部分空間同定法に基づいた線形時変確率システムの 予測とその逐次アルゴリズム*

亀山建太郎[†]・大住 晃[†]

Prediction of Linear Time-varying Stochastic Systems based on the Subspace Identification Method and its Recursive Algorithm*

Kentaro KAMEYAMA[†] and Akira OHSUMI[†]

In this paper, a prediction method is newly proposed for time-varying stochastic linear systems in the subspace identification framework. The key to this subspace-based prediction is to regard the change of the extended observability matrix yielded by the time-varying parameters of system as the rotation of the principal vectors that span the basis of the signal subspace. The rotation rate is evaluated from the angle between the past and current signal subspaces, and the future signal subspace is predicted by rotating the current subspace. A recursive algorithm is derived and its efficacy is tested by simulation experiments.

1. 緒言

90年代初頭に提案された部分空間同定法は、実験によって得られる同定対象の入出力データに基づいて、最小2乗法などにより伝達関数モデルのパラメータを推定するというそれまでのモデリング法に対して、入出力データから構成される代数関係式から、LQ分解と特異値分解を用いて、複雑な最適化計算を行うことなしに多入力多出力システムの次元をも含めた同定を行うという新しいシステム同定法である[1-3]。このシステム同定法は、ここ数十年來活発な研究が行われてきている。当初提案された部分空間同定法は線形離散時間時不変システムに対するものであり、これを連続時間システム[4,5]や非線形性を有するシステム[6]、あるいは部分空間同定アルゴリズムの逐次化[7-12]や時変システムへの適用[13]、さらにシステム変化の検出[14]や実在システムへの応用[15]など多岐にわたっており、部分空間法の予測制御への応用についても関心が高まってきている[16,17]。

とりわけ制御応用においては、対象とするシステムが時不変であれば、同定値が安定する値を用いてシステム同定が完了し、その値をもって制御を行えばよいが、シ

ステムが時変である場合にはシステムマトリクスがどのように変化していくのかを逐次同定し、さらに高精度の制御を必要とするならば、システムの予測が必要となる。たとえば、近年研究対象となっている複雑な化学プラントなどの予測制御に、システムパラメータの変動を考慮しない従来の部分空間同定法をそのまま適用する[17]のは適切でないのは明らかであり、当然システムの予測という観点からそのような問題をとらえなければならないと思われる。本研究は、この予測制御への適用をその最終的な目的として部分空間同定法のシステム予測への拡張を目指すものである。

2. 問題の定式化

対象とするシステムに対しては入出力データ $\{u_k, v_k\}$ のみが観測可能であり、その数学モデルは線形時変状態空間モデル

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + w_k \quad (1)$$

$$y_k = C_k x_k + D_k u_k + v_k \quad (2)$$

で表すことができるとする。ここで $u_k \in R^m$, $y_k \in R^\ell$ と $x_k \in R^n$ はそれぞれ入力、出力および状態ベクトルであり、 $w_k \in R^n$ と $v_k \in R^\ell$ は平均零、共分散行列が

$$\mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_s^T & v_s^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \delta_{ks} \quad (\delta_{ks}: \text{クロネッカデルタ})$$

* 原稿受付 2005年4月7日

[†] 京都工芸繊維大学 大学院 工芸科学研究科 Department of Mechanical & System Engineering, Graduate School of Science and Technology, Kyoto Institute of Technology; Matsugasaki, Sakyo, Kyoto 606-8585, JAPAN

Key Words: prediction, subspace identification, recursive algorithm, stochastic system, time-varying system.

で与えられる正規性白色雑音とする。ただし、次元 n は既知であり、マトリクス Q, S, R は定数とする。本モデルにおける未知パラメータは、システムマトリクス (A_k, B_k, C_k, D_k) である。

k_1, k_2 ($k_1 < k_2$) をそれぞれ過去のある時点および現在時点とし、 k_1, k_2 よりそれぞれ $N + \alpha - 2$ 時点過去にさかのぼった時間区間 $[k_1 - N - \alpha + 2, k_1]$ および $[k_2 - N - \alpha + 2, k_2]$ 内に得られている入出力データによりブロックハンケルマトリクス

$$Y_\alpha(k_\nu | k_\nu - N + 1) = \begin{bmatrix} y_{k_\nu - N - \alpha + 2} & y_{k_\nu - N - \alpha + 3} & \cdots & y_{k_\nu - \alpha + 1} \\ y_{k_\nu - N - \alpha + 3} & y_{k_\nu - N - \alpha + 4} & \cdots & y_{k_\nu - \alpha + 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k_\nu - N + 1} & y_{k_\nu - N + 2} & \cdots & y_{k_\nu} \end{bmatrix} \in R^{\alpha \ell \times N} \quad (\nu = 1, 2)$$

を構成する。 α と N はそれぞれブロック行数、ブロック列数である。 $Y_\alpha(k_1 | k_1 - N + 1)$ と $Y_\alpha(k_2 | k_2 - N + 1)$ は一部そのデータが重複しても理論的には何ら問題はない。

このとき、システムマトリクス (A_k, B_k, C_k, D_k) の変化は緩やかで突発的な変化をしないという仮定 (quasi-stationarity assumption) [11-13] のもとで部分空間同定法の基礎となる入出力代数方程式は

$$\begin{aligned} Y_\alpha(k_\nu | k_\nu - N + 1) &= \Gamma_\alpha(k_\nu) X_\alpha(k_\nu | k_\nu - N + 1) \\ &+ H_\alpha(k_\nu) U_\alpha(k_\nu | k_\nu - N + 1) \\ &+ \Sigma_\alpha(k_\nu) W_\alpha(k_\nu | k_\nu - N + 1) \\ &+ V_\alpha(k_\nu | k_\nu - N + 1) \quad (\nu = 1, 2) \end{aligned} \quad (3)$$

と得ることができる。ここで $\Gamma_\alpha(\cdot) \in R^{\alpha \ell \times n}$ は拡大可観測マトリクス、 $H_\alpha(\cdot)$ と $\Sigma_\alpha(\cdot)$ はシステムマトリクス (A_k, B_k, C_k, D_k) から構成される下三角ブロックマトリクスである。すなわち

