq 3) \end{cases} \quad (72)$$

[13] と同様にして (67) 式右辺の第 1 項, 3 項, 4 項, 5 項より次の仮想的なシステムを考え

$$\dot{z}_i = f(z_i) + g_{i1}d + g_{i2}v_i \quad (73)$$

$$f(z_i) = 0$$

$$g_{i1} = [\|\tilde{\omega}_i\|, |\gamma_{i-1}|\phi_1(e, r), |\gamma_{i-1}|\phi_2(e, r), |\gamma_{i-1}|\|\tilde{Z}\tilde{W}^T\tilde{S}'\|, |\gamma_{i-1}|\|\tilde{S}'\tilde{V}^T\tilde{Z}\|, |\gamma_{i-1}|] \\ \equiv \Omega_i(z_1, \dots, z_i, r, \tilde{\omega}_i)^T \quad (74)$$

$$g_{i2} = 1 \quad (75)$$

$d = \Delta(\Phi_1, \Phi_2, b_0)$ ((45) 式) をシステムに加わる外乱と考へて, 非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の手法で v_i を用いてシステムを安定化する. このために正定数 γ_i^* に対して正定関数 $\tilde{V}_i$

$$\tilde{V}_i(t) = V_i(t) = \frac{1}{2}z_i(t)^2 \quad (76)$$

が次の HJI 方程式の解となるように正值の関数 h_i と r_i を求める.

$$\frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial z_i} f_i + \frac{1}{4} \left(\frac{\|g_{i1}\|^2}{\gamma_i^{*2}} - \frac{g_{i2}^2}{r_i} \right) \left(\frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial z_i} \right)^2 + h_i z_i^2 \leq 0 \quad (77)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \frac{\|\Omega_i\|^2}{\gamma_i^{*2}} - \frac{1}{r_i} \right\} \frac{z_i^2}{4} + h_i z_i^2 \leq 0 \quad (78)$$

これより非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の解としての入力以下のように求まる.

$$v_i^* = -\frac{1}{2r_i} g_{i2} \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial z_i} = -\frac{1}{2r_i} z_i \quad (79)$$

この時, 元の系と $V_1(t) \sim V_i(t)$, および $v_1^*(t) \sim v_i^*(t)$ に特定化しない $v_1(t) \sim v_i(t)$ に対して次の関係式が得られる.

$$\sum_{j=1}^i \dot{V}_j(t) \leq r_1 \left\{ \frac{\hat{b}_0(t)z_1(t)}{2r_1} + v_1(t) \right\}^2 \\ - \{h_1 z_1(t)^2 + r_1 v_1(t)^2\} \\ - \gamma_1^{*2} \left\| \Delta - \frac{1}{2\gamma_1^{*2}} \Omega_1(t) |z_1(t)| \right\|^2 + \gamma_1^{*2} \|\Delta\|^2 \\ + \tilde{b}_0(t) v_1(t) z_1(t) \\ + \sum_{j=2}^i \left[r_j \left\{ \frac{z_j(t)}{2r_j} + v_j(t) \right\}^2 \right. \\ \left. - \{h_j z_j(t)^2 + r_j v_j(t)^2\} \right. \\ \left. - \gamma_j^{*2} \left\| \Delta - \frac{1}{2\gamma_j^{*2}} \Omega_j(t) |z_j(t)| \right\|^2 + \gamma_j^{*2} \|\Delta\|^2 \right] \\ + z_i(t) z_{i+1}(t) + \sum_{j=2}^i \gamma_{\phi_{1j}-1}(t) \{ \tau_{\phi_{1j}} - \dot{\hat{\Phi}}_1(t) \}$$

