固有値・固有ベクトルによる区分的 2 次線形システムの安定条件*

村松 鋭一[†]・渡部 慶二^{†‡}

Stability Condition of Piecewise Linear Second-Order Systems via Eigenvalues and Eigenvectors*

Eiichi MURAMATSU[†] and Keiji WATANABE^{†‡}

This paper considers stability of piecewise linear second-order systems. We analyze the trajectory of the systems by using eigenvalues and eigenvectors of coefficient matrices of subsystems. For the case where the coefficient matrices have complex eigenvalues, we present the necessary and sufficient condition for the piecewise linear systems to be stable.

1. はじめに

微分方程式で記述される連続ダイナミクスと、論理条件による切替のような離散ダイナミクスの混在するハイブリッドシステムは、近年さまざまなアプローチによって研究されている。中でも、 $\dot{x}(t) = A_i x(t)$ の係数行列 A_i ($i = 1, \dots, N$) が切り替わるシステムの安定性は最も基本的な問題の一つであり、参考文献 [1, 2] などで研究動向が解説されている。この種の問題に対する一つのアプローチとして、Lyapunov 関数を用いた安定性解析が考えられるが、多くの場合安定となるための十分条件しか得られない [3]。

本論文では安定となるための必要十分条件を示すため、解軌道を支配する各サブシステムの固有値を用いた安定性解析を行う。このようなアプローチによる研究として、参考文献 [4–7] が挙げられる。

参考文献 [4] では、 A_i ($i = 1, \dots, N$) を互いに交換則が成り立つクラスに限定したうえで、ある定められた時間にしたがって A_i に切替が生じるシステムの安定性が解

析され、 A_i の固有値を用いた安定条件が与えられている。参考文献 [5–7] においては $x(t)$ のとる値によって A_i に切替が生じる区分的線形システムが扱われ、固有値に着目した安定性解析が行われている。参考文献 [5] では、サブシステムの数を二つとした 2 モードの区分的線形システムが扱われており、サブシステムの次数が 2 次の場合に対しては必要十分条件を、 n 次の場合では、必要条件と十分条件を示している。参考文献 [6] では、サブシステムの次数を 2 次と限定するが個数は二つ以上とした多モード区分的 2 次線形システムが取り扱われている。ここでは、解軌道の特性が A_i の固有値との関連からいくつかのクラスに分類され、それぞれの場合に応じて安定となるための必要十分条件が示されている。参考文献 [5, 6] の結果は参考文献 [7] でもまとめられている。

本論文では参考文献 [6] で扱われた多モード区分的 2 次線形システムのうち、 A_i ($i = 1, \dots, N$) の固有値が複素数である場合の安定条件を、参考文献 [6] で示されている条件とは異なった形式で示す。その形式とは A_i の固有値が陽に現れたものである。

区分的 2 次線形システムの安定性には、切替の境界を定める直線と、各サブシステムの解軌道の曲線形状との位置関係が関わってくる。その解軌道の曲線形状は、 A_i の固有値だけでなく、固有ベクトルも関連して決まる。そこで本論文では、固有値だけでなく固有ベクトルにも着目して安定性解析を行う。そして、多モード区分的 2 次線形システムが安定となる必要十分条件を A_i ($i = 1, \dots, N$) の固有値・固有ベクトルを用いた式で示す。

本論文では複素数の集合を $\mathbb{C}$ 、実数の集合を $\mathbb{R}$ 、また、

* 原稿受付 2004 年 7 月 7 日

[†] 山形大学 工学部 Faculty of Engineering, Yamagata University; 4-3-16 Jonan, Yonezawa city, Yamagata 992-8510, JAPAN

[‡] 理化学研究所 バイオミメティックコントロール研究センター Bio-Mimetic Control Research Center, The Institute of Physical and Chemical Research (RIKEN); 2271-130, Anagahora, Shimoshidami, Moriyama-ku, Nagoya, Aichi 463-0003, JAPAN

Key Words: hybrid system, piecewise linear system, stability condition, eigenvalue, eigenvector.

正の実数の集合を $\mathbb{R}_+$ と表す.

2. 問題設定

2.1 多モード区分的 2 次線形システム

本論文では多モード区分的 2 次線形システムをつぎのように定義する.

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_1 x(t), & \text{if } x(t) \in \mathcal{S}_1 \\ A_2 x(t), & \text{if } x(t) \in \mathcal{S}_2 \\ \vdots \\ A_N x(t), & \text{if } x(t) \in \mathcal{S}_N \end{cases} \quad (1)$$

ただし, $x(t) \in \mathbb{R}^2$, $A_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ である. $\mathcal{S}_i$ ($i=1, \dots, N$) は, Fig. 1 に見られるような原点を始点とする 0 でない定数ベクトル $v_i \in \mathbb{R}^2$ ($i=1, \dots, N$) を用いて,

$$\mathcal{S}_i = \{ c_1 v_i + c_2 v_{i+1} \in \mathbb{R}^2 \mid c_1, c_2 \text{ は非負の実数} \} \quad (2)$$

と表される領域である. ただし, v_i における添え字 i の順序付けは Fig. 1 のような時計回りの順序にしたがうとする. (2) 式より $\mathcal{S}_i$ は Fig. 1 のように v_i および v_{i+1} で方向を示される半直線を境界とする扇型の領域を表す.

v_i と v_{i+1} のなす角は π [rad] 以下とする. もし Fig. 2 内の左図のように π よりも大きな角をもつ領域がある場合には, v_i と $v_{i'}$, および $v_{i'}$ と v_{i+1} のなす角が π より小さくなるような $v_{i'}$ を新たに追加して, $\mathcal{S}_i$ ($i=1, \dots, N$) を定義し直すとする (Fig. 2 内の右図の場合, v_2 を追加している. この場合, $A_1 = A_2$ となる).

本論文では, ある i に対する $\dot{x}(t) = A_i x(t)$ を「サブシステム」, サブシステム $\dot{x}(t) = A_i x(t)$ に対する $x(t)$ の軌道を「サブシステムの軌道」, A_i の固有値を「サブ

Fig. 1 Region of $\mathcal{S}_i$

Fig. 2 Redefinition of $\mathcal{S}_i$

システムの固有値」とよぶことにする. また, (1) 式 of 多モード区分的 2 次線形システムの解軌道 $x(t)$ が任意の初期状態から原点に漸近するとき, 「(1) 式のシステムは安定である」という.