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha(k_\nu) &= \begin{bmatrix} C_{k_\nu}^T & (C_{k_\nu} A_{k_\nu})^T & \cdots & (C_{k_\nu} A_{k_\nu}^{\alpha-1})^T \end{bmatrix}^T \\ H_\alpha(k_\nu) &= \begin{bmatrix} D_{k_\nu} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{k_\nu} B_{k_\nu} & D_{k_\nu} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{k_\nu} A_{k_\nu}^{\alpha-2} B_{k_\nu} & C_{k_\nu} A_{k_\nu}^{\alpha-3} B_{k_\nu} & \cdots & D_{k_\nu} \end{bmatrix} \\ \Sigma_\alpha(k_\nu) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_{k_\nu} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{k_\nu} A_{k_\nu} & C_{k_\nu} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{k_\nu} A_{k_\nu}^{\alpha-2} & C_{k_\nu} A_{k_\nu}^{\alpha-3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

また $X_\alpha(\cdot | \cdot) \in R^{n \times N}$ は状態量から構成されるマトリクス、 $U_\alpha(\cdot | \cdot) \in R^{\alpha m \times N}$ 、 $W_\alpha(\cdot | \cdot) \in R^{\alpha n \times N}$ 、 $V_\alpha(\cdot | \cdot) \in R^{\alpha \ell \times N}$

$R^{\alpha \ell \times N}$ はそれぞれ $Y_\alpha(\cdot | \cdot)$ と同じ構造をもつ、入力、システム雑音、観測雑音から構成されるマトリクスである [1-3]。

本論文の目的は、現在時刻 k_2 までの入出力データに基づき、未来のある時点 k_3 ($k_2 < k_3$) の未知パラメータ $(A_{k_3}, B_{k_3}, C_{k_3}, D_{k_3})$ を予測するアルゴリズムを導出することであるが、部分空間同定アルゴリズムは、まず入出力データ $\{u_k, y_k\}$ より構成されるデータマトリクス Y_α, U_α より、拡大可観測マトリクス $\Gamma_\alpha(k_\nu)$ の列ベクトルの張る空間 $\text{span}_{\text{col}}\{\Gamma_\alpha(k_\nu)\}$ (これを信号部分空間とよぶ [9]) を同定し、その結果を用いて各未知パラメータを同定するアルゴリズムである点に注目すると、未知パラメータの予測という目的は、信号部分空間の予測という問題に置き換えることができる。一方、時変パラメータの変化に伴い拡大可観測マトリクス $\Gamma_\alpha(k_\nu)$ は変化するが、その時間変化を信号部分空間 $\text{span}_{\text{col}}\{\Gamma_\alpha(k_\nu)\}$ の基底の回転ととらえることができるので、過去の信号部分空間 $\text{span}_{\text{col}}\{\Gamma_\alpha(k_1)\}$ と現在のそれ $\text{span}_{\text{col}}\{\Gamma_\alpha(k_2)\}$ の関係から信号部分空間の回転速度を求めることにより、未来のある時点 k_3 の信号部分空間 $\text{span}_{\text{col}}\{\Gamma_\alpha(k_3)\}$ を予測することが可能となる。

以上より、部分空間予測アルゴリズムはつぎのように定式化することができる：

- (i) 現在時刻 k_2 までの入出力データを観測し、
- (ii) 現在の信号部分空間 $\text{span}_{\text{col}}\{\Gamma_\alpha(k_2)\}$ を同定する。
- (iii) 蓄積しておいた過去の信号部分空間 $\text{span}_{\text{col}}\{\Gamma_\alpha(k_1)\}$ との関係から信号部分空間の回転速度を計算し、
- (iv) それらの結果を用いて未来の信号部分空間 $\text{span}_{\text{col}}\{\Gamma_\alpha(k_3)\}$ を予測する。

(1)-(2) 式に含まれる未知システムマトリクスは信号部分空間より従来の部分空間法を用いて求めることができる。

本論文で提案する予測手法自体はオフラインアルゴリズムであるが、対象とするシステムが時変であることと、さらに予測制御をも指向する際にはオンライン同定に適した逐次アルゴリズムが望まれることからその導出も行う。

3. 部分空間の間の角度とその回転

3.1 部分空間の間の角度

本論文では未来の信号部分空間の予測を行うために現在と過去の信号部分空間の間に定義される角度という概念を用いる。本節では、一般的なマトリクスの列ベクトルにより張られる部分空間の間の角度の定義を行う [2, 18]。

各マトリクスの階数が $\text{rank} A = a_d$ 、 $\text{rank} B = b_d$ である $A \in R^{p \times r}$ と $B \in R^{q \times r}$ を考える。このとき、 $\text{span}_{\text{col}}\{A\}$ と $\text{span}_{\text{col}}\{B\}$ の間の角度は、それぞれの部分空間の基底をなす主ベクトル $a_i \in \text{span}_{\text{col}}\{A\}$ ($i = 1, 2, \dots, a_d$)、 $b_j \in \text{span}_{\text{col}}\{B\}$ ($j = 1, 2, \dots, b_d$) のうち、ベクトル a_i, b_j 間の

角度 θ_i ($i=1,2,\dots,a_d \wedge b_d$, $0 \leq \theta_i < \pi/2$) の組 $\{a_i, b_i, \theta_i\}$ により定義される. ここで $a_d \wedge b_d = \min(a_d, b_d)$ である.