$$+ \sum_{j=2}^i \gamma_{\phi_{2j}-1}(t) \{ \tau_{\phi_{2j}} - \dot{\hat{\Phi}}_2(t) \} \\ - \sum_{j=2}^i \gamma_{p_{j-1}}(\tau) \dot{p}(t) z_j(t) - \sum_{j=2}^i \gamma_{b_{j-1}}(t) \dot{b}_0(t) z_j(t) \\ + \sum_{j=1}^2 \{ \hat{\Phi}_j(t) - \Phi_j^* \}^T G_j^{-1} \{ \dot{\hat{\Phi}}_j(t) - \tau_{\phi_{ji}}(t) \} \\ + \sum_{j=1}^2 \sigma_j \left(\|\hat{\Phi}_j\| \right) \{ \Phi_j^* - \hat{\Phi}_j(t) \}^T \hat{\Phi}_j(t) \\ + \{ \hat{b}_0(t) - \underline{b}_0 \} \{ \dot{\hat{b}}_0(t) - \tau_{b_i}(t) \} / g_4 \\ + b_0 \tilde{\alpha}_1(t) z_1(t) + \sum_{j=2}^i \tilde{\alpha}_j(t) z_j(t) \quad (80)$$

最後の Step n^*) で実際の制御入力 $u(t)$ が決定される.

$$u(t) = \alpha_{n^*}(t) \quad (81)$$

Step $n^* + 1$) $\hat{\Phi}_1(t)$, $\hat{\Phi}_2(t)$, $\hat{b}_0(t)$, $\tilde{\alpha}_i(t)$ の決定
 $\hat{\Phi}_1(t)$, $\hat{\Phi}_2(t)$, $\hat{b}_0(t)$ の適応則と補助信号 $\tilde{\alpha}_i(t)$ は次のように定める.

$$\dot{\hat{\Phi}}_1(t) = \tau_{\phi_{1n^*}}(t) \quad (82)$$

$$\dot{\hat{\Phi}}_2(t) = \tau_{\phi_{2n^*}}(t) \quad (83)$$

$$\dot{\hat{b}}_0(t) = \begin{cases} \tau_{bn^*}(t) & \text{Case I}_b \\ 0 & \text{Case II}_b \end{cases} \quad (84)$$

$$\tilde{\alpha}_1(t) = -k_p \sum_{j=2}^{n^*} \left(\frac{1}{4k_{j1}} g_3^2 + \frac{1}{4k_{j2}} g_4^2 + \frac{1}{4k_{j3}} g_4^2 \right) z_1(t) \quad (85)$$

$$\tilde{\alpha}_i(t) = -k_{i1} \gamma_{p_{i-1}}(t)^2 v_0(t)^2 z_2(t) \\ - k_{i2} \gamma_{b_{i-1}}(t)^2 v_1(t)^2 z_i(t) \\ - k_{i3} \gamma_{b_{i-1}}(t)^2 z_i(t)^2 z_i(t) \\ - (n^* - 1) k_{i4} \gamma_{b_{i-1}}(t)^2 u_{fn^*-1}(t)^2 z_i(t) \\ - \sum_{j=2}^{n^*} \frac{g_4^2}{4k_{j4}} \gamma_{i-1}(t)^2 z_i(t) \\ - \sum_{j=2}^{i-1} \gamma_{\phi_{1j}-1}(t) G_1 \gamma_{i-1}(t) \omega_1(t) z_j(t) \\ - \sum_{j=2}^{i-1} \gamma_{\phi_{2j}-1}(t) G_2 \gamma_{i-1}(t) \omega_2(t) z_j(t) \\ (2 \leq i \leq n^*) \quad (86)$$

ただし $k_{j1} \sim k_{j4} > 0$ で $k_p \geq M_p > 0$ ($k_p b_0 \geq 1$) とする. また Case I_b, II_b は次のように定める.