(注意 1) 参考文献 [6] での領域の分割は, 定数ベクトル $C_I \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ ($I=1, \dots, r$) で定められる r 本の直線 $C_I x = 0$ を用いて, 2^r 個の領域を定義するものである. このような領域分割は本論文における v_i と A_i を適当に定めれば Fig. 1 のような $\mathcal{S}_i$ を用いた分割として可能である. また, 本論文で用いている領域の分割は参考文献 [6] での C_I ($I=1, \dots, r$) と A_i ($i=1, \dots, 2^r$) を適当に定めても可能である. したがって, 領域の分割に関しては本論文と参考文献 [6] は同じ自由度をもっている.

2.2 行列 A_i に対する仮定

本論文ではつぎの仮定 1, 2 をおく.

【仮定 1】 A_i ($i=1, \dots, N$) は複素数の固有値

$$\alpha_i \pm j\beta_i, \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \quad \beta_i > 0 \quad (3)$$

をもつとする.

この仮定のもとでは, 固有値 $\alpha_i + j\beta_i$, $\alpha_i - j\beta_i$ ($i=1, \dots, N$) に対応する固有ベクトルはそれぞれ,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a_i + jb_i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ a_i - jb_i \end{bmatrix}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad b_i \neq 0 \quad (4)$$

と表わすことができる (付録 1. 参照).

【仮定 2】 $b_i > 0$, $i=1, \dots, N$

とする.

$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ とするとき, x_1 を横軸に, x_2 を縦軸にとった平面を「 x 平面」とよぶことにする. 仮定 1 より, x 平面におけるサブシステムの軌道は Fig. 3 のように渦状の軌道の一部となる. この渦の回転方向は β_i/b_i が正の場合に時計回りになる (付録 2. 参照). (3) 式で $\beta_i > 0$ としているので, (5) 式よりすべてのサブシステムの軌道の回転方向は時計回りとなる. これに反して, もし $b_{i-1} > 0$ で $b_i < 0$ とすると, $\mathcal{S}_{i-1}$ と $\mathcal{S}_i$ の境界において逆回転の軌道が交差してスライディングモードが発生する. 仮定 2 はそのような場合を考察から除外することを意味する.

Fig. 3 Trajectory of $x(t)$ of a subsystem

Fig. 4 Trajectory of $x(t)$ of a piecewise linear system

仮定 1, 2 より (1) 式の軌道 $x(t)$ は Fig. 4 のように $S_1 \cdots S_N$ の各領域を遷移し、その遷移は周期的に繰り返される (領域 S_i から S_{i+1} へ、そして S_N のつぎは S_1 へ遷移する)。

(注意 2) 参考文献 [6,7] では本論文の仮定 1, 2 のような仮定は設けず、軌道の特性を分類して、各場合における安定条件を示している。本論文での仮定 1, 2 が成り立つ場合の安定条件も参考文献 [6,7] で示されているが、それは $\prod_{i=1}^{2^r} \|e^{A_i \tau_i} x_i\| < 1$ という A_i の行列指数関数を含む形式であり、固有値が安定条件に陽に現れていない。そのため、安定性と固有値の関係を式から読み取ることができない。本論文ではこれとは異なる形式として、行列を含まず、 A_i の固有値が陽に現れるような安定条件の式を示す。そのために、本論文では固有値だけでなく、固有ベクトルにも着目して (その理由は次節で述べる) 解析を行う。この固有ベクトルを用いた問題に対するアプローチは参考文献 [5-7] には見られない本論文の特徴である。

なお、仮定 2 で述べた符号がすべて負の場合には、 $x(t)$ の回転方向が逆向きになるだけなので、正の場合と同様な手法で安定条件を導出できる。

2.3 安定性を決めるパラメータ

区分的 2 次線形システムの安定性の特徴が現れる例として Fig. 5 で表されるものがある [1]。Fig. 5 内の左上図は $\dot{x}(t) = A_1 x(t)$ にしたがう $x(t)$ の軌道、右上図は $\dot{x}(t) = A_2 x(t)$ にしたがう $x(t)$ の軌道である。ここで Fig. 5 内の左中図のように、

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

によって領域 S_i ($i=1, \dots, 4$) が定義され、

$$A_1 = A_3, A_2 = A_4 \quad (7)$$

が成り立つ場合を考える。このとき $x(t)$ は Fig. 5 内の右中図のような軌道を描いて原点に漸近する。一方、同じサブシステムのもとで Fig. 5 内の左下図のような領域を設定すると $x(t)$ は右下の図のように発散する。

この例は、区分的 2 次線形システムの安定性が各サブシステムの固有値だけでは判別できず、各サブシステムの軌道の曲線形状と領域の分割の仕方にも依存して

Fig. 5 Relation between subsystems and piecewise linear system

いることを表している。Fig. 5 内に示されるようなサブシステムの軌道の曲線形状は、 A_i の固有値とともに固有ベクトルにも依存して決まる。そこで本論文では、サブシステムの軌道の曲線形状を決めるパラメータとして、各 A_i の固有値と固有ベクトルを表す $\alpha_i, \beta_i, a_i, b_i$ ($i=1, \dots, N$) を採用する。

(1) 式のシステムの安定性は、これらのパラメータと、切替の境界となる直線の方角を示すベクトル v_i ($i=1, \dots, N$) の関係から決まると考えられる。本論文では、(1) 式のシステムが安定となる必要十分条件を $\alpha_i, \beta_i, a_i, b_i, v_i$ ($i=1, \dots, N$) を用いて示す。

3. 変数変換

本論文での安定性解析に有効な変数変換について述べておく。

A_i の固有値・固有ベクトルの関係より、(4) 式の固有ベクトルを並べた行列

$$\tilde{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a_i + jb_i & a_i - jb_i \end{bmatrix} \quad (8)$$

に対して、

$$\tilde{T}_i^{-1} A_i \tilde{T}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i + j\beta_i & 0 \\ 0 & \alpha_i - j\beta_i \end{bmatrix} \quad (9)$$

が成り立つ (本節では添え字 i は $i=1, \dots, N$ のいずれかを表すとする)。

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \quad (10)$$

として、(9) 式の両辺に左から T^{-1} を、右から T をか

けると,

$$T_i^{-1}A_iT_i = \Gamma_i \quad (11)$$

が得られる. ただし,

$$T_i \triangleq \tilde{T}_i T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2a_i & 2b_i \end{bmatrix} \quad (12)$$

