ロボットマニピュレータの非線形適応 H_∞ 制御*

宮里 義彦†

Nonlinear Adaptive H_∞ Control for Robotic Manipulators*

Yoshihiko MIYASATO†

1. 緒言

近年、逆最適化の観点に立って、漸近安定であるだけでなく特定の評価関数に対して最適あるいは準最適となるような非線形制御系や適応制御系の構成に関する研究が行われている [1-5]. これに関連して、本速報では逆最適化に基づくロボットマニピュレータの非線形適応 H_∞ 制御について論じる. 提案する手法では、外乱とシステムパラメータの推定誤差を H_∞ 制御問題の外乱と見なし [5], 外乱から入力項も含む一般化出力への $\mathcal{L}_2$ ゲインを規定する. このため通常の外乱だけでなくパラメータの推定誤差にロバストな非線形適応制御系が構成される. なお同様の問題を扱ったものに [6,7] があるが、本速報ではパラメータ誤差を外乱項に含めて設計する点で、[6,7] を包含した結果になっている.

2. 問題設定

n 自由度のロボットマニピュレータを考える.

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = \tau + d \quad (1)$$

ただし $\theta \in \mathbf{R}^n$ は関節角, $M(\theta) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ は慣性行列, $C(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ はコリオリ・遠心力項, $G(\theta) \in \mathbf{R}^n$ は重力項, τ は入力トルク (制御入力), d は外乱とする. $M(\theta)$, $C(\theta, \dot{\theta})$, $G(\theta)$ に含まれるシステムパラメータと外乱 d は未知とし, θ , $\dot{\theta}$ および τ は測定可能とする. 回転型のロボットマニピュレータには次の性質がある [8].

- (1) $M(\theta)$ は有界で正定対称行列である.
- (2) $\dot{M}(\theta) - 2C(\theta, \dot{\theta})$ は歪み対称行列である.
- (3) (1) 式の右辺は以下の形式に書かれる.

$$M(\theta)a + C(\theta, \dot{\theta})b + G(\theta) = \Omega(\theta, \dot{\theta}, a, b)^T \Phi \quad (2)$$

* 原稿受付 2005 年 1 月 12 日

† 統計数理研究所 予測制御研究系 Department of Prediction and Control, The Institute of Statistical Mathematics; Minami-Azabu, Minato-ku, Tokyo 106-8569, JAPAN

Key Words: adaptive control, nonlinear control, H_∞ control, robotic manipulator.

ただし $\Omega(\theta, \dot{\theta}, a, b)$ は θ , $\dot{\theta}$, a , b に関する既知の関数であり, Φ は未知のシステムパラメータである. 制御目的は, 関節角 θ が望ましい規範信号 θ_d に追従しつつ, 同時に特定の H_∞ 制御特性が実現されるように, 制御入力 τ を適切に決定することである.

3. 目標値追従制御系

目標値追従制御系の基本構成 [6,9] を示す. 目標軌道 θ_d に対する追従誤差信号を

$$e \equiv \theta - \theta_d, \quad s \equiv \dot{e} + \lambda e \quad (\lambda > 0) \quad (3)$$

のように定めて, 入力トルク τ を次のように発生させる.

$$\tau = \Omega(\theta, \dot{\theta}, a, b)^T \hat{\Phi} - e + v \quad (4)$$

$$a \equiv \ddot{\theta}_d + \lambda^2 e - \lambda s, \quad b \equiv \dot{\theta}_d - \lambda e \quad (5)$$

ただし $\hat{\Phi}$ は未知パラメータ Φ の推定値で, v は後に定める安定化信号である. これに対して正定関数 V を定めて

$$V = \frac{1}{2} s^T M(\theta) s + \frac{1}{2} \|e\|^2 \quad (6)$$

マニピュレータの性質の (1), (2), (3) に着目して軌道に沿って時間微分すると次式を得る.

$$\dot{V} = -\lambda \|e\|^2 + s^T v + s^T d + s^T \Omega(\theta, \dot{\theta}, a, b)^T \tilde{\Phi} \quad (7)$$

$$\tilde{\Phi} \equiv \hat{\Phi} - \Phi \quad (8)$$

ただし a と b の定義は (5) 式によるものとする.

4. 非線形適応 H_∞ 制御

提案する非線形適応 H_∞ 制御について述べる. まず適応則を特に規定しない非線形 H_∞ 制御について論じ, 次に $\hat{\Phi}$ の調整に射影型適応則を用いた非線形適応 H_∞ 制御を述べる. どちらの制御方式も制御系の有界性が保証され, 特定の H_∞ 制御性能が達成される.

4.1 非線形 H_∞ 制御

本節では $\hat{\Phi}$ は任意の有界な設計パラメータとする. 提案する非線形 H_∞ 制御方式は d とパラメータ推定誤差 $\tilde{\Phi}$ を外乱と見なす H_∞ 制御問題の解として導出される [5].