Case I_b : $\delta_b < \hat{b}_0 < M_b$, または $\hat{b}_0 = \delta_b$ & $\tau_{bn^*}(t) \geq 0$,
または $\hat{b}_0 = M_b$ & $\tau_{bn^*}(t) \leq 0$

Case II_b : その他の場合

この時, 以下の関係が得られる [17].

$$\{ \hat{b}_0(t) - \underline{b}_0 \} \{ \dot{\hat{b}}_0(t) - \tau_{bn^*}(t) \} / g_4 \leq 0 \quad (87)$$

また $\sigma_i(\|\hat{\Phi}_i\|)$ は次の条件を満足する $n^* - 2$ 階連続微分可能な正値の関数とする ($i = 1, 2, \sigma_{i0} > 0$) .

$$\sigma_i(\|\hat{\Phi}_i\|) = \begin{cases} 0 & \|\hat{\Phi}_i\| \leq M_i \\ \in [0, \sigma_{i0}] & M_i \leq \|\hat{\Phi}_i\| \leq 2M_i \\ \sigma_{i0} & 2M_i \leq \|\hat{\Phi}_i\| \end{cases} \quad (88)$$

ただし $\|\Phi_i^*\| \leq M_i$ とする. このとき次式が成立する [17].

$$\begin{aligned} \sigma_i(\|\hat{\Phi}_i\|)(\Phi_i^* - \hat{\Phi}_i)^T \hat{\Phi}_i \\ \leq -\frac{\sigma_{i0}}{2} \|\Phi_i^* - \hat{\Phi}_i\|^2 + \frac{\sigma_{i0}}{2} (\|\Phi_i^*\| + 2M_i)^2 \end{aligned} \quad (89)$$

$$\sigma_i(\|\hat{\Phi}_i\|)(\Phi_i^* - \hat{\Phi}_i)^T \hat{\Phi}_i \leq 0 \quad (90)$$

また次の評価より

$$|\dot{p}(t)| \leq |g_3 v_0(t) z_1(t)| \quad (91)$$

$$\begin{aligned} \|\dot{b}_0(t)\| \leq |g_4 v_1(t) z_1(t)| + |g_4 z_1(t) z_2(t)| \\ + \sum_{j=2}^{n^*} |g_4 \gamma_{j-1}(t) u_{fn^*-1}(t) z_j(t)| \end{aligned} \quad (92)$$

$\tilde{\alpha}_i(t)$ を含む以下の関係が得られる ((86) 式の $\tilde{\alpha}_i$ は次式が成立するように選んだ) .

$$\begin{aligned} -\sum_{j=2}^{n^*} \gamma_{pj-1}(t) \dot{p}(t) z_j(t) - \sum_{j=2}^{n^*} \gamma_{bj-1}(t) \dot{b}_0(t) z_j(t) \\ + \sum_{j=2}^{n^*} \gamma_{\phi 1j-1}(t) \{\tau_{\phi 1j}(t) - \dot{\Phi}_1(t)\} z_j(t) \\ + \sum_{j=2}^{n^*} \gamma_{\phi 2j-1}(t) \{\tau_{\phi 2j}(t) - \dot{\Phi}_2(t)\} z_j(t) \\ + \sum_{j=2}^{n^*} \tilde{\alpha}_j(t) z_j(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (93)$$

以上をまとめると $V_i(t)$ に関して最終的に次の評価式が導かれる.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n^*} \dot{V}_i(t) \leq r_1 \left\{ \frac{\dot{b}_0(t) z_1(t)}{2r_1} + v_1(t) \right\}^2 \\ - \{h_1 z_1(t)^2 + r_1 v_1(t)^2\} \\ - \gamma_1^{*2} \left\| \Delta - \frac{1}{2\gamma_1^{*2}} \Omega_1(t) |z_1(t)| \right\|^2 + \gamma_1^{*2} \|\Delta\|^2 \\ + \tilde{b}_0(t) v_1(t) z_1(t) \\ + \sum_{i=2}^{n^*} \left[r_i \left\{ \frac{z_i(t)}{2r_i} + v_i(t) \right\}^2 \right. \\ - \{h_i z_i(t)^2 + r_i v_i(t)^2\} \\ \left. - \gamma_i^{*2} \left\| \Delta - \frac{1}{2\gamma_i^{*2}} \Omega_i(t) |z_i(t)| \right\|^2 + \gamma_i^{*2} \|\Delta\|^2 \right] \\ + \sum_{j=1}^2 \sigma_j(\|\hat{\Phi}_j\|) \{\Phi_j^* - \hat{\Phi}_j(t)\}^T \hat{\Phi}_j(t) \end{aligned} \quad (94)$$