定義: マトリクス $A \in R^{p \times r}$, $B \in R^{q \times r}$ それぞれの列ベクトルの張る部分空間の単位ベクトル a_1, b_1 を, それらの間の角度 θ_1 が最小になるように選ぶ. つぎに 2 組目の単位ベクトルの組 (a_2, b_2) を, それぞれが a_1 と b_1 に直交し, かつベクトル間の角度 θ_2 が最小になるように選ぶ. 以上の手順を $a_d \wedge b_d$ 回繰り返す, 主ベクトル $\{a_1, \dots, a_{a_d \wedge b_d}\}$, $\{b_1, \dots, b_{a_d \wedge b_d}\}$ とベクトル $\{a_i, b_i\}$ 間の角度 $\theta_i \in [0, \pi/2)$ を得る. これらをそれぞれの部分空間の主ベクトルと主角とよび, $\text{span}_{\text{col}}\{A\}$ と $\text{span}_{\text{col}}\{B\}$ 間に定義される部分空間の角度を $\{a_i, b_i, \theta_i\}$ ($i=1, \dots, a_d \wedge b_d$) により定義する. $\square$

以上の定義による二つの部分空間の間の角度は特異値分解

$$A(A^T A)^{\dagger} A^T B(B^T B)^{\dagger} B^T = U S V^T \quad (4)$$

により計算することができる. ここで $U \in R^{p \times p}$ と $V \in R^{q \times q}$ は正規直交マトリクス, $S \in R^{p \times q}$ は特異値 σ_i ($i=1, \dots, a_d \wedge b_d$) を対角要素に持つマトリクス, また $\dagger$ はムーア・ペンローズの擬似逆マトリクスであり, $\text{span}_{\text{col}}\{A\}$ の主ベクトル $u_j \in R^p$ ($j=1, \dots, a_d$) は $U(:, 1:a_d)$ の各列ベクトルである (記号 $U(a:b, c:d)$ はマトリクス U の第 a 行から第 b 行と第 c 列から第 d 列までの要素を意味し, $U(:, c:d)$ は U の c 列から d 列のすべての行要素を意味する). 同様に, $\text{span}_{\text{col}}\{B\}$ の主ベクトル $v_j \in R^q$ ($j=1, 2, \dots, b_d$) も $V(:, 1:b_d)$ の各列ベクトルである. また, 主角 θ_i は特異値 σ_i との関係

$$\sigma_i = \cos \theta_i \quad (i=1, 2, \dots, a_d \wedge b_d) \quad (5)$$

より求めることができる.

3.2 部分空間の回転

本節では, 3.1 節で定義した二つの部分空間の間の角度を用いて部分空間の回転を定義するが, この場合, 部分空間 $\text{span}_{\text{col}}\{A\}$ を回転させて $\text{span}_{\text{col}}\{B\}$ とするので, 任意の二つの部分空間の間の角度を求める場合とは異なり, マトリクスのサイズと階数は一定と考えるのが適切である. よって本節では, $p=q$ かつ $a_d=b_d$ の場合について考える. また, 前節において部分空間の間の角度は各主ベクトル間の角度の集合により定義されることを述べたが, 部分空間の回転もまた主ベクトルの回転の集合により定式化される. 各主ベクトルの関係を回転作用素 $\mathcal{R}_{\theta_i}$ を用い, $v_i = \mathcal{R}_{\theta_i} u_i$ と表すとする, $\mathcal{R}_{\theta_i}$ はつぎの手順により求めることができる.

まず, 主ベクトル $u_i = [u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ip}]^T$ と $v_i = [v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ip}]^T$ の回転平面を考え, その正規直交基底を

$$e_{i1} := \frac{u_i}{\|u_i\|^2} \quad (6)$$

$$e_{i2} := \frac{v_i - \langle v_i, e_{i1} \rangle e_{i1}}{\|v_i - \langle v_i, e_{i1} \rangle e_{i1}\|^2} \quad (7)$$

と定義する. ここで $\langle a, b \rangle$ は a と b の内積 $a^T b$ を表す. 残りの基底ベクトル $e_{ij} \in R^p$ ($j=3, \dots, p$) は条件

$$e_{ij} e_{ik}^T = I_p \delta_{jk} \quad (j, k=1, 2, \dots, p) \quad (8)$$

を満たすように任意に選ぶことができる ($I_p \in R^{p \times p}$: 単位マトリクス). すなわち $\{e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}, \dots, e_{ip}\}$ は R^p 次元ベクトル空間の正規直交基底をなし, $\{e_{i1}, e_{i2}\}$ は R^p に含まれる回転平面の正規直交基底である. これらの基底を用いると, u_i と v_i はそれぞれ

$$\begin{aligned} u_i &= a_{i1} e_{i1} + a_{i2} e_{i2} + \dots + a_{ip} e_{ip} \\ &= a_{i1} e_{i1} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} v_i &= b_{i1} e_{i1} + b_{i2} e_{i2} + \dots + b_{ip} e_{ip} \\ &= b_{i1} e_{i1} + b_{i2} e_{i2} \end{aligned} \quad (10)$$

と表現できる. ただし $a_{ij} = \langle u_i, e_{ij} \rangle$, $b_{ij} = \langle v_i, e_{ij} \rangle$ ($j=1, 2, \dots, p$), $a_{i2} = \dots = a_{ip} = 0$, $b_{i3} = \dots = b_{ip} = 0$ である. また a_{ij} と b_{ij} ($j=1, 2$) の関係は

$$\begin{bmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

であり, (9), (11) 式を (10) 式に代入すると

$$\begin{aligned} v_i &= \begin{bmatrix} e_{i1} & e_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_{i1} & e_{i2} & e_{i3} & \dots & e_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & \dots & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ \vdots \\ a_{ip} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_{i1} & e_{i2} & e_{i3} & \dots & e_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & \dots & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{i1}^T \\ e_{i2}^T \\ e_{i3}^T \\ \vdots \\ e_{ip}^T \end{bmatrix} u_i \\ &=: \mathcal{R}_{\theta_i} u_i \end{aligned} \quad (12)$$

の関係をj得る. よってこれを用いると $\text{span}_{\text{col}}\{B\}$ と $\text{span}_{\text{col}}\{A\}$ の関係は

$$\text{span}_{\text{col}}\{[v_1 \dots v_{a_d}]\} = \text{span}_{\text{col}}\{[\mathcal{R}_{\theta_1} u_1 \dots \mathcal{R}_{\theta_{a_d}} u_{a_d}]\} \quad (13)$$

と表すことができる.