このために次の仮想システムを導入する.

$$\dot{x} = f(x) + g_{11}(x)d + g_{12}(x)\tilde{\Phi} + g_2v \quad (9)$$

$$x = \begin{bmatrix} e \\ s \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} -\lambda e \\ -M^{-1}Cs \end{bmatrix}$$

$$g_{11}(x) = g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}$$

$$g_{12}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}\Omega^T \end{bmatrix} \quad (10)$$

仮想システム (9), (10) の軌道に沿って V (6) を時間微分すると (7) が得られることに注意する. この仮想システムに対して次式の Hamilton-Jacobi-Issacs 方程式 (HJI 方程式) を考え, 解 V を (6) 式で与える.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}_f V \\ & + \frac{1}{4} \left\{ \frac{\|\mathcal{L}_{g_{11}} V\|^2}{\gamma_1^2} + \frac{\|\mathcal{L}_{g_{12}} V\|^2}{\gamma_2^2} - \mathcal{L}_{g_2} V R^{-1} (\mathcal{L}_{g_2} V)^T \right\} \\ & + q(x) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ただし $q(x)$ は正值の関数, R は正定対称行列であり, 逆最適化の観点から, HJI 方程式 (11) より, 解 V (6) と正定数 γ_1, γ_2 に対して求められる. 解 V (6) を HJI 方程式 (11) に代入すると以下の式が得られる.

$$-\lambda \|e\|^2 + \frac{\|s\|^2}{4\gamma_1^2} + \frac{s^T \Omega^T \Omega s}{4\gamma_2^2} - \frac{1}{4} s^T R^{-1} s + q(x) = 0 \quad (12)$$

これより正值の関数 $q(x)$ と正定行列 R は

$$q = \lambda \|e\|^2 + \frac{1}{4} s^T K s \quad (13)$$

$$R = \left(\frac{1}{\gamma_1^2} I + \frac{1}{\gamma_2^2} \Omega^T \Omega + K \right)^{-1}, \quad (K = K^T > 0) \quad (14)$$

のように求められる. また入力信号 (安定化信号) v は対応する H_∞ 制御問題の解として次のように決定される.

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{2} R^{-1} (\mathcal{L}_{g_2} V)^T = -\frac{1}{2} R^{-1} s \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma_1^2} I + \frac{1}{\gamma_2^2} \Omega^T \Omega + K \right) s \end{aligned} \quad (15)$$

この時, もとの制御対象 (1) に対して **定理 1** が成立する.

【定理 1】 (4), (5), (15) から構成されるロボットマニピュレータ (1) の非線形制御系は, 任意の有界な設計パラメータ $\hat{\Phi}$ と任意の有界外乱 d に対して, 有界となる. また v は以下の評価関数 J を最小化する最適制御入力である.

$$\begin{aligned} J = \sup_{d, \hat{\Phi} \in \mathcal{L}^2} & \left\{ \int_0^T (q + v^T R v) d\tau + V(t) \right. \\ & \left. - \gamma_1^2 \int_0^T \|d\|^2 d\tau - \gamma_2^2 \int_0^T \|\tilde{\Phi}\|^2 d\tau \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

さらに次の不等式が成立する.

$$\begin{aligned} & \int_0^T (q + v^T R v) d\tau + V(t) \\ & \leq \gamma_1^2 \int_0^T \|d\|^2 d\tau + \gamma_2^2 \int_0^T \|\tilde{\Phi}\|^2 d\tau + V(0) \end{aligned} \quad (17)$$

(証明) HJI 方程式 (11), (12) を考慮すると $\dot{V}$ が以下のように評価される.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \left(v + \frac{1}{2} R^{-1} s \right)^T R \left(v + \frac{1}{2} R^{-1} s \right) - v^T R v \\ & - \gamma_1^2 \left\| d - \frac{s}{2\gamma_1^2} \right\|^2 + \gamma_1^2 \|d\|^2 \\ & - \gamma_2^2 \left\| \tilde{\Phi} - \frac{\Omega s}{2\gamma_2^2} \right\|^2 + \gamma_2^2 \|\tilde{\Phi}\|^2 - q \end{aligned} \quad (18)$$

これより v (15) が J の最適解であることと, 不等式 (17) の成立が示される. また (15) を (18) に代入すると

$$\dot{V} \leq -q - v^T R v + \gamma_1^2 \|d\|^2 + \gamma_2^2 \|\tilde{\Phi}\|^2 \quad (19)$$

が得られることから, 制御系の有界性も示される. $\square$

(注意 1) 提案する制御方式 (15) において $\gamma_2 \rightarrow \infty$ とすると, 通常の適応 H_∞ 制御で用いられる制御則と同じ構造になり [6,7], 外乱 d から一般化出力 $\sqrt{q + v^T R v}$ への $\mathcal{L}_2$ ゲインが規定される. また $\gamma_1, \gamma_2 \rightarrow \infty$ とすると, $\int_0^T (q + v^T R v) d\tau$ を評価関数とする最適制御問題の解となるが, 得られる制御則は通常の適応制御で用いられるものと同じ形式になる [6,9].

