有界外乱のもとでの不確かなシステムの ミニマックス推定 —一回帰ベクトルが周期的でない場合*

北村 亘[†]・藤崎 泰正[‡]

Minimax Estimation of Uncertain Systems in the Presence of Bounded Disturbance — Nonperiodic Regressor Case*

Wataru KITAMURA[†] and Yasumasa FUJISAKI[‡]

1. はじめに

有界外乱のもとでの不確かなシステムの同定において、システムパラメータの公称値だけでなく、外乱とパラメータ不確かさの大きさの上界も推定する方法 [1] が提案されている。これは、有界外乱のみが存在するときのミニマックス推定 [2] をパラメータの不確かさも存在する場合へと拡張したものであり、ある確率的仮定のもとで、推定誤差が 0 に収束することが示されている。ただし、その解析では、回帰ベクトルに周期性を仮定しており、この仮定がないときの議論はされていない。

本論文では、回帰ベクトルの周期性を仮定せずに、推定誤差を解析する。具体的には、大きさが一定の 2 組の回帰ベクトルが持続的励振条件を満たし、外乱とパラメータ不確かさが最悪値近傍をとる確率が 0 でないと仮定し、推定誤差の上界を信頼度付きで求める。得られる結果より、これらの条件のもとでは、たとえ回帰ベクトルが周期的でなくても、サンプル数を増加させれば推定誤差が 0 に収束することがわかる。

2. ミニマックス推定

対象システムは、1 入出力の離散時間線形システム

$$y_i = \phi_i^T(\theta + \eta_i) + v_i \quad (1)$$

であるとする。ここで、添字 i は時刻、 $y_i \in \mathbf{R}$ はシステムの出力、 $\phi_i \in \mathbf{R}^m$ は回帰ベクトル、 $\theta \in \mathbf{R}^m$ は同定すべきシステムパラメータの公称値である。また、 $v_i \in \mathbf{R}$ は外乱、 $\eta_i \in \mathbf{R}^m$ はパラメータの不確かさであり、

$$|v_i| \leq \epsilon, \quad \|\eta_i\|_2 \leq \delta \quad (2)$$

* 原稿受付 2004 年 12 月 13 日

† 神戸大学 大学院 自然科学研究科 Graduate School of Science and Technology, Kobe University; 1-1 Rokkodaï, Nada, Kobe, Hyogo 657-8501, JAPAN

‡ 神戸大学 工学部 情報知能工学科 Department of Computer and Systems Engineering, Kobe University; 1-1 Rokkodaï, Nada, Kobe, Hyogo 657-8501, JAPAN

Key Words: minimax estimation, uncertain systems, bounded disturbance, nonperiodic regressor.

とする。ただし、上界 ϵ や δ は未知であるとする。なお、 $\|\bullet\|_2$ は l_2 ノルム $\|\eta_i\|_2 \doteq (\eta_i^T \eta_i)^{1/2}$ とする。

回帰ベクトルの大きさが[§]、 $\|\phi_i^{(1)}\|_2 = b_1$, $\|\phi_i^{(2)}\|_2 = b_2$ と規格化された 2 組の入出力データ $\{y_i^{(1)}, \phi_i^{(1)}\}$, $i = 1, 2, \dots, N_1$, $\{y_i^{(2)}, \phi_i^{(2)}\}$, $i = 1, 2, \dots, N_2$ が与えられているとする。ただし $0 < b_1 < b_2 < \infty$ である。このとき、 θ の推定値 $\hat{\theta}$ は、各組ごとにミニマックス推定を用いると、

$$\hat{\theta}_j \doteq \arg \min_{\hat{\theta}} \max_i |y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \hat{\theta}|, \quad j = 1, 2 \quad (3)$$

と求まる [1]。また、このときの出力誤差の最大値を

$$\xi_j \doteq \max_i |y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \hat{\theta}_j|, \quad j = 1, 2 \quad (4)$$

と定義すれば、 ϵ , δ の推定値 $\hat{\epsilon}$, $\hat{\delta}$ は

$$\hat{\epsilon} \doteq \frac{b_2 \xi_1 - b_1 \xi_2}{b_2 - b_1}, \quad \hat{\delta} \doteq \frac{\xi_2 - \xi_1}{b_2 - b_1} \quad (5)$$