4. 部分空間の予測

4.1 部分空間予測アルゴリズム

k_1, k_2, k_3 をそれぞれ過去, 現在, そして未来のある時点 ($k_1 < k_2 < k_3$) とし, k_2 までの入出力データが観測されている状況において, システムマトリクス (A_k, B_k, C_k, D_k) の時刻 k_3 における予測値を求める. 時刻 $k = k_\nu$ ($\nu = 1, 2$) における拡大可観測マトリクス

$$\Gamma_\alpha(k_\nu) = \begin{bmatrix} C_{k_\nu}^T & (C_{k_\nu} A_{k_\nu})^T & \cdots & (C_{k_\nu} A_{k_\nu}^{\alpha-1})^T \end{bmatrix}^T \quad (\nu = 1, 2) \quad (14)$$

は入出力データより同定することができる. 一方, これらのマトリクスを

$$\Gamma_\alpha(k_\nu) = [\gamma_1(k_\nu) \ \gamma_2(k_\nu) \ \cdots \ \gamma_n(k_\nu)] \quad (15)$$

と列ベクトル $\{\gamma_1(k_\nu), \dots, \gamma_n(k_\nu)\}$ により記述し, これらを基底とする信号部分空間 $\text{span}_{\text{col}}\{\Gamma_\alpha(k_\nu)\}$ を考えると, $\Gamma_\alpha(k_\nu)$ は時変パラメータより構成されているため時間とともに変化するので, (15) 式よりこの変化を信号部分空間の基底をなす主ベクトル $\{\gamma_1(k_\nu), \dots, \gamma_n(k_\nu)\}$ の回転とみなすことができる. すなわち $\gamma_i(\cdot) \in R^{\alpha\ell}$ より, 過去と現在の信号部分空間 $\Gamma_\alpha(k_1), \Gamma_\alpha(k_2)$ の違いは, 時間間隔 $[k_1, k_2]$ における $\alpha\ell$ 次元ベクトル空間における n 次元信号部分空間の回転と考えることができる.

さて, $\text{span}_{\text{col}}\{\Gamma_\alpha(k_1)\}$ と $\text{span}_{\text{col}}\{\Gamma_\alpha(k_2)\}$ の関係は, 特異値分解

$$\begin{aligned} & \Gamma_\alpha(k_1) \{ \Gamma_\alpha^T(k_1) \Gamma_\alpha(k_1) \}^\dagger \Gamma_\alpha^T(k_1) \\ & \cdot \Gamma_\alpha(k_2) \{ \Gamma_\alpha^T(k_2) \Gamma_\alpha(k_2) \}^\dagger \Gamma_\alpha^T(k_2) \\ & = U(k_1) S(k_1|k_2) V^T(k_2) \end{aligned} \quad (16)$$

により求まる主ベクトル

$$\begin{aligned} U(k_1)(:, 1:n) &= [\gamma_1(k_1) \ \cdots \ \gamma_n(k_1)] \\ V(k_2)(:, 1:n) &= [\gamma_1(k_2) \ \cdots \ \gamma_n(k_2)] \end{aligned}$$

と, 特異値 $\{\sigma_i(k_2|k_1)\}$ との関係

$$\sigma_i(k_2|k_1) = \cos \theta_i(k_2|k_1) \quad (17)$$

より求まる回転角度 $\{\theta_i(k_2|k_1)\}$ ($i = 1, \dots, n$) を (12) および (13) 式に適用することにより記述できる. 時間差 $k_2 - k_1$ については, つぎのことに留意する必要がある. すなわち, 特異値分解により得られるベクトルと相対角度のすべての組 $(\gamma_i(k_1), \gamma_i(k_2), \theta_i(k_2|k_1))$ が, “ベクトル $\gamma_i(k_1)$ が $k_2 - k_1$ 時間内で $\theta_i(k_2|k_1)$ 回転して $\gamma_i(k_2)$ になった” という意味をもつように, 時間差 $k_2 - k_1$ を $\gamma_i(k_1)$ と $\gamma_i(k_2)$ との間の角度 $\theta_{ji}(k_2|k_1)$ ($i \neq j$) に対して $\theta_i(k_2|k_1) < \theta_{ji}(k_2|k_1)$ となるように十分小さくとる.

ここで, 時間間隔 $[k_1, k_3]$ における回転速度が一定であると仮定すれば, 時間間隔 $[k_2, k_3]$ における主ベクトル

ルの回転角度は

$$\hat{\theta}_i(k_3|k_2) = \Delta \theta_i(k_2|k_1)(k_3 - k_2) \quad (18)$$

で与えられる. ここで, $\Delta \theta_i(k_2|k_1)$ は回転速度

$$\Delta \theta_i(k_2|k_1) = \frac{\theta_i(k_2|k_1)}{k_2 - k_1} + o(k_3 - k_2) \quad [\text{rad/step}] \quad (19)$$

であり, $o(k_3 - k_2)$ は高次の誤差項である.

さらに, 回転が同一平面内で行われているという仮定のもとで $\gamma_i(k_3)$ の予測値を

$$\hat{\gamma}_i(k_3|k_2) = \mathcal{R}_{\hat{\theta}_i(k_3|k_2)} \gamma_i(k_2) \quad (20)$$

として求めることができる. したがって, これより信号部分空間の予測値を

$$\begin{aligned} & \text{span}_{\text{col}}\{\hat{\Gamma}_\alpha(k_3|k_2)\} \\ & = \text{span}_{\text{col}}\{[\hat{\gamma}_1(k_3|k_2) \ \cdots \ \hat{\gamma}_n(k_3|k_2)]\} \end{aligned} \quad (21)$$

と得る.

よって, この予測された拡大可観測マトリクスに従来の部分空間同定法 [1-3] を適用すれば, 時刻 $k = k_3$ におけるシステムマトリクス (A_k, B_k, C_k, D_k) が同定できる.

4.2 高次微分を考慮した予測アルゴリズム

前節では, 各主ベクトルの回転が一定であるとして部分空間予測アルゴリズムを導出した. この仮定は主ベクトルの回転速度の変化が小さいシステムに対しては適切であるが, 回転速度が変動する場合もあろう. そのようなシステムへの対処法として, 回転速度の高次の導関数が一定であるという仮定も意味を持つ. 一例として, 回転加速度が一定とした場合について述べる.