ただし $\tilde{b}_0(t) v_1(t) z_1(t) \leq 0$ に注意する. これより本論文の主要結果が得られる (証明は $\sum_{i=1}^{n^*} V_i(t)$ の評価式 (94)

式と (90) 式より [13] と同様にして行うことができる) .

【定理 1】 以上の適応制御系 ($v_1^*(t) \sim v_{n^*}^*(t)$ も含む) は一様有界となる. またとくに本論文の適応則を用いなくても, 任意の有界な $\hat{b}_0(t), \hat{p}(t), \hat{\Phi}_2(t), \hat{\Phi}_2(t)$ (一定値でもよい) に対して制御系は有界となる.

【定理 2】 以上の適応制御系において $b_0 \equiv \text{const.}$ の場合を考える. このとき適応制御系は一様有界で, $v_1^*(t) \sim v_{n^*}^*(t)$ はそれ以外の部分から定まる制御系に対して, 次の評価関数の上界を最小化する準最適制御入力となる.

$$\begin{aligned} J(t) \equiv \sup_{\Delta \in \mathcal{L}_2} \left[\sum_{i=1}^{n^*} \int_0^T \{h_i z_i(\tau)^2 + r_i v_i(\tau)^2\} d\tau \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n^*} V_i(t) - \sum_{i=1}^{n^*} \gamma_i^{*2} \int_0^T \|\Delta(\tau)\|^2 d\tau \right] \end{aligned} \quad (95)$$

また次式も成立する.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n^*} \int_0^T \{h_i z_i(\tau)^2 + r_i v_i(\tau)^2\} d\tau + \sum_{i=1}^{n^*} V_i(t) \\ \leq \sum_{i=1}^{n^*} V_i(0) + \sum_{i=1}^{n^*} \gamma_i^{*2} \int_0^T \|\Delta(\tau)\|^2 d\tau \end{aligned} \quad (96)$$

とくに $\mu_1 = \mu_2 = d_1 = d_2 = 0, \Phi_i - \Phi_i^* \in \mathcal{L}_2$ ($i = 1, 2$) の時には, $z_1(t) \sim z_{n^*}(t) \rightarrow 0$ が達成される.

【定理 3】 以上の適応制御系において $b_0 \neq \text{const.}$ の場合を考える. このとき適応制御系は一様有界で次式が成立する.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n^*} \int_0^T \{h_i z_i(\tau)^2 + r_i v_i(\tau)^2\} d\tau + \sum_{i=1}^{n^*} V_i(t) \\ + \int_0^T \frac{\tilde{b}_0(\tau) \hat{b}_0(\tau)}{2r_1} z_1(\tau)^2 d\tau \\ \leq \sum_{i=1}^{n^*} V_i(0) + \sum_{i=1}^{n^*} \gamma_i^{*2} \int_0^T \|\Delta(\tau)\|^2 d\tau \end{aligned} \quad (97)$$

とくに $\mu_1 = \mu_2 = d_1 = d_2 = 0, \Phi_i - \Phi_i^* \in \mathcal{L}_2$ ($i = 1, 2$) の時には, $z_1(t) \sim z_{n^*}(t) \rightarrow 0$ が達成されると同時に, 定理 2 の準最適制御系に漸近的に収束する.

【定理 4】 特定の Φ_i^*, b_0^*, p^* ($b_0^* p^* = 1$) に対して, $(\Phi_i - \Phi_i^*), (b_0 - b_0^*), (p - p^*) \in \mathcal{L}_2$, および $b_0 \rightarrow b_0^*, p \rightarrow p^*, \mu_1 = \mu_2 = d_1 = d_2 = 0$ とする. この時, $z_1(t) \sim z_{n^*}(t) \rightarrow 0$ (as $t \rightarrow \infty$) が成立する.