と求まる [1]。

3. 推定誤差の確率的評価

ある $n > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ が存在し、任意の i_0 , $1 \leq i_0 \leq N - n + 1$ に対して

$$\alpha^2 I \leq \sum_{i=i_0}^{i_0+n-1} \phi_i \phi_i^T \leq \beta^2 I$$

が成り立つとき、回帰ベクトル ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ は持続的励振 (Persistently Exciting, PE) 条件を満たすという [3]。ここで、 $A \leq B$ は、 $B - A$ が準正定であることを意味する。いま、 $\mathbf{N}$ は自然数の集合、 $\mathcal{N}(\bullet)$ は集合 $\bullet$ の要素数をあらわすとすれば、以下の補題が成り立つ [4]。

【補題 1】 回帰ベクトル ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ は PE 条件を満たし、 N は $2n$ の整数倍であると仮定して $N = 2nr$ とする。ただし、 $r \in \mathbf{N}$ である。また、 $q \doteq \min_p \left\{ p \in \mathbf{N} : p\alpha \geq \pi\beta\sqrt{n(m-1)} \right\}$ を用いて $\mathcal{P} \doteq 2 + 2q(q-1)^{m-2}$ と定義する。このとき、(i) から (iii) を満たす時刻列の部分列 $\{i_k\}$ の集合 $\mathcal{K}$ が存在する。

(i) $\mathcal{N}(\{i_k\}) \geq r, \quad \forall \{i_k\} \in \mathcal{K}$

(ii) $\mathcal{N}(\mathcal{K}) \leq \mathcal{P}$ (iii) 任意の $x \in \mathbf{R}^m$ に対して, ある $\{i_k\}$ が存在して

$$x^T \phi_{i_k} \leq -\frac{\alpha}{2\sqrt{n}} \|x\|_2, \quad \forall k \quad (6)$$

$$x^T \phi_{i_k} \geq \frac{\alpha}{2\sqrt{n}} \|x\|_2, \quad \forall k \quad (7)$$

のいずれかが成り立つ.

外乱 v_i が $|v_i| \leq \epsilon$ を満たす確率変数であり, 任意の $\rho > 0$, i について, ある $p_v(\rho) > 0$ が存在し

$$\Pr\{-\epsilon \leq v_i \leq -(\epsilon - \rho)\} \geq p_v(\rho)$$

$$\Pr\{\epsilon - \rho \leq v_i \leq \epsilon\} \geq p_v(\rho)$$

が成り立つとき, ϵ は密着性(tightness)をもつという [5]. 同様に, パラメータ不確かさ η_i が $\|\eta_i\|_2 \leq \delta$ を満たす確率変数であり, 任意の $\mu > 0$, i , ϕ_i について, ある $p_\eta(\mu) > 0$ が存在し

$$\Pr\{-\delta \|\phi_i\|_2 \leq \phi_i^T \eta_i \leq -(\delta - \mu) \|\phi_i\|_2\} \geq p_\eta(\mu)$$

$$\Pr\{(\delta - \mu) \|\phi_i\|_2 \leq \phi_i^T \eta_i \leq \delta \|\phi_i\|_2\} \geq p_\eta(\mu)$$

が成り立つとき, δ は密着性をもつという [6]. ここで, $\Pr\{\bullet\}$ は事象 $\bullet$ が起こる確率をあらわす. このとき, 次の補題 [6] が成り立つ.

【補題 2】 外乱 v_i , パラメータの不確かさ η_i が独立な確率変数であり, 上界 ϵ と δ がともに密着性をもてば, 任意の $\rho > 0$, $\mu > 0$, i , ϕ_i について

$$\Pr\{-(\epsilon + \delta \|\phi_i\|_2) \leq v_i + \phi_i^T \eta_i \leq -(\epsilon - \rho) - (\delta - \mu) \|\phi_i\|_2\} \geq p_v(\rho) p_\eta(\mu) \quad (8)$$

$$\Pr\{\epsilon - \rho + (\delta - \mu) \|\phi_i\|_2 \leq v_i + \phi_i^T \eta_i \leq \epsilon + \delta \|\phi_i\|_2\} \geq p_v(\rho) p_\eta(\mu) \quad (9)$$

が成立する.