この場合には, 4 時刻 $k_0 < k_1 < k_2 < k_3$ を考える. われわれの目的は現在時刻 k_2 までの入出力データを用いて $\Gamma_i(k_3)$ を予測することであるが, これは $[k_2, k_3]$ における回転角度 $\theta_i(k_3|k_2)$ の予測にほかならない. 仮定より, 時間間隔 $[k_0, k_2]$ と $[k_1, k_3]$ それぞれにおける角加速度が等しい, すなわち関係式

$$\frac{\Delta \theta_i(k_2|k_1) - \Delta \theta_i(k_1|k_0)}{\Delta k} = \frac{\Delta \hat{\theta}_i(k_3|k_2) - \Delta \theta_i(k_2|k_1)}{(k_3 - k_2)/2 + \Delta k/2} \quad (22)$$

が成り立つので, これを $\hat{\theta}_i(k_3|k_2)$ について解き

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_i(k_3|k_2) &= \frac{\theta_i(k_2|k_1)}{2} \left\{ \left(\frac{k_3 - k_2}{\Delta k} \right)^2 + 3 \left(\frac{k_3 - k_2}{\Delta k} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{\theta_i(k_1|k_0)}{2} \left\{ \left(\frac{k_3 - k_2}{\Delta k} \right)^2 + \left(\frac{k_3 - k_2}{\Delta k} \right) \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

を得る. ここに, $\Delta k = k_2 - k_1 = k_1 - k_0$ である. これを (12) 式と (13) 式に適用することにより, 信号部分空間の

予測値 $\hat{\Gamma}_i(k_3)$ を得る.

5. 部分空間同定アルゴリズムの逐次化

4章で述べた予測手法は、あらかじめ求めておいた過去と現在の信号部分空間の二つの推定値 $\hat{\Gamma}_\alpha(k_\nu)$ ($\nu=1,2$) を用いて未来の信号部分空間を求めるオフラインアルゴリズムであるが、対象とするシステムが時変であることから逐次的に予測するアルゴリズムが望まれる. 何よりも予測制御を指向する際には、計算機の記憶容量などの観点からもそのようなアルゴリズムが強く望まれる. 実際、逐次化しない部分空間予測アルゴリズムでは、現在時刻の信号部分空間の推定と、過去と現在の信号部分空間の間の角度を求める際に特異値分解が2度必要となり冗長である.

本章では、逐次予測アルゴリズムを著者らが提案している逐次部分空間同定アルゴリズム [11,12] の考え方を using 導出する. まず、マトリクスの LQ 分解

$$\begin{bmatrix} U_\alpha(k_2|k_2-N+1) \\ U_\beta(k_2|k_2-N+1) \\ Y_\alpha(k_2|k_2-N+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}(k_2) & 0 & 0 \\ L_{21}(k_2) & L_{22}(k_2) & 0 \\ L_{31}(k_2) & L_{32}(k_2) & L_{33}(k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T(k_2) \\ Q_2^T(k_2) \\ Q_3^T(k_2) \end{bmatrix} \quad (24)$$

を考える. ここで $U_\beta(\cdot|\cdot)$ は $Y_\alpha(\cdot|\cdot)$ と同様の構造を持ち、過去の入力データから構成された補助変数マトリクスである (付録 1 参照). $L_{32}(k_2)L_{32}^T(k_2)$ は入出力データ量を固定した逐次部分空間同定アルゴリズム [11,12] (付録 1 参照) により更新され、 $\text{span}_{\text{col}}\{\Gamma_\alpha(k_2)\} \subset \text{span}_{\text{col}}\{L_{32}(k_2)L_{32}^T(k_2)\}$ であるが、 $L_{32}(k_2)L_{32}^T(k_2)$ は雑音の影響により数値的に正則となるため、このまま (16) 式に用いることはできない. そこで、つぎの手順により信号部分空間を再構成する.

まず、 $L_{32}(k_2)$ と $L_{32}(k_2)L_{32}^T(k_2)$ を

$$\begin{aligned} L_{32}(k_2) &= [s_1(k_2) \ s_2(k_2) \ \cdots \ s_{\alpha\ell}(k_2)] \\ L_{32}(k_2)L_{32}^T(k_2) &= [h_1(k_2) \ h_2(k_2) \ \cdots \ h_{\alpha\ell}(k_2)] \end{aligned}$$

と列ベクトルにより記述する. さらに、 $f_{ij}(\cdot)$ を $L_{32}^T(k_2)$ の第 (i,j) 要素とすると $L_{32}(k_2)L_{32}^T(k_2)$ の列ベクトルは

$$\begin{aligned} h_j(k_2) &= f_{1j}(k_2)s_1(k_2) + f_{2j}(k_2)s_2(k_2) + \cdots \\ &\quad + f_{\alpha\ell j}(k_2)s_{\alpha\ell}(k_2) \quad (j=1, \dots, \alpha\ell) \end{aligned} \quad (25)$$

と表現できる. このとき $h_j(k_2)$ ($j=1,2,\dots,\alpha\ell$) より n 本の列ベクトルを任意に選び、マトリクス

$$L_b(k_2) = [h_i(k_2), \dots, h_j(k_2)] \in R^{\alpha\ell \times n} \quad (i \neq j) \quad (26)$$

を構成すると、定義より $L_b(k_2)$ は

$$\begin{aligned} \text{span}_{\text{col}}\{\Gamma_\alpha(k_2)\} &\subset \text{span}_{\text{col}}\{L_b(k_2)\} \\ &\subset \text{span}_{\text{col}}\{L_{32}(k_2)L_{32}^T(k_2)\} \end{aligned} \quad (27)$$

を満たすので、 $\text{span}_{\text{col}}\{\Gamma_\alpha(k_1)\}$ と $\text{span}_{\text{col}}\{\Gamma_\alpha(k_2)\}$ の角度は、時刻 k_1 と k_2 の部分空間のなす角度が $\theta_i(k_2|k_1) < \pi/4$ である限りは、 $\Gamma_\alpha(k_1)$ と $L_b(k_2)$ を用いて

$$\begin{aligned} &\hat{\Gamma}_\alpha(k_1)\{\hat{\Gamma}_\alpha^T(k_1)\hat{\Gamma}_\alpha(k_1)\}^\dagger \hat{\Gamma}_\alpha^T(k_1) \\ &\quad \cdot L_b(k_2)\{L_b^T(k_2)L_b(k_2)\}^\dagger L_b^T(k_2) \\ &= U(k_1)S(k_1|k_2)V^T(k_2) \end{aligned} \quad (28)$$

と計算することができる (付録 2). 以上の考え方により、逐次部分空間予測アルゴリズムは以下のようにまとめられる:

[逐次部分空間予測アルゴリズム]

Step 1 入出力データ $\{u(k_2), y(k_2)\}$ を観測し、逐次部分空間同定アルゴリズム (付録 1) に基づき $L_{32}(k_2) \cdot L_{32}^T(k_2)$ を更新する.