であり,

$$\begin{aligned} \Gamma_i &\triangleq T^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_i + j\beta_i & 0 \\ 0 & \alpha_i - j\beta_i \end{bmatrix} T \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

である. (1)式での第 i 番目のサブシステム $\dot{x}(t) = A_i x(t)$ に対して, (12)式の T_i を用いて

$$x(t) = T_i \eta_i(t) \quad (14)$$

という変数変換を行えば, (11)式より変数 $\eta_i(t)$ は,

$$\dot{\eta}_i(t) = \Gamma_i \eta_i(t) \quad (15)$$

という方程式にしたがう. (13)式で表される行列 Γ_i に対する行列指数関数は,

$$e^{\Gamma_i t} = e^{\alpha_i t} \begin{bmatrix} \cos \beta_i t & \sin \beta_i t \\ -\sin \beta_i t & \cos \beta_i t \end{bmatrix} \quad (16)$$

と表される [8]. これを用いれば, 初期値 $\eta_i(0)$ に対する (15)式の $\eta_i(t)$ の軌道は

$$\begin{aligned} \eta_i(t) &= e^{\Gamma_i t} \eta_i(0) \\ &= e^{\alpha_i t} \begin{bmatrix} \cos \beta_i t & \sin \beta_i t \\ -\sin \beta_i t & \cos \beta_i t \end{bmatrix} \eta_i(0) \end{aligned} \quad (17)$$

と表される.

$\eta_i(t) = [\eta_{i1}(t) \ \eta_{i2}(t)]$ とするとき, η_{i1} を横軸に, η_{i2} を縦軸にとった平面を「 η_i 平面」とよぶことにする. (17)式は, その平面でのベクトル $\eta_i(0)$ を原点からの距離を変えつつ回転を加える変換とみなすことができ, ベクトル $\eta_i(t)$ に関するつぎの性質 (C1), (C2) を述べることができる.

(C1) $\eta_i(t)$ の原点からの距離は初期値 $\eta_i(0)$ に対して $e^{\alpha_i t}$ 倍される. すなわち

$$\frac{\|\eta_i(t)\|}{\|\eta_i(0)\|} = e^{\alpha_i t} \quad (18)$$

である. ただし, $\|\cdot\|$ はベクトルのユークリッドノルムを表す.

(C2) η_i 平面におけるベクトル $\eta_i(t)$ の原点を中心とする回転の角速度の大きさは β_i である.

4. 区分的 2 次線形システムの安定条件

この節では (1) 式のシステムの安定条件を示すが, まずはそのための補題を述べる. なお, 以降の式の展開のため, 2 次元ベクトル v_i ($i=1, \dots, N$) を

$$v_i = \begin{bmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

と表すとする.

【補題 1】 (1) 式のシステムの軌道 $x(t)$ が, 領域 $\mathcal{S}_{i-1}$ から $\mathcal{S}_i$ へ, そして $\mathcal{S}_{i+1}$ へ遷移するとする (Fig. 6 の左) とき, $x(t)$ が領域 $\mathcal{S}_i$ に滞在する時間 t_i は,

$$t_i = \frac{1}{\beta_i} \cos^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(b_i v_{i,1})^2 + (v_{i,2} - a_i v_{i,1})^2}} \cdot \frac{b_i^2 v_{i,1} v_{i+1,1} + (v_{i,2} - a_i v_{i,1})(v_{i+1,2} - a_i v_{i+1,1})}{\sqrt{(b_i v_{i+1,1})^2 + (v_{i+1,2} - a_i v_{i+1,1})^2}} \right\} \quad (20)$$

と表される. ただし, $i=N$ のときの $i+1$ は 1 を表すとする.

(証明) 時間 t_i の間の $x(t)$ の軌道は Fig. 6 内の左図で表され, これを (14) 式で η_i 平面に変換した軌道は Fig. 6 内の右図となる. これより, 軌道 $\eta_i(t)$ が $T_i v_i$ で示される直線を通過してから, $T_i v_{i+1}$ で示される直線を通過するまでの時間が t_i となる. この $\eta_i(t)$ の回転角の大きさを θ とすると (Fig. 6 内の右図参照), 前節で述べた性質 (C2) より,

$$\theta = \beta_i t_i \quad (21)$$

が成り立つ. また, 2.1 で述べたように v_i と v_{i+1} のなす角が π 以下であることから, θ もまた π 以下となり,

$$\theta = \cos^{-1} \frac{(T_i^{-1} v_i) \bullet (T_i^{-1} v_{i+1})}{\|T_i^{-1} v_i\| \cdot \|T_i^{-1} v_{i+1}\|} \quad (22)$$

と表せる. ただし, $\bullet$ は二つのベクトルの内積であり, 上式の $\cos^{-1}$ は $0 < \theta \leq \pi$ の値をとる. (21) 式と (22) 式より,

$$t_i = \frac{1}{\beta_i} \cos^{-1} \frac{(T_i^{-1} v_i) \bullet (T_i^{-1} v_{i+1})}{\|T_i^{-1} v_i\| \cdot \|T_i^{-1} v_{i+1}\|} \quad (23)$$

となり, この式に (12) 式と (19) 式を代入して計算すると (20) 式になる. $\square$

Fig. 6 Trajectories of $x(t)$ and $\eta_i(t)$ in dwell time t_i

(20) 式より, 時間 t_i は β_i, a_i, b_i, v_i から決まる定数となることからわかる.

区分的 2 次線形システムの安定条件としてつぎの定理が導かれる.

【定理 1】 仮定 1, 2 が成り立つとする. (1) 式のシステムが安定であるための必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \alpha_i t_i + \frac{1}{2} \log \frac{(b_i v_{i,1})^2 + (v_{i,2} - a_i v_{i,1})^2}{(b_{i-1} v_{i,1})^2 + (v_{i,2} - a_{i-1} v_{i,1})^2} \right\} < 0 \quad (24)$$

が成り立つことである. ただし, t_i は (20) 式で表される. また, (24) 式において, $i=1$ のときの $i-1$ は N を表すとする.