つぎに h_i と r_i を特定の形式に限定することで, それらと制御系の陽な表現を求める.

【解法 I】 (49) (78) 式より $r_i (i \geq 1)$ は次のように選べる.

$$\frac{1}{r_i} = \frac{k_{i5} + k_{i6} \|\Omega_i\|^2}{r_{0i}} \Leftrightarrow r_i = \frac{r_{0i}}{k_{i5} + k_{i6} \|\Omega_i\|^2} \quad (98)$$

($k_{i5}, k_{i6}, r_{0i} > 0$)

ただし k_{i5}, k_{i6}, r_{0i} は設計変数である. これより $h_1, h_i (i \geq$

2) は

$$\begin{aligned} h_1 &\leq \frac{\{\hat{b}_0^2 k_{15} \gamma_1^{*2} + (\hat{b}_0^2 k_{16} \gamma_1^{*2} - r_{01}) \|\Omega_1\|^2\}}{4r_{01} \gamma_1^{*2}} \\ h_i &\leq \frac{[k_{i5} \gamma_i^{*2} + (k_{i6} \gamma_i^{*2} - r_{0i}) \|\Omega_i\|^2]}{4r_{0i} \gamma_i^{*2}} \quad (i \geq 2) \end{aligned} \quad (99)$$

となり, $h_1, h_i (i \geq 2)$ が正定となるための k_{16} と k_{i6} の条件式は次のようになる.

$$\begin{aligned} k_{16} &\geq \frac{r_{01}}{\hat{b}_0^2 \gamma_1^{*2}} \left(\Leftarrow k_{16} \geq \frac{r_{01}}{\delta_b^2 \gamma_1^{*2}} \right), \quad (0 < \delta_b \leq b_0, \hat{b}_0) \\ k_{i6} &\geq \frac{r_{0i}}{\gamma_i^{*2}}, \quad (i \geq 2) \end{aligned} \quad (100)$$

また制御入力は以下の式で与えられる.

$$v_1 = -\frac{\hat{b}_0}{2r_1} z_1 = -\frac{\hat{b}_0 [k_{15} + k_{16} \|\Omega_1\|^2]}{2r_{01}} z_1 \quad (101)$$

$$v_i = -\frac{1}{2r_i} z_i = -\frac{k_{i5} + k_{i6} \|\Omega_i\|^2}{2r_{0i}} z_i \quad (i \geq 2) \quad (102)$$

【解法 II】 以下のような制約において r_i と h_i を求める.

$$h_1 = a_1 r_{11} + \frac{\hat{b}_0^2}{4r_{10}} \quad (103)$$

$$h_i = a_i r_{i1} + \frac{1}{4r_{i0}} \quad (i \geq 2) \quad (104)$$

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r_{i0}} + \frac{1}{r_{i1}} \quad (105)$$

ただし $a_i, r_{i0} (0 < a_i, r_{i0} < \infty)$ は, r_i と h_i の関係を規定する正の定数である. このとき (49) (78) 式の等号条件で r_{i1} が以下の 2 次方程式の正値解として求められる.

$$a_1 r_{11}^2 + G_1 r_{11} - \frac{\hat{b}_0^2}{4} = 0 \quad (106)$$

$$G_1 = \frac{\|\Omega_1\|^2}{4\gamma_1^{*2}} \quad (107)$$

$$a_i r_{i1}^2 + G_i r_{i1} - \frac{1}{4} = 0 \quad (i \geq 2) \quad (108)$$

$$G_i = \frac{\|\Omega_i\|^2}{4\gamma_i^{*2}} \quad (109)$$

これより r_{i1} と h_i は次のようになり,

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{-G_1 + \sqrt{G_1^2 + a_1 \hat{b}_0^2}}{2a_1} = \frac{\hat{b}_0^2}{2 \left\{ \sqrt{G_1^2 + a_1 \hat{b}_0^2} + G_1 \right\}} \\ r_{i1} &= \frac{-G_i + \sqrt{G_i^2 + a_i}}{2a_i} = \frac{1}{2 \left\{ \sqrt{G_i^2 + a_i} + G_i \right\}} \quad (i \geq 2) \end{aligned} \quad (110)$$