Step 2 $L_b(k_2)$ を構成し、特異値分解 (28) により部分空間の間の角度を求める.

Step 3 4章で示した部分空間予測法により、未来の信号部分空間 $\hat{\Gamma}_\alpha(k_3)$ を予測する.

Step 4 $\hat{\Gamma}_\alpha(\cdot)$ を用いて $(A_{k_3}, B_{k_3}, C_{k_3}, D_{k_3})$ を導出する.

Step 5 $k_2 \rightarrow k_2+1$ として Step 1 に戻る.

Step 4 については、文献 [1-3] を参照されたい.

6. 数値例

システムマトリクスが

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sin(2\pi k/a), & 0.5 + \sin(\pi k/2a) \\ -0.5 - \sin(\pi k/2a), & \sin(\pi k/a) \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 2.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}, \quad C = [1.0, 2.0], \quad D = 1.5 \end{aligned}$$

である 1 入力 1 出力 2 次元の線形離散時間時変システムを対象とした数値例により、提案アルゴリズムの性質と有効性の検証を行う. 入力 u_k は平均零、分散が $\mathcal{E}\{u_k u_s^T\} = \delta_{ks}$, 雑音 w_k と v_k は平均零、分散が $\mathcal{E}\{w_k w_s^T\} = \mathcal{E}\{v_k v_s^T\} = 0.1^2 \delta_{ks}$ の正規性白色雑音であり、観測データマトリクスのブロック行数は $\alpha = \beta = 5$ としている. また、(26) 式の $L_b(k_2)$ の構成にあたっては、その要素ベクトル $h_j(k_2)$ として最初の n 個のベクトル $\{h_j(k_2), j=1,2,\dots,n\}$ を用いた.

まず上記システムにおいて $a=1000$ とし、1 回の同定に用いるデータ幅を $N=75$, 予測ステップ数を $L(=k_3-k_2)=50$ とした場合の予測結果を Fig. 1 に示す. システム極の実部 (上図), および虚部 (下図) の真値を破線で、また予測値を一点鎖線で示した. 十分な観測データが得られない初期の区間では予測値と真値のずれが見られるが、その後は実部、虚部のいずれも予測

Fig. 1 Time evolutions of real (top) and imaginary (bottom) parts of predicted conjugate poles ($N=75, L=50$ (50-step ahead prediction))

Fig. 2 Sample mean (top) and variance (bottom) of the real part of predicted conjugate poles ($N=75, L=0$ (Estimation))

値は真値の軌跡とよくあっている。

予測がどの程度首尾よく行われるかをみるために、Fig. 1 の場合と同一条件で、予測ステップ数 L のみを、 $L=0$ (この場合は推定値に相当)、 $L=50$ 、 $L=100$ としてシミュレーションを行い、それぞれの 50 回の試行平均の結果を Figs. 2-4 に示した。いずれの図においても上図が予測値のサンプル平均値、下図がサンプル分散値である。これらの図から、 L を大きく設定しても分散が著しく増大するということはなく、提案アルゴリズムにより

Fig. 3 Sample mean (top) and variance (bottom) of the real part of predicted conjugate poles ($N=75, L=50$ (50-step ahead prediction))

Fig. 4 Sample mean (top) and variance (bottom) of the real part of predicted conjugate poles ($N=75, L=100$ (100-step ahead prediction))

良い予測値が得られているということが出来る。

つぎに、信号部分空間の回転速度を一定と仮定したアルゴリズム (§4.1) と、その加速度を一定と仮定したアルゴリズム (§4.2) の比較を行った。Fig. 5 および Fig. 6 に $N=100$ とし、予測ステップ数を $L=0$ と $L=150$ とした場合のシステム極の実部の予測値を、回転速度一定とした場合の結果を一点鎖線で、回転加速度一定とした場合のそれを点線で、また真値の軌跡を破線で示している。これらの図より、同じシステムを対象とした場合、シス

Fig. 5 Sample mean (top) and variance (bottom) of the real part of predicted conjugate poles ($N=100$, $L=0$ (Estimation))

Fig. 6 Sample mean (top) and variance (bottom) of the real part of predicted conjugate poles ($N=100$, $L=150$ (150-step ahead prediction))

テムの変化の激しい時間区間 ($k=500, 1500$ 周辺) では、予測ステップ数が増大すると多少分散は増大するものの、平均としてはより真値に近い値が得られることがわかる。また、Figs. 7 および 8 には $N=100$, $L=150$ とし、 $a=1000$ と $a=500$ の二つの場合について比較を行い、変化の速いシステムにおける効果を検証した。これらの結果より、加速度が一定であるとして導出したアルゴリズムは、変化の速いシステムの予測に有効であり、さらに予測ステップ数も大きく取れることがわかる。

Fig. 7 Sample mean (top) and variance (bottom) of the real part of predicted conjugate poles ($N=100$, $L=150$ (150-step ahead prediction))

Fig. 8 Sample mean (top) and variance (bottom) of the real part of predicted conjugate poles ($N=100$, $L=150$ (150-step ahead prediction))

7. 結言

本論文では、時変システムの未知パラメータの予測を行うアルゴリズムについて提案し、その有効性を数値例により検討した。提案したシステム予測法は、過去と現在の二つの観測データの張る信号部分空間の間の角度を用いて信号部分空間の回転を行う幾何学的手法であり、直観的である。システム予測は、予測制御には欠かせない技術になるであろうことを予想して、その逐次アルゴリズムの導出を行い、その特性と有効性を数値例により