(証明) 初期値 $x(0)$ が領域 S_N にあるとする. 仮定 1, 2 より $x(t)$ の軌道は Fig. 4 のようになる. 時刻 t において軌道 $x(t)$ が領域 S_m (m は $1, \dots, N$ のいずれか) にあるとすれば,

$$x(t) = e^{A_m \bar{t}_m} \dots e^{A_1 t_1} (e^{A_N t_N} \dots e^{A_1 t_1}) \dots (e^{A_N t_N} \dots e^{A_1 t_1}) e^{A_N \bar{t}_N} x(0) \quad (25)$$

と表される. ただし, 上式右辺 2 行目における最初の「 $\dots$ 」は $(e^{A_N t_N} \dots e^{A_1 t_1})$ の繰返しを表す. また, $\bar{t}_N$ は軌道 $x(t)$ が初期値 $x(0)$ から S_N の境界へ至るまでの時間であり, $\bar{t}_m$ は時刻 t 直近での $x(t)$ の S_m における滞在時間である. (11) 式より,

$$e^{A_i t_i} = T_i e^{\Gamma_i t_i} T_i^{-1} \quad (26)$$

と書けるので, これを (25) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A_m \bar{t}_m} \dots e^{A_1 t_1} (T_N e^{\Gamma_N t_N} T_N^{-1} \dots T_1 e^{\Gamma_1 t_1} T_1^{-1}) \\ &\quad \dots (T_N e^{\Gamma_N t_N} T_N^{-1} \dots T_1 e^{\Gamma_1 t_1} T_1^{-1}) \\ &\quad \cdot T_N e^{\Gamma_N \bar{t}_N} T_N^{-1} x(0) \\ &= e^{A_m \bar{t}_m} \dots e^{A_1 t_1} T_N (e^{\Gamma_N t_N} T_N^{-1} T_{N-1} \dots \\ &\quad e^{\Gamma_1 t_1} T_1^{-1} T_N) \dots (e^{\Gamma_N t_N} T_N^{-1} T_{N-1} \dots \\ &\quad e^{\Gamma_1 t_1} T_1^{-1} T_N) \cdot e^{\Gamma_N \bar{t}_N} T_N^{-1} x(0) \\ &= M \Phi \dots \Phi \cdot \tilde{v}_N \end{aligned} \quad (27)$$

を得る. ただし,

$$M \triangleq e^{A_m \bar{t}_m} \dots e^{A_1 t_1} T_N \quad (28)$$

$$\Phi \triangleq e^{\Gamma_N t_N} T_N^{-1} T_{N-1} \dots e^{\Gamma_1 t_1} T_1^{-1} T_N \quad (29)$$

$$\tilde{v}_N \triangleq e^{\Gamma_N \bar{t}_N} T_N^{-1} x(0) \quad (30)$$

である. (30) 式のベクトル $\tilde{v}_N$ は

$$\begin{aligned} \tilde{v}_N &= e^{\Gamma_N \bar{t}_N} \eta_N(0) \\ &= c T_N^{-1} v_1, \quad c \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (31)$$

と書くことができる (Fig. 7). すなわち, ベクトル $\tilde{v}_N$ は $T_N^{-1} v_1$ 方向を向いている.

$x(t)$ が原点へ漸近するかどうかを考察するため, (27)

Fig. 7 Transformation from x -plane to η_i -plane

式におけるベクトル $\tilde{v}_N$ の行列 Φ による変換の繰返しの部分に注目する. (31) 式の $\tilde{v}_N$ を Φ で変換すると, 変換後のベクトルはやはり $T_N^{-1} v_1$ と同じ方向を向くことが (29) 式の Φ の定義からわかる. (27) 式ではその変換が繰り返されているので, $x(t)$ が原点へ漸近する必要十分条件は, 行列 Φ による変換後のベクトルの長さの, 変換前の長さに対する比 (以降, ベクトルの長さの「変換比」とよぶことにする) が 1 よりも小さいこととなる ((28) 式の M による変換比は 0 より大きく, その上限値が存在するので, (27) 式で $x(t)$ の原点への漸近性を考察するにあたっては Φ の繰返し部分のみに注目すればよい).

Φ による変換比を考察するため, (29) 式の Φ を

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{\Gamma_N t_N} \cdot (T_N^{-1} T_{N-1}) \cdot e^{\Gamma_{N-1} t_{N-1}} \cdot (T_{N-1}^{-1} T_{N-2}) \dots \\ &\quad \dots e^{\Gamma_2 t_2} \cdot (T_2^{-1} T_1) \cdot e^{\Gamma_1 t_1} \cdot (T_1^{-1} T_N) \end{aligned} \quad (32)$$

という $2N$ 個の変換の積と考え, それら一つ一つの変換によるベクトルの長さの変換比について考えていく.

まず, 行列 $T_i^{-1} T_{i-1}$ による変換を考える. この変換が生じるタイミングは, 軌道 $x(t)$ が S_{i-1} から S_i へ遷移する瞬間, すなわち, ベクトル $x(t)$ が v_i と同方向を向いて

$$x(t) = c v_i, \quad c \in \mathbb{R}_+ \quad (33)$$

となったときに生じる (Fig. 8 内の上図). このとき, η_{i-1} 平面では $\eta_{i-1}(t)$ が

$$\eta_{i-1}(t) = T_{i-1}^{-1} x(t) = c T_{i-1}^{-1} v_i \quad (34)$$

Fig. 8 Transformation by $T_i^{-1} T_{i-1}$

と表され (Fig. 8 内の左下図), η_i 平面では $\eta_i(t)$ が

$$\eta_i(t) = T_i^{-1}x(t) = cT_i^{-1}v_i \quad (35)$$

と表される (Fig. 8 内の右下図). 行列 $T_i^{-1}T_{i-1}$ による変換は, (34) 式のベクトルを (35) 式のベクトルへ写す変換であり, それによるベクトルの長さの変換比は,

$$\begin{aligned} \frac{\|\eta_i(t)\|}{\|\eta_{i-1}(t)\|} &= \frac{\|cT_i^{-1}v_i\|}{\|cT_{i-1}^{-1}v_i\|} = \frac{\|T_i^{-1}v_i\|}{\|T_{i-1}^{-1}v_i\|} \\ &= \frac{|b_{i-1}|}{|b_i|} \cdot \frac{\sqrt{(b_i v_{i,1})^2 + (v_{i,2} - a_i v_{i,1})^2}}{\sqrt{(b_{i-1} v_{i,1})^2 + (v_{i,2} - a_{i-1} v_{i,1})^2}} \end{aligned} \quad (36)$$

と表される. ただし, (36) 式の導出には (12) 式, (19) 式を用いた.