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{-G_1 + \sqrt{G_1^2 + a_1 \hat{b}_0^2}}{2} + \frac{\hat{b}_0^2}{4r_{10}} \\ h_i &= \frac{-G_i + \sqrt{G_i^2 + a_i}}{2} + \frac{1}{4r_{i0}} \quad (i \geq 2) \end{aligned} \quad (111)$$

制御入力は次式で表される.

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{\hat{b}_0}{2r_1} z_1 \\ &= -\left\{ \frac{1}{\hat{b}_0} \left(\sqrt{G_1^2 + a_1 \hat{b}_0^2} + G_1 \right) + \frac{\hat{b}_0}{2r_{10}} \right\} z_1 \end{aligned} \quad (112)$$

$$v_i = -\frac{1}{2r_i} z_i = -\left\{ \left(\sqrt{G_i^2 + a_i} + G_i \right) + \frac{1}{2r_{i0}} \right\} z_i \quad (i \geq 2) \quad (113)$$

二つの解法で求めた制御器に対して, 次の定理が成り立つ (証明は $\sum_{i=1}^n V_i(t)$ の評価式 (94) 式と (90) 式より [13] と同様に行うことができる).

【定理 5】 解法 I または解法 II を用いると, 設計変数 $k_{i5}, k_{i6}, r_{0i}, a_i, \gamma_i^*$ の適切な選択により (十分大きな k_{i5}, k_{i6}, a_i と十分小さな r_{0i}, γ_i^*), z_i の残差領域を任意に小さくできる.

5. 数値例

本手法の有効性を確認するために相対次数が 2 次の場合について数値実験を行った. 以下の追値制御問題を考える.

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(y(t)) + u_f(t) \\ \dot{u}_{f1}(t) &= -\lambda u_f(t) + u(t) \\ e(t) &= y(t) - r(t) \\ f(y) &= y + 2 \sin y \\ r(t) &= \sin t \end{aligned}$$

ここに $f(y)$ が以下のようにニューラルネット近似できるとして適応制御系を構成した.

$$\begin{aligned} f(y) &= W^T S(V^T \bar{Z}) + \mu \\ \bar{Z} &= [y, 1]^T, \quad |\mu| \leq d, \quad m = 5 \end{aligned}$$

設計変数は次のように定めた.

$$\begin{aligned} g &= 100 \text{ (適応ゲイン)} \\ M &= 100 \text{ (}\sigma\text{-修正則のパラメータ)}, \quad \lambda = 1 \\ k_{ij} &= 5, \quad r_{10} = r_{20} = 1, \quad a_1 = a_2 = 1, \quad \gamma_1^* = \gamma_2^* = 0.1 \\ \gamma &= 0.01 \text{ (シグモイド関数のパラメータ)} \\ \sigma_0 &= 0.1 \end{aligned}$$

$$\sigma(\|\hat{\Phi}_i\|) = \begin{cases} 0 & \|\hat{\Phi}_i\| \leq M \\ \sigma_0 \left(\frac{\|\hat{\Phi}_i\|}{M} - 1 \right) & M \leq \|\hat{\Phi}_i\| \leq 2M \\ \sigma_0 & 2M \leq \|\hat{\Phi}_i\| \end{cases}$$

Fig.1 と Fig.2 にそれぞれ解法 I と II を用いた結果を示す.