確認した。

本論文で述べた予測同定法は、拡大可観測マトリクスを予測するというアイデアに基づいたものであり、それによってシステムマトリクス (A_k, C_k) の予測値は得られるが、システムマトリクス (B_k, D_k) については厳密には予測値とはなっていない。この点さらに (B_k, D_k) を積極的に予測する方法の開発が望まれる。

なお、本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金 (B)-16360046 の援助によって実施されたことを付記し、謝意を表す。

参考文献

- [1] M. Verhaegen and P. Dewilde: Subspace model identification, Part 1: The output-error state-space model identification class of algorithms; *Int. J. Control*, Vol. 56, No. 5, pp. 1187–1210 (1992)
- [2] P. Van Overschee and B. De Moor: *Subspace System Identification for Linear Systems*, Kluwer Academic Pub. (1996)
- [3] 片山: システム同定～部分空間法からのアプローチ～, 朝倉書店 (2004)
- [4] 大住, 亀山, 山口: 超関数の概念を用いた連続時間確率システムの部分空間同定法; システム制御情報学会論文誌, Vol. 13, No. 7 pp. 338–345 (2000)
- [5] A. Ohsumi, K. Kameyama and K. Yamaguchi: Subspace identification for continuous-time stochastic systems via distribution-based approach, *Automatica*, Vol. 38, No. 1, pp. 63–79 (2002)
- [6] M. Lovera, T. Gustafsson and M. Verhaegen: Recursive subspace identification of linear and non-linear Wiener state-space models; *Automatica*, Vol. 36, No. 11, pp. 1639–1650 (2000)
- [7] T. Gustafsson: Recursive system identification using instrumental variable subspace tracking; *Proc. 11th IFAC Symp. System Identification (SYSID'97)*, pp. 1683–1688 (1997)
- [8] Y. M. Cho, G. Xu and T. Kailath: Fast recursive identification of state space models via exploitation of displacement structure, *Automatica*, Vol. 30, No. 1, pp. 45–59 (1994)
- [9] H. Oku and H. Kimura: Recursive 4SID algorithms using gradient type subspace tracking; *Automatica*, Vol. 38, No. 6, pp. 1035–1043 (2002)
- [10] Y. Takei, J. Imai and K. Wada: Recursive subspace identification based on subspace extraction via Schur complement; *Proc. 32nd ISCIE Int. Symp. Stochastic System Theory and Its Applications*, pp. 27–32 (2000)
- [11] 亀山, 松浦, 大住: 入出力データ量を固定した逐次部分空間同定アルゴリズム; システム制御情報学会論文誌, Vol. 17, No. 12, pp. 517–527 (2004)
- [12] K. Kameyama, A. Ohsumi, Y. Matsuiura and K. Sawada: Recursive 4SID-based identification algorithm with fixed input-output data size; *Int. J. Innovational Computing & Information Control*, Vol. 1, No. 1, pp. 17–33 (2005)
- [13] A. Ohsumi and T. Kawano: Subspace identification for a class of time-varying continuous-time stochastic systems via distribution-based approach; *Proc. 15th IFAC World Congress*, Vol. F, pp. 241–246 (2002)
- [14] 奥: 逐次部分空間同定を使った変化検出法; システム制御情報学会論文誌, Vol. 17, No. 11, pp. 506–513 (2004)
- [15] M. Abdelghani, M. Verhaegen, P. Van. Overschee and B. De. Moor, Comparison study of subspace identification methods applied to flexible structures, *Mechanical System and Signal Processing*, Vol. 12, No. 5, pp. 679–692 (1998)
- [16] W. Favoreel, B. De Moor and M. Gevers: SPC: Subspace predictive control; *Proc. 14th IFAC World Congress*, pp. 235–240 (1999)
- [17] W. Favoreel, B. De Moor and P. Van Overschee: Subspace state space system identification for industrial processes; *J. Process Control*, Vol. 10, Nos. 2–3, pp. 149–155 (2000)
- [18] G. H. Golub and C. F. Van Loan: *Matrix Computations*, Second Edition, John Hopkins Univ. Press (1996)

付 録

付録 1. 逐次アルゴリズム

現在時刻 $k_2 = k+1$ において入出力データ $\{u_{k+1}, y_{k+1}\}$ を獲得し, 入力/出力データの列ベクトル $u_\alpha(k+1)$, $u_\beta(k+1)$, $y_\alpha(k+1)$ を構成する. このとき, データマトリクスは

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} U_\alpha(k|k-N+1) \vdots u_\alpha(k+1) \\ U_\beta(k|k-N+1) \vdots u_\beta(k+1) \\ Y_\alpha(k|k-N+1) \vdots y_\alpha(k+1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_\alpha(k-N+1) \vdots U_\alpha(k+1|k-N+2) \\ u_\beta(k-N+1) \vdots U_\beta(k+1|k-N+2) \\ y_\alpha(k-N+1) \vdots Y_\alpha(k+1|k-N+2) \end{bmatrix} \quad (A1) \end{aligned}$$

と分割できるので, (24) 式と

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} U_\alpha(k+1|k-N+2) \\ U_\beta(k+1|k-N+2) \\ Y_\alpha(k+1|k-N+2) \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} L_{11}(k+1) & 0 & 0 \\ L_{21}(k+1) & L_{22}(k+1) & 0 \\ L_{31}(k+1) & L_{32}(k+1) & L_{33}(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T(k+1) \\ Q_2^T(k+1) \\ Q_3^T(k+1) \end{bmatrix} \quad (A2) \end{aligned}$$

を (A1) 式に代入することにより, 逐次形

$$\begin{aligned}\hat{L}_0(k+1) &= \hat{L}_0(k) + u_\alpha(k+1)u_\alpha^T(k+1) \\ &\quad - u_\alpha(k-N+1)u_\alpha^T(k-N+1)\end{aligned}\quad (A3)$$

$$\begin{aligned}\hat{L}_1(k+1) &= \hat{L}_1(k) + u_\beta(k+1)u_\alpha^T(k+1) \\ &\quad - u_\beta(k-N+1)u_\alpha^T(k-N+1)\end{aligned}\quad (A4)$$

$$\begin{aligned}\hat{L}_2(k+1) &= \hat{L}_2(k) + y_\alpha(k+1)u_\alpha^T(k+1) \\ &\quad - y_\alpha(k-N+1)u_\alpha^T(k-N+1)\end{aligned}\quad (A5)$$

$$\begin{aligned}\hat{L}_3(k+1) &= \hat{L}_3(k) + u_\beta(k+1)u_\beta^T(k+1) \\ &\quad - u_\beta(k-N+1)u_\beta^T(k-N+1)\end{aligned}\quad (A6)$$

$$\begin{aligned}\hat{L}_4(k+1) &= \hat{L}_4(k) + y_\alpha(k+1)u_\beta^T(k+1) \\ &\quad - y_\alpha(k-N+1)u_\beta^T(k-N+1)\end{aligned}\quad (A7)$$