つぎに, (32) 式における $e^{\Gamma_i t_i}$ による変換について考える. この変換は Fig. 6 内の右図で表される $\eta_i(t)$ の推移を与えるものである. これは η_i 平面で $\eta_i(t)$ を時間 t_i だけ推移させる変換なので, 前節の (C1) における (18) 式より, この変換によるベクトルの長さの変換比は $e^{\alpha_i t_i}$ と表される.

(32) 式の Φ は, このような 2 種類の変換行列 $T_i^{-1}T_{i-1}$ と $e^{\Gamma_i t_i}$ のそれぞれ N 個の積として構成されている. したがって, 行列 Φ の変換によるベクトルの長さの変換比は, $i=1, \dots, N$ に対する (36) 式と $e^{\alpha_i t_i}$ の積に等しい. そして前に述べたように, この値が 1 より小さいことが安定条件である. したがって, (1) 式のシステムが安定となるための必要十分条件は,

$$\prod_{i=1}^N e^{\alpha_i t_i} \frac{\sqrt{(b_i v_{i,1})^2 + (v_{i,2} - a_i v_{i,1})^2}}{\sqrt{(b_{i-1} v_{i,1})^2 + (v_{i,2} - a_{i-1} v_{i,1})^2}} < 1 \quad (37)$$

である ((36) 式における $|b_{i-1}|/|b_i|$ は N 個の積において相殺されて上式には現れない). 最後に, (37) 式の両辺の自然対数を取り, (24) 式が得られる.

なお, 証明に最初に初期値 $x(0)$ が領域 S_N にあるとしたが, 他の領域にある場合には (25) 式 ~ (32) 式において下付きの添え字 $1, 2, \dots, N$ が入れ替わる. しかし, (33) 式以降は同じ議論となり, 得られる安定条件は (24) 式と同じになる. $\square$

証明中の (37) 式左辺の

$$\rho \triangleq \prod_{i=1}^N e^{\alpha_i t_i} \frac{\sqrt{(b_i v_{i,1})^2 + (v_{i,2} - a_i v_{i,1})^2}}{\sqrt{(b_{i-1} v_{i,1})^2 + (v_{i,2} - a_{i-1} v_{i,1})^2}} \quad (38)$$

は, ベクトルの Φ による変換比として導出された. この定数 ρ を用いてつぎの補題を示すことができる (証明は付録 3. 参照).

【補題 2】 (20) 式の t_i ($i=1, \dots, N$) を用いて

$$h \triangleq \sum_{i=1}^N t_i \quad (39)$$

とする. k を非負の整数とすると, 任意の初期値に対する (1) 式の解 $x(t)$ は

$$x(t+kh) = \rho^k x(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (40)$$

を満たす.

この補題を用いてつぎの定理を示すことができる (証明は付録 4.).

【定理 2】 任意の初期値に対する (1) 式の解 $x(t)$ に対して,

$$\gamma_\ell e^{-\mu t} \leq \|x(t)\| \leq \gamma_u e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (41)$$

が成り立つ. ただし,

$$\mu = -\frac{1}{h} \log \rho \quad (42)$$

$$\gamma_u = \sup_{t_p \in [0, h)} \|x(t_p)\| e^{\mu t_p} \quad (43)$$

$$\gamma_\ell = \inf_{t_p \in [0, h)} \|x(t_p)\| e^{\mu t_p} \quad (44)$$

である.

(42) 式における $\log \rho$ の値は定理 1 における (24) 式の左辺の値と等しく, これが負のときには $\mu > 0$ となる. このことと (41) 式より, (1) 式のシステムが安定であるとき, それは指数安定を意味する.

定理 1 から, 区分的 2 次線形システムの安定性についてつぎのことがいえる.

- (20) 式, (24) 式に見られるように, 安定となる必要十分条件は $\alpha_i, \beta_i, a_i, b_i, v_i$ ($i=1, \dots, N$) のみを用いて記述できる.
- 安定条件における α_i の現れ方は, (24) 式において線形に現れているのみである. したがって, 固有ベクトルが変わらず α_i の値のみが変わるとき, α_i の値が負で小さいほどシステムの安定度 ((24) 式の左辺の値がどれほど小さいか) は増す.
- 安定条件における β_i の現れ方は, (20) 式において逆数として現れているのみである. したがって, 固有ベクトルが変わらず β_i の値のみが変わるとき, α_i の値が負 (正) の場合には β_i が小さい (大きい) ほどシステムの安定度は増す.
- 安定条件は v_i ($i=1, \dots, N$) の長さには依存しない. このことは v_i の代わりに $c_i v_i$, $c_i \in \mathbb{R}_+$ と置き換えて (20) 式と (24) 式を計算しても, もとと同じ式になることから確認できる.

本論文の定理 1 で示された安定条件から, 従来の研究 [4, 5] で得られている安定条件をつぎのように導くことができる.

- $A_i A_j = A_j A_i$ ($i \neq j$) が成り立つとき, 各 A_i は共通の固有ベクトルをもち, $a_i = a_j$, $b_i = b_j$ ($i \neq j$) が成り立つ. このときの定理 1 の安定条件は, 対数の項が 0 となることにより

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i t_i < 0 \quad (45)$$

と表される．これは参考文献 [4] における定理 1 で $n=2$ とした場合の安定条件と一致する．

- $N=2$ かつ $v_1 = -v_2$ の場合，2 モード区分的 2 次線形システムとなる．この場合，(20) 式の t_i ($i=1,2$) は π/β_i となるとともに，(24) 式における対数の項は互いに相殺するため，定理 1 の安定条件は

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} < 0 \quad (46)$$

とまとめられる．これは参考文献 [5] における定理 1 の (4) 式と一致する．

また，参考文献 [1] で例として用いられた Fig. 5 のようなシステムの安定条件は，定理 1 の特殊な場合として導くことができる．(6), (7) 式によってシステムが定義されているときには，

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_3, \quad \beta_1 = \beta_3, \quad a_1 = a_3, \quad b_1 = b_3 \\ \alpha_2 &= \alpha_4, \quad \beta_2 = \beta_4, \quad a_2 = a_4, \quad b_2 = b_4 \end{aligned}$$