Fig. 1 Simulation result (method I)

Fig. 2 Simulation result (method II)

6. 結言

システムパラメータとニューラルネットワーク (NN) に含まれる誤差を外乱と見なして、この未知外乱 (パラメータと NN の誤差) から一般化出力までの $\mathcal{L}_2$ ゲインを規定するような、非線形適応 $\mathcal{H}_\infty$ 制御系について述べた。この制御方式が非線形特性やシステムパラメータが時間変化する場合にも適用可能で制御系の有界性が保証されること (定理 1), とくに高調波利得が時不変の時にはある $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題に対する最適 (または準最適) 解となっていること (定理 2), パラメータが時変の場合でもパラメータと NN の誤差から一般化出力への $\mathcal{L}_2$ ゲインが陽に規定されていること (定理 3), 理想的な条件下 (パラメータが時不変または一定値に収束し NN の誤差が 0) で制御誤差のゼロ収束が保証されることを示した (定理 4)。また、制御器の一般化形式に加えて、二つの陽な制御器の表現も与え、設計変数を適切に定めると、システムパラメータの変動や NN の誤差の大きさに関わらず、制御誤差の残差領域を任意に小さくできることも示した (定理 5)。

参考文献

- [1] M. Brown and C. Harris: *Neurofuzzy Adaptive Modelling and Control*, Prentice-Hall International (1994)
- [2] M. M. Polycarpou and P. A. Ioannou: Neural networks as on-line approximators of nonlinear systems; *Proceedings of the 31st IEEE CDC*, pp. 7–12 (1992)
- [3] F. C. Chen and H. K. Khalil: Adaptive control of a class of nonlinear discrete-time systems using neural networks; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 40, pp. 791–801 (1995)
- [4] F. C. Chen and H. K. Khalil: Adaptively controlling nonlinear continuous-time systems using multi-layer neural networks; *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 39, pp. 1306–1310 (1994)
- [5] T. Zhang, S. S. Ge and C. C. Hang: Design and performance analysis of a direct adaptive controller for nonlinear systems; *Automatica*, Vol. 35, pp. 1809–1817 (1999)
- [6] J. Q. Gong and B. Yao: Neural network-based adaptive robust control of a class of nonlinear systems in normal form; *Proceedings of 2000 ACC*, pp. 1419–1423 (2000)
- [7] A. Calise, N. Hovakimyan and H. Lee: Adaptive output feedback control of nonlinear systems using neural networks; *Proceedings of 2000 ACC*, pp. 3153–3457 (2000)
- [8] Z. H. Li and M. Krstić: Optimal design of adaptive tracking controllers for nonlinear systems; *Automatica*, Vol. 33, No. 8, pp. 1459–1473 (1997)
- [9] M. Krstić and H. Deng: *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems*, Springer (1998)
- [10] 宮里: 逆最適性に基づく非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御; 計測と制御, Vol. 39, No. 2, pp. 112–118 (2000)
- [11] 宮里: 適応 $\mathcal{H}_\infty$ 制御系の構成法; 計測と制御, Vol. 40, No. 10, pp. 692–697 (2001)
- [12] 宮里: 最適性に基づく適応制御系の再設計; 計測自動制御学会論文集, Vol. 38, No. 9, pp. 765–774 (2002)
- [13] 宮里: パラメータを外乱と見なした非線形適応 $\mathcal{H}_\infty$ 制御系の構成法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 39, No. 10, pp. 914–923 (2003)
- [14] K. I. Funahashi: On the approximate realization of continuous mappings by neural-networks; *Neural Networks*, Vol. 2, pp. 183–192 (1989)
- [15] 宮里: ニューラルネットを用いた非線形適応制御; 計測と制御, Vol. 41, No. 12, pp. 881–887 (2002)
- [16] M. Krstić, I. Kanellakopoulos and P. V. Kokotović: *Nonlinear and Adaptive Control Design*, John Wiley & Sons (1995)
- [17] P. A. Ioannou and J. Sun: *Robust Adaptive Control*, PTR Prentice-Hall (1996)