を得る. ここで, $u_\alpha(k)$ は $u_\alpha(k) = [u^T(k-\alpha+1), \dots, u^T(k)]^T$ である $U_\alpha(\cdot|\cdot)$ の列ベクトルであり, $u_\beta(k)$, $y_\alpha(k)$ もそれぞれ同様の構造を持つ $U_\beta(\cdot|\cdot)$, $Y_\alpha(\cdot|\cdot)$ の列ベクトルである. ただし, $U_\beta(k|k-N+1)$ の構成にあたっては過去の入力データを用い, $u_\beta(k) = [u^T(k-\alpha-\beta+1), \dots, u^T(k-\alpha)]^T$ とする. また

$$\hat{L}_i(k) = L_{i1}(k)L_{11}^T(k) \quad (i=0,1,2) \quad (A8)$$

$$\hat{L}_3(k) = L_{21}(k)L_{21}^T(k) + L_{22}(k)L_{22}^T(k) \quad (A9)$$

$$\hat{L}_4(k) = L_{31}(k)L_{21}^T(k) + L_{32}(k)L_{22}^T(k) \quad (A10)$$

である. 信号部分空間を推定するためにはマトリクスの積 $L_{32}(k)L_{32}^T(k)$ が必要であるので, (A8)-(A10) 式より

$$L_{32}(k) = \{\hat{L}_4(k) - L_{31}(k)L_{21}^T(k)\}\{L_{22}^T(k)\}^{-1} \quad (A11)$$

$$L_{31}(k)L_{21}^T(k) = \hat{L}_2(k)\hat{L}_0^{-1}(k)\hat{L}_1^T(k) \quad (A12)$$

$$L_{22}(k)L_{22}^T(k) = \hat{L}_3(k) - \hat{L}_1(k)\hat{L}_0^{-1}(k)\hat{L}_1^T(k) \quad (A13)$$

が得られ, (A11) 式の各辺にそれぞれの転置をかけることにより

$$\begin{aligned}L_{32}(k)L_{32}^T(k) &= \left\{ \hat{L}_4(k) - \hat{L}_2(k)\hat{L}_0^{-1}(k)\hat{L}_1^T(k) \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \hat{L}_3(k) - \hat{L}_1(k)\hat{L}_0^{-1}(k)\hat{L}_1^T(k) \right\}^{-1} \\ &\quad \cdot \left\{ \hat{L}_4(k) - \hat{L}_2(k)\hat{L}_0^{-1}(k)\hat{L}_1^T(k) \right\}^T\end{aligned}\quad (A14)$$

を得る.

付録 2. 主ベクトルの満たす条件

雑音は入力と無相関であるという仮定に基づいて, 信号部分空間は $L_b(k_2)$ により

$$\begin{aligned}\text{span}_{\text{col}}\{L_b(k_2)\} &= \text{span}_{\text{col}}\{\Gamma_\alpha(k_2)\} \\ &\quad \oplus \text{span}_{\text{col}}\{E(k_2)\}\end{aligned}\quad (A15)$$

Fig. A1 Relation between signal and noise subspaces

と表現できる. ここで $\oplus$ は直和を, また $\text{span}_{\text{col}}\{E(k_2)\}$ は雑音の張る部分空間を表す. よって, $L_b(k_2)$ 列ベクトルは

$$\begin{aligned}h_j(k_2) &= g_{1j}(k_2)v_1(k_2) + \dots \\ &\quad + g_{nj}(k_2)v_n(k_2) + g_{n+1j}(k_2)v_{n+1}(k_2) \\ &\quad + \dots + g_{\alpha l j}(k_2)v_{\alpha l}(k_2)\end{aligned}\quad (A16)$$

と表すことができる. ここで, $v_i(k_2) \in \text{span}_{\text{col}}\{\Gamma_\alpha(k_2)\}$ ($i=1, \dots, n$) と $v_i(k_2) \in \text{span}_{\text{col}}\{E(k_2)\}$ ($i=n+1, \dots, \alpha l$) はそれぞれ信号部分空間と雑音部分空間の主ベクトルであり (Fig. A1 参照), $g_{ij}(k_2)$ ($i, j=1, \dots, \alpha l$) はこの表現における各基底の係数である. このとき, i 番目の信号部分空間の主ベクトルと j 番目の雑音部分空間の主ベクトル間の角度を $\phi_{ij}(k_2)$ とすると, これらの関係は

$$\phi_{ij}(k_2) = \frac{\pi}{2} - \theta_i(k_2) \quad (0 \leq \phi_{ij}(k_2) \leq \pi/2) \quad (A17)$$

となる. 一方, $\text{span}_{\text{col}}\{L_b(k_2)\}$ の主ベクトルは特異値分解 (28) により計算でき, その際 $\text{span}_{\text{col}}\{L_b(k_2)\}$ と $\text{span}_{\text{col}}\{\hat{\Gamma}_\alpha(k_1)\}$ の角度は最小に選ばれる. すなわち $\hat{\Gamma}_\alpha(k_2)$ の主ベクトルが $V(k_2)$ の最初の n ベクトルとして計算されるためには, すべての角度 $\{\theta_i(k_2|k_1)\}$ は $\phi_{ij}(k_2)$ よりも小さくしなければならない. つまり

$$\theta_i(k_2) < \phi_{ij}(k_2) = \frac{\pi}{2} - \theta_i(k_2) \Leftrightarrow \theta_i(k_2) < \frac{\pi}{4} \quad (A18)$$

の関係を満たしていなければならない.