と (6) 式を定理 1 の条件に代入すれば，つぎのような安定条件が得られる．

【系 1】 仮定 1, 2 が成り立つとする．また，(6) 式のベクトルで領域が分割され (7) 式が成り立つとする．このとき，(1) 式のシステムが安定であるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cos^{-1} \frac{-a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \cos^{-1} \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \\ + \frac{1}{2} \log \frac{a_2^2 + b_2^2}{a_1^2 + b_1^2} < 0 \end{aligned} \quad (47)$$

が成り立つことである．

5. 数値例

(6) 式のベクトル v_i ($i=1, \dots, 4$) で領域 $\mathcal{S}_i$ ($i=1, \dots, 4$) が Fig. 5 内の左中図のように定義されるとする．また，(7) 式が成り立ち，

$$A_1 = \begin{bmatrix} \sigma & 1 \\ -\omega^2 & \sigma \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \pi \\ -\pi & 1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

の場合 [6,7] を考える．この場合，安定条件は (47) 式で与えられる．具体的な数値を代入するため， A_1, A_2 の固有値と固有ベクトルを求めると，

$$\alpha_1 = \sigma, \quad \beta_1 = \omega, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = \omega \quad (49)$$

$$\alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = \pi, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = 1 \quad (50)$$

という値を得る．これらを (47) 式の安定条件に代入すると，

$$\frac{\sigma\pi}{\omega} + 1 + \log \frac{1}{\omega^2} < 0 \quad (51)$$

となる．これは参考文献 [6,7] の例題で導出されている

$$e^{1 + \frac{\sigma\pi}{\omega}} < \omega^2 \quad (52)$$

という条件と等価である．

別の例として，

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (53)$$

であり (Fig. 1 のような領域の分割で)，

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -12 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (54)$$

の場合の安定性を定理 1 から判別してみる．この場合，

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -1, \quad \beta_1 = 6, \quad a_1 = 1, \quad b_1 = 1 \\ \alpha_2 &= -1, \quad \beta_2 = 2, \quad a_2 = -1, \quad b_2 = 1 \\ \alpha_3 &= 1, \quad \beta_3 = 2, \quad a_3 = -1, \quad b_3 = 1 \\ \alpha_4 &= -1, \quad \beta_4 = 1, \quad a_4 = -2, \quad b_4 = 1 \end{aligned} \quad (55)$$

となり，これと (53) 式を，(20) 式と (24) 式の左辺に代入して計算する．この場合，(24) 式が満たされるので，(1) 式のシステムは安定と判別される．数値計算によって $x(t)$ の軌道 (初期値は $x(0) = [1 \ 1]^T$) を求めると Fig. 9 のようになり，判別どおり安定であることを確認できる．

Fig. 9 Trajectory of a stable system

(54) 式の A_4 の代わりに

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \quad (56)$$

として，

$$\alpha_4 = -1, \quad \beta_4 = 2, \quad a_4 = -2, \quad b_4 = 1 \quad (57)$$

である場合には，(24) 式が満たされず，システムは不安定と判別される．数値計算による $x(t)$ の軌道は Fig. 10 のように発散し，判別どおりシステムが不安定であることを確認できる．

Fig. 10 Trajectory of an unstable system

6. おわりに

多モード区分的2次線形システムの安定解析を行い、各サブシステムの係数行列 A_i が複素固有値をもつ場合について安定条件を示した。安定となる必要十分条件を導出するため、サブシステムの軌道の曲線形状に着目し、それらを定めるパラメータとして固有値と固有ベクトルを採用した。安定性解析においては、 $x(t)$ から $\eta_i(t)$ への変数変換を行い、 $\eta_i(t)$ 平面上でのベクトルの回転と長さの伸縮を考えることによって安定条件を導いた。そこで現れる変数変換行列、回転の角速度、ベクトルの長さの変換比などの安定条件にかかわる量のすべてが、 $\alpha_i, \beta_i, a_i, b_i, v_i$ を用いて記述されたため、システムの安定条件もそれらのパラメータのみで書き表されるものとなった。得られた安定条件には固有値が陽に現れており、各サブシステムの固有値と区分的2次線形システムの安定性の関係が明確になった。

今後の研究課題として、システムの次数を2次から n 次へと拡張することが考えられる。それを考えるにあたっては、上で述べたような2次元ベクトルの回転や伸縮をいかに n 次元へと一般化するかが問題となり、そのための数学的準備が必要となると思われる。

仮定1, 2が満たされない場合の安定解析は参考文献[6, 7]で行われているが、固有ベクトルを用いた解析は行われていない。本論文で用いた固有ベクトルのパラメータ a_i, b_i を導入することによって、参考文献[6, 7]とは別の形式での安定条件が得られる可能性があり、これについても今後の研究課題と考えている。

謝 辞

本研究に関する議論に参加してくれた山形大学工学部学生、須藤明美さんに感謝します。

参 考 文 献

- [1] D. Liberzon and A. S. Morse: Basic problems in stability and design of switched systems; *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 19, No. 5, pp. 59–70 (1999)
- [2] 山本, 増淵: ハイブリッドダイナミカルシステムの安定解析; システム/制御/情報, Vol. 46, No. 3, pp. 120–128 (2002)

- [3] 井村: ハイブリッドシステムの制御における未解決問題; 計測と制御, Vol. 42, No. 2, pp. 113–119 (2003)
- [4] 藤澤, 村松: 切り替えシステムの安定性 — 固有値と動作時間による安定条件; システム制御情報学会論文誌, Vol. 15, No. 5, pp. 232–237 (2002)
- [5] 岩谷, 原: 固有値に着目した2モード区分的線形システムの安定解析; 計測自動制御学会論文集, Vol. 39, No. 11, pp. 1048–1053 (2003)
- [6] 岩谷, 原: 固有値に着目した多モード区分的2次線形システムの安定解析; 第46回自動制御連合講演会資料 (2003)
- [7] Y. Iwatani: Stability analysis and stabilization for hybrid control systems; 東京工業大学博士学位論文 (2004)
- [8] 高橋: 力学と微分方程式, 岩波書店 (1996)

付 録

付録 1. 固有ベクトルの表現について

A_i が2次の実数行列で、仮定1が成り立つとき、 A_i の固有ベクトルは一般性を失うことなく、

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a_i + jb_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ a_i - jb_i \end{bmatrix}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad b_i \neq 0 \quad (\text{A1})$$