2 組の回帰ベクトル $\phi_i^{(1)}$, $\phi_i^{(2)}$ がそれぞれ PE 条件を満足するとし, それに対応して PE 条件と補題 1 における定数 α , n , r , $\mathcal{P}$ の右下に添字 $j=1,2$ を付けてあらわすとすれば, 以下の定理が成り立つ.

【定理 1】 (1) 式のシステムにおいて, $\phi_i^{(j)}$, $j=1,2$ が確定的, PE 条件を満たすとする. また, v_i , η_i が独立な確率変数であり, それらの上界 ϵ , δ が密着性をもつとする. このとき, θ の推定誤差について,

$$\Pr\left\{\|\theta - \hat{\theta}_j\| \leq \frac{2\sqrt{n_j}}{\alpha_j} (\rho + b_j \mu)\right\} \geq c_{p_j} \quad (10)$$

が成り立つ. ここで, c_{p_j} は

$$c_{p_j} \leq 1 - \mathcal{P}_j (1 - p_v(\rho) p_\eta(\mu))^{r_j}$$

を満たす正の定数である.

(証明) 証明の手順は, $j=1,2$ と同様なので, 以下では, j は省略する. まず,

$$e_i \doteq v_i + \phi_i^T \eta_i, \quad \nu \doteq \epsilon + \delta b \quad (11)$$

とすれば, (2) 式より, $\nu \pm e_i \geq 0$ である. さて, ミニマックス推定が (3) 式でおこなわれることに注意すれば,

$$|y_i - \phi_i^T \hat{\theta}| \leq \nu \quad (12)$$

であることがわかる. よって, (1) 式, (12) 式より

$$-(\nu + e_i) \leq \phi_i^T (\theta - \hat{\theta}) \leq \nu - e_i \quad (13)$$

である. いま, $x = \theta - \hat{\theta}$ とおけば, 補題 1 の (iii) より, (6) 式または (7) 式のどちらかを満たす $\{i_k\} \in \mathcal{K}$ が必ず存在するので,

$$\|\theta - \hat{\theta}\|_2 \leq \frac{2\sqrt{n}}{\alpha} \max_{\{i_k\} \in \mathcal{K}} \psi(\{i_k\})$$

と評価できる. ここで, $\psi(\{i_k\})$ は

$$\psi(\{i_k\}) \doteq \begin{cases} \min_k (\nu + e_{i_k}) & \text{if (6) holds} \\ \min_k (\nu - e_{i_k}) & \text{if (7) holds} \end{cases}$$

である. したがって推定誤差は

$$\begin{aligned} & \Pr\left\{\|\theta - \hat{\theta}\|_2 \leq \frac{2\sqrt{n}}{\alpha} (\rho + \mu b)\right\} \\ & \geq \Pr\left\{\max_{\{i_k\} \in \mathcal{K}} \psi(\{i_k\}) \leq \rho + \mu b\right\} \\ & = 1 - \Pr\left\{\max_{\{i_k\} \in \mathcal{K}} \psi(\{i_k\}) > \rho + \mu b\right\} \end{aligned} \quad (14)$$

と確率的に評価できる. いま $\psi(\{i_k\}) = \min_k (\nu + e_{i_k})$ のとき $\psi(\{i_k\})$ が最大値をとる場合には, 補題 1 の (ii), 補題 1 の (i), 補題 2 の (8) 式を順に適用することにより

$$\begin{aligned} & \Pr\left\{\max_{\{i_k\} \in \mathcal{K}} \min_k (\nu + e_{i_k}) > \rho + \mu b\right\} \\ & \leq \mathcal{N}(\mathcal{K}) \cdot \Pr\left\{\min_k (\nu + e_{i_k}) > \rho + \mu b\right\} \\ & \leq \mathcal{P} \cdot \Pr\{\nu + e_{i_k} > \rho + \mu b \forall k\} \\ & \leq \mathcal{P} (1 - \Pr\{\nu + e_i \leq \rho + \mu b\})^r \\ & \leq \mathcal{P} (1 - p_v(\rho) p_\eta(\mu))^r \end{aligned} \quad (15)$$

となる. 一方, $\psi(\{i_k\}) = \min_k (\nu - e_{i_k})$ のとき $\psi(\{i_k\})$ が最大値をとる場合にも, 同様に

$$\begin{aligned} & \Pr\left\{\max_{\{i_k\} \in \mathcal{K}} \min_k (\nu - e_{i_k}) > \rho + \mu b\right\} \\ & \leq \mathcal{P} (1 - \Pr\{\nu - e_i \leq \rho + \mu b\})^r \\ & \leq \mathcal{P} (1 - p_v(\rho) p_\eta(\mu))^r \end{aligned} \quad (16)$$

となる. これら (14)~(16) 式より (10) 式を得る. $\square$

つぎに, ϵ と δ の推定誤差について考察する.

【補題 3】 定理 1 と同様の仮定をおく. このとき,

$$\Pr\{\epsilon - 2\rho + (\delta - 2\mu)b_j \leq \xi_j \leq \epsilon + \delta b_j\} \geq c_{p_j} \quad (17)$$

が成立する.

(証明) 定理 1 の証明と同様に, j を省略する. なお, (12) 式より, (4) 式の ξ の上界に関する不等号は

確率 1 で成立するので、 ξ の下界のみ議論する．まず、 $\phi_i^T(\theta - \hat{\theta}) \leq 0$ のとき、(11) 式で定義した e_i , ν について

$$-\nu \leq e_i \leq -\nu + \rho + \mu b \quad (18)$$

であると仮定すれば、(13) 式から

$$-(\rho + \mu b) \leq \phi_i^T(\theta - \hat{\theta}) \leq 0$$

となり、

$$|e_i| - |\phi_i^T(\theta - \hat{\theta})| \geq \nu - 2(\rho + \mu b) \quad (19)$$

を得る．一方、 $\phi_i^T(\theta - \hat{\theta}) > 0$ のとき、

$$\nu - (\rho + \mu b) \leq e_i \leq \nu \quad (20)$$

であると仮定すれば、(13) 式から

$$0 < \phi_i^T(\theta - \hat{\theta}) \leq \rho + \mu b$$

となり、同様に (19) 式が成立する．以上より、補題 2 を用いて (18), (20) 式が成り立つ確率を評価すれば、結局

$$\begin{aligned} & \Pr\{|e_i| - |\phi_i^T(\theta - \hat{\theta})| \geq \nu - 2(\rho + \mu b)\} \\ & \geq p_v(\rho)p_\eta(\mu) \end{aligned} \quad (21)$$

であることがわかる．さて、 ξ の下界の確率は

$$\begin{aligned} & \Pr\{\xi \geq \epsilon - 2\rho + (\delta - 2\mu)b\} \\ & = 1 - \Pr\{\xi < \nu - 2(\rho + \mu b)\} \end{aligned} \quad (22)$$

と書ける．これに、補題 1 の (ii)、補題 1 の (i)、(21) 式を順に適用することにより

$$\begin{aligned} & \Pr\{\xi < \nu - 2(\rho + \mu b)\} \\ & \leq \Pr\left\{\max_{\{i_k\} \in \mathcal{K}} \left\{ \max_k |y_{i_k} - \phi_{i_k}^T \hat{\theta}| \right\} < \nu - 2(\rho + \mu b)\right\} \\ & \leq \mathcal{N}(\mathcal{K}) \cdot \Pr\left\{\max_k |y_{i_k} - \phi_{i_k}^T \hat{\theta}| < \nu - 2(\rho + \mu b)\right\} \\ & \leq \mathcal{P} \cdot \Pr\{|e_{i_k}| - |\phi_{i_k}^T(\theta - \hat{\theta})| < \nu - 2(\rho + \mu b), \forall k\} \\ & = \mathcal{P}(1 - \Pr\{|e_i| - |\phi_i^T(\theta - \hat{\theta})| \geq \nu - 2(\rho + \mu b)\})^r \\ & \leq \mathcal{P}(1 - p_v(\rho)p_\eta(\mu))^r \end{aligned} \quad (23)$$