と表すことができる。このことはつぎのように示される。

仮定1のもとでは A_i の固有ベクトルは複素ベクトルとなり、それを $w_i \in \mathbb{C}^2$ とする。一般に固有ベクトルはスカラー倍の自由度をもち、任意の $c_i \in \mathbb{C}$ に対して、 $c_i w_i \in \mathbb{C}^2$ も A_i の固有ベクトルとなる。もし、 $w_i = [w_{i1} \ w_{i2}]^T$ における第一要素 $w_{i1} \in \mathbb{C}$ が0でないならば（後でこのことは証明する）、 c_i を $1/w_{i1}$ とした $c_i w_i$ 、すなわち、 $[1 \ w_{i2}/w_{i1}]^T$ も固有ベクトルとなる。仮定1のもとでは A_i の2本の複素固有ベクトルは互いに共役となる。したがって、 A_i の固有ベクトルが $[1 \ w_{i2}/w_{i1}]^T$ と表されるとき、これにおける $w_{i2}/w_{i1} \in \mathbb{C}$ は $a_i \pm jb_i$ ($a_i, b_i \in \mathbb{R}, b_i \neq 0$) と表される。

ここで、 $w_i = [w_{i1} \ w_{i2}]^T$ における第一要素 $w_{i1} \in \mathbb{C}$ が0でないことを示す。もし $w_{i1} = 0$ と仮定すると、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ w_{i2} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} 0 \\ w_{i2} \end{bmatrix} \quad (\text{A2})$$

が成り立つ。ただし、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A_i \quad (\text{A3})$$

であり、 λ_i は $\alpha_i + j\beta_i$ あるいは $\alpha_i - j\beta_i$ を表すとする。(A2)式より、

$$a_{22}w_{i2} = \lambda_i w_{i2} \quad (\text{A4})$$

が得られる。 w_i は固有ベクトルなので $w_i \neq 0$ であり、仮定より $w_{i1} = 0$ なので、 $w_{i2} \neq 0$ である。これと(A4)式より

$$a_{22} = \lambda_i \quad (\text{A5})$$

となる． A_i が実数行列のため左辺の a_{22} は実数であり，右辺 λ_i の虚部 β_i は 0 でないで，(A5) 式は矛盾している．したがって， $w_i = [w_{i1} \ w_{i2}]^T$ における第一要素 w_{i1} は 0 とはならない．

付録 2. 軌道の回転方向

2.2 で述べた仮定 1 のように A_i が複素固有値をもつ場合， $\dot{x}(t) = A_i x(t)$ の軌道は渦状になる．サブシステムの軌道は領域 S_i 内のみで描かれるが，ここでは渦の回転方向を考察するため，Fig.A1 のように軌道を x 平面全域に拡張して，初期値を $x(0) = [0, c]^T$ ， $c \in \mathbb{R}_+$ とする．これに対する速度ベクトル $\dot{x}(0) \in \mathbb{R}^2$ の方向を考えると，その第一要素 $\dot{x}_1(0)$ の正負によって渦の回転方向が決まる．ここではそれが β_i/b_i の正負によって定まることを示す．

Fig. A1 Trajectory of $x(t)$

初期値に対するサブシステムの軌道 $x(t)$ は，(12) 式，(16) 式，(26) 式を用いることにより，

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A_i t} x(0) \\ &= T_i e^{\Gamma t} T_i^{-1} x(0) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2a_i & 2b_i \end{bmatrix} e^{\alpha_i t} \begin{bmatrix} \cos \beta_i t & \sin \beta_i t \\ -\sin \beta_i t & \cos \beta_i t \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2a_i & 2b_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \\ &= \frac{c}{b_i} \begin{bmatrix} e^{\alpha_i t} \sin \beta_i t \\ a_i e^{\alpha_i t} \sin \beta_i t + b_i e^{\alpha_i t} \cos \beta_i t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

と計算される．上式の第一要素を t で微分すると，

$$\dot{x}_1(t) = \frac{c}{b_i} (\alpha_i e^{\alpha_i t} \sin \beta_i t + e^{\alpha_i t} \beta_i \cos \beta_i t) \quad (\text{A7})$$

となり， $t=0$ を代入すると

$$\dot{x}_1(0) = \frac{c\beta_i}{b_i} \quad (\text{A8})$$

となる． $c \in \mathbb{R}_+$ なので， $\dot{x}_1(0)$ の符号は β_i/b_i の正負で決まる．そして β_i/b_i が正のときには $\dot{x}_1(0) > 0$ となり， $x(t)$ の軌道が描く渦は時計回りになる．

付録 3. 補題 2 の証明

Φ による変換は， $T_N^{-1} v_1$ 方向を向いたベクトル $\eta_N(t)$ を，同方向で長さが ρ 倍のベクトルに変換する．また，(29) 式において時間を表す t_i ($i=1, \dots, N$) に注目すると，変換 Φ による経過時間は (39) 式の h であることが

わかる．したがって，

$$\eta_N(t_{v_1} + h) = \rho \eta_N(t_{v_1}) \quad (\text{A9})$$

が成り立つ．ただし t_{v_1} は $\eta_N(t)$ が $T_N^{-1} v_1$ 方向を向いた時刻である．上式は

$$\eta_{i-1}(t_{v_i} + h) = \rho \eta_{i-1}(t_{v_i}), \quad i=1, \dots, N \quad (\text{A10})$$

と一般化できる．ただし t_{v_i} は， η_{i-1} 平面において $\eta_{i-1}(t)$ が $T_{i-1}^{-1} v_i$ 方向を向く時刻である (x 平面において $x(t)$ が v_i 方向を向く時刻でもある)．(A10) 式が成り立つことは，定理 1 の証明の最初で初期値 $x(0)$ が領域 S_{i-1} にあるとしても (37) 式と同じ式が導出されることからわかる．(A10) 式で左から T_{i-1} をかけると，(14) 式より

$$x(t_{v_i} + h) = \rho x(t_{v_i}), \quad i=1, \dots, N \quad (\text{A11})$$

となる．(A11) 式は x が v_i 方向を向いたときに成り立つ関係式であるが，(A11) 式における t_{v_i} をつぎに示すように任意の $t \geq 0$ に拡張できる．

t を任意のある時刻とし，そのときの $x(t)$ が領域 S_{i-1} にあり，それから時間 t_r (≥ 0) だけ経過したら $x(t)$ が v_i 方向を向くとし，そのときの時刻が t_{v_i} であるとする (Fig.A2 参照)．すなわち，

$$t_{v_i} = t + t_r \quad (\text{A12})$$

と表されるとする． t_r と (補題 1 での) t_i の定義より，

$$t_r \leq t_{i-1} \quad (\text{A13})$$

が成り立つ．(A12) 式より，

$$x(t_{v_i}) = e^{A_{i-1} t_r} x(t) \quad (\text{A14})$$

と表される．

ここで $x(t+h)$ について考える．(A12) 式を用いると，

$$x(t+h) = x(t_{v_i} + h - t_r) \quad (\text{A15})$$

と表され，これは $x(t_{v_i} + h)$ を初期値として時間 t_r だけ過去にさかのぼったときの解 x の値に等しい．その初期値 $x(t_{v_i} + h)$ は (A11) 式より v_i 方向を向いていること， t が増すときの $x(t)$ の軌道は時計回りであること，および時間 t_r は (A13) 式を満たすことから， $x(t_{v_i} + h)$

Fig. A2 Relation between $x(t)$ and $x(t+h)$

から $x(t_{v_i}+h-t_r)$ まで逆時間にさかのぼった軌道は領域 $\mathcal{S}_{i-1}$ のみを通過する (Fig.A2 参照). したがって,

$$x(t+h)=x(t_{v_i}+h-t_r)=e^{A_{i-1}(-t_r)}x(t_{v_i}+h)(A16)$$

と表される. これに (A11) 式を代入し, さらに (A14) 式を用いると,

$$x(t+h)=\rho e^{A_{i-1}(-t_r)}x(t_{v_i})=\rho x(t)(A17)$$

が導かれる.

t は任意であるので (A17) 式において t の代わりに $t+h$ を代入し, それに再び (A17) 式を用いると

$$x(t+2h)=\rho x(t+h)=\rho^2 x(t)(A18)$$

が得られる. この繰返しにより (40) 式が導かれる.

付録 4. 定理 2 の証明

任意の初期値に対する (1) 式の解を $x(t)$ とし, h, μ をそれぞれ (39) 式, (42) 式で定義されるものとする. 区間 $[0, h)$ に属する実数 t_p をパラメータとした, 時刻 t に対する指数関数 $\psi(t; t_p)$ を

$$\psi(t; t_p) \triangleq \|x(t_p)\| e^{\mu t_p} \cdot e^{-\mu t}(A19)$$

と定義する. また, パラメータ $t_p \in [0, h)$ でつくられる指数関数 $\psi(t; t_p)$ の集合を

$$\Psi = \{ \psi(t; t_p) \mid t_p \in [0, h) \}(A20)$$

と表すとする.

(A19) 式において $e^{-\mu t}$ にかかる係数 $\|x(t_p)\| e^{\mu t_p}$ には, $t_p \in [0, h)$ に対する上限値と下限値が存在する. それらを (43), (44) 式で表せば, $\psi(t; t_p) \in \Psi$ は

$$\gamma_\ell e^{-\mu t} \leq \psi(t; t_p) \leq \gamma_u e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall t_p \in [0, h)(A21)$$

を満たす.

(A21) 式までは $\psi(t; t_p)$ を t に対する指数関数とみなしていたが, ここで, $\psi(t; t_p)$ をある時刻 t における関数値とみなすことにする. そして, $t \in [0, h)$, k を任意の非負の整数としたときの, 時刻 $t+kh$ における関数値 $\psi(t+kh; t_p)$ について考える. その値は, パラメータ $t_p \in [0, h)$ を t に等しくすると,

$$\begin{aligned} \psi(t+kh; t) &= \|x(t)\| e^{\mu t} \cdot e^{-\mu(t+kh)} \\ &= \|x(t)\| e^{-\mu kh} \end{aligned}(A22)$$

となる. さらに (42) 式より $e^{-\mu h} = \rho$ であること, および補題 2 より得られる

$$\rho^k \|x(t)\| = \|x(t+kh)\|(A23)$$

を用いると, (A22) 式は

$$\begin{aligned} \psi(t+kh; t) &= \rho^k \|x(t)\| \\ &= \|x(t+kh)\| \end{aligned}(A24)$$

と変形できる. このように, $t_p = t$ としたときの関数値 $\psi(t+kh; t_p)$ の値が (A24) 式のように表されることは, つぎのことを意味する. 区間 $[0, h)$ に属する各 t に対して,

$$\|x(t+kh)\| = \psi(t+kh; t_p)(A25)$$

を満たす $t_p \in [0, h)$ が存在する (各 t に応じて $t_p = t$ とすればよい). ここで

$$\tilde{t} \triangleq t+kh(A26)$$

とすれば, $t \in [0, h)$ より $\tilde{t} \in [kh, (k+1)h)$ となる. これを用いると (A25) 式は, 区間 $\tilde{t} \in [kh, (k+1)h)$ に属する各 $\tilde{t}$ に対して,

$$\|x(\tilde{t})\| = \psi(\tilde{t}; t_p)(A27)$$

を満たす $t_p \in [0, h)$ が存在することを意味する (各 $\tilde{t}$ に応じて $t_p = \tilde{t} - kh$ とすればよい). すなわち, 区間 $[kh, (k+1)h)$ での各 $\tilde{t}$ に対する $\|x(\tilde{t})\|$ の値は, Ψ に属する指数関数 $\psi(t; t_p)$ (のいずれか) の $t = \tilde{t}$ における関数値と一致する. このことと指数関数 $\psi(t; t_p) \in \Psi$ が (A21) 式を満たすことより,

$$\gamma_\ell e^{-\mu \tilde{t}} \leq \|x(\tilde{t})\| \leq \gamma_u e^{-\mu \tilde{t}}, \quad \forall \tilde{t} \in [kh, (k+1)h)(A28)$$

が成り立つ. k は任意の非負の整数なので, $k = 0, 1, 2, \dots$ とした (A28) 式をすべて合わせれば,

$$\gamma_\ell e^{-\mu \tilde{t}} \leq \|x(\tilde{t})\| \leq \gamma_u e^{-\mu \tilde{t}}, \quad \forall \tilde{t} \geq 0(A29)$$

が成り立つ. 上式での記号 $\tilde{t}$ を t と書き換えると (41) 式になる.