となる．これら (22), (23) 式より (17) 式を得る． $\square$
このとき、以下の定理が成り立つ．

【定理 2】 (1) 式のシステムにおいて、 $\phi_i^{(j)}$, $j=1,2$ が確定的で、PE 条件を満足するとする．また、 v_i と η_i が独立な確率変数であり、 ϵ , δ が密着性をもつとする．このとき、 ϵ , δ の推定誤差について以下が成り立つ．

$$\Pr\left\{-\frac{2b_1(\rho + b_2\mu)}{b_2 - b_1} \leq \epsilon - \hat{\epsilon} \leq \frac{2b_2(\rho + b_1\mu)}{b_2 - b_1}\right\} \geq c_{p_1}c_{p_2} \quad (24)$$

$$\Pr\left\{-\frac{2(\rho + b_1\mu)}{b_2 - b_1} \leq \delta - \hat{\delta} \leq \frac{2(\rho + b_2\mu)}{b_2 - b_1}\right\} \geq c_{p_1}c_{p_2} \quad (25)$$

(証明) 推定値 $\hat{\epsilon}$, $\hat{\delta}$ の定義である (5) 式を、補題 3 の ξ_j に関する (17) 式の不等式を用いて評価すれば、

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon} & \geq \frac{b_2\{\epsilon - 2\rho + (\delta - 2\mu)b_1\} - b_1(\epsilon + \delta b_2)}{b_2 - b_1} \\ & = \epsilon - \frac{2b_2(\rho + b_1\mu)}{b_2 - b_1} \\ \hat{\epsilon} & \leq \frac{b_2(\epsilon + \delta b_1) - b_1\{\epsilon - 2\rho + (\delta - 2\mu)b_2\}}{b_2 - b_1} \\ & = \epsilon + \frac{2b_1(\rho + b_2\mu)}{b_2 - b_1} \\ \hat{\delta} & \geq \frac{\epsilon - 2\rho + (\delta - 2\mu)b_2 - (\epsilon + \delta b_1)}{b_2 - b_1} \\ & = \delta - \frac{2(\rho + b_2\mu)}{b_2 - b_1} \\ \hat{\delta} & \leq \frac{\{\epsilon + \rho + (\delta + \mu)b_2\} - \{\epsilon - 2\rho + (\delta - 2\mu)b_1\}}{b_2 - b_1} \\ & = \delta + \frac{2(\rho + b_1\mu)}{b_2 - b_1} \end{aligned}$$

となり、(24), (25) 式の不等式を得る．これらの信頼度は、補題 3 の評価が $j=1,2$ でともに成り立つ確率となり、これらは互いに独立であるから、 $c_{p_1}c_{p_2}$ となる． $\square$

定理 1, 2 より、推定誤差が ρ , μ に対して線形であり、その信頼度 c_{p_j} が $r_j \rightarrow \infty$ で 1 に漸近することがわかる．よって、参考文献 [1] と同様の手順で、サンプル数の増加につれて推定誤差が 0 に確率収束することを示すことができる．つまり、回帰ベクトルの周期性を仮定しない場合でも、仮定した場合 [1] と同様に、推定誤差の収束性を保証できる．

参考文献

- [1] 北村, 藤崎: 有界外乱のもとでの不確かなシステムのミニマックス推定; 計測自動制御学会論文集, Vol. 41, No. 2, pp. 111–117 (2005)
- [2] E.-W. Bai, H. Cho and R. Tempo: Convergence properties of the membership set; *Automatica*, Vol. 34, No. 10, pp. 1245–1249 (1998)
- [3] S. Dasgupta and Y.-F. Huang: Asymptotically convergent modified recursive least squares with data dependent updating and forgetting factor for system with bounded noise; *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 33, No. 3, pp. 383–392 (1987)
- [4] H. Akçay: The size of the membership set in a probabilistic framework; *Automatica*, Vol. 40, No. 2, pp. 253–260 (2004)
- [5] E.-W. Bai, R. Tempo and H. Cho: Membership set estimators; Size, optimal input, complexity and relations with least squares; *IEEE Trans. on Circuits and Systems –Part I*, Vol. 42, No. 5, pp. 266–277 (1995)
- [6] W. Kitamura and Y. Fujisaki: Convergence properties of the membership set in the presence of disturbance and parameter uncertainty; 計測自動制御学会論文集, Vol. 39, No. 4, pp. 382–387 (2003)