4.2 非線形適応 H_∞ 制御

次に設計パラメータ $\hat{\Phi}$ を適応的に決定する適応 H_∞ 制御方式について述べる. $d(\neq 0)$ に対応して, 以下の射影型適応則 [10] を導入する.

$$\begin{aligned} & \text{if } \|\hat{\Phi}(t)\| = N_\Phi \text{ \& } \hat{\Phi}(t)^T \Gamma \Omega(t) s(t) < 0 \\ & \quad \dot{\hat{\Phi}}(t) = -\Gamma \Omega(t) s(t) + \Gamma \frac{\hat{\Phi}(t) \hat{\Phi}(t)^T}{\hat{\Phi}(t)^T \Gamma \hat{\Phi}(t)} \Gamma \Omega(t) s(t) \\ & \text{otherwise} \\ & \quad \dot{\hat{\Phi}}(t) = -\Gamma \Omega(t) s(t) \end{aligned} \quad (20)$$

ただし $\|\Phi\| \leq N_\Phi$, $\|\hat{\Phi}(0)\| \leq N_\Phi$ であり, N_Φ は既知とする. すると以下の W

$$W = V + \frac{1}{2} \tilde{\Phi}^T \Gamma^{-1} \tilde{\Phi} \quad (21)$$

に対して $\dot{W}$ が以下ようになる (不等号は射影の操作のため).

$$\dot{W} \leq -\lambda \|e\|^2 + s^T v + s^T d \quad (22)$$

これは $\tilde{\Phi} = 0$ とおいた仮想システム (9), (10) に対応する. したがって 4.1 と同様の論法により, v (15) および適応則 (20) に対して次の定理が導かれる.

【定理 2】 (4), (5), (15), (20) より構成されるロボットマニピュレータ (1) の非線形適応制御系は, 任意の有界な外乱 d に対して有界となる. また v は以下の評価関数 J の上界を最小化する準最適制御入力になる.

$$J = \sup_{d \in \mathcal{L}^2} \left\{ \int_0^T (q + v^T R v) d\tau + W(t) - \gamma_1^2 \int_0^T \|d\|^2 d\tau \right\} \quad (23)$$

さらに次の不等式も成立する.

$$\int_0^T (q + v^T R v) d\tau + W(t) \leq \gamma_1^2 \int_0^T \|d\|^2 d\tau + W(0) \quad (24)$$

とくに $d \in \mathcal{L}^2$ のときは, 追従誤差 e , s は零に収束する.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e = \lim_{t \rightarrow \infty} s = 0$$

(証明) 射影型適応則により $\hat{\Phi} \in \mathcal{L}^\infty$ が成立する. したがって定理 1 より適応系の有界性が保証される. v の準最適性と (24) は, (18) において $\tilde{\Phi}$, V , 等号をそれぞれ 0, W , 不等号に置き換えることで, 容易に導かれる. $\square$

(注意 2) 提案する適応制御系においては定理 1 も成立するので, パラメータ推定誤差 $\tilde{\Phi}$ に対してロバストとなり, 少ない制御コストで良好な過渡特性が得られる.

(注意 3) 提案する適応制御手法は類似の非線形ダンピング項が使われている点で [11] の研究に密接な関係がある. しかし本稿の手法は特定の H_∞ 制御問題の解として導出され, 制御項も評価に加えられている点が異なる.

5. 数値例

手法の有効性を確認するために SICE-DD アーム (2 自由度) のデータ (Table 1) を用いて数値実験を行った.

Table 1 Physical parameters		
Link (i)	1	2
m_i [kg]	12.27	2.083
I_i [kg · m ²]	0.1149	0.0144
l_i [m]	0.2	0.2
r_i [m]	0.063	0.080

マニピュレータの目標軌道は次式で表される ($0 \leq t \leq 1$).

$$\theta_{d1}(t) = 6\pi \cdot \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right), \quad \theta_{d2}(t) = \pi - 2\theta_{d1}(t)$$

パラメータ推定誤差に対する結果の比較を行うために $d=0$ と設定した. 設計パラメータは以下のように選んだ.

$$\Gamma = I, \quad \lambda = 1, \quad K = I, \quad N_\Phi = 50, \quad \hat{\Phi}(0) = 0$$

数値実験は次の三つのケースについて行った.

- Case 1: 通常の適応制御 [6,9] ($\gamma_1, \gamma_2 \rightarrow \infty$)
- Case 2: 通常の適応 H_∞ 制御 [6,7] ($\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 \rightarrow \infty$)
- Case 3: 提案法 ($\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.1$)

結果を Table 2 に示す ($\|e(\cdot)\|^2 \equiv \int_0^1 \|e(t)\|^2 dt$, $\|\tau(\cdot)\|^2 \equiv \int_0^1 \|\tau(t)\|^2 dt$). Case 3 の場合が, 最も少ない制御入力

で一番良好な追従特性が得られていることがわかる. 具体的な応答結果を調べると, Case 1 と Case 2 の場合に入力トルクが振動的に変化するのに対し, Case 3 の場合は入力トルクが振動的にならずに良好な特性が得られた.

Table 2 Simulation results

	Case 1	Case 2	Case 3
$\ e(\cdot)\ ^2$	0.45948E-02	0.25992E-02	0.54750E-03
$\ \tau(\cdot)\ ^2$	0.62115E+01	0.55803E+01	0.46626E+01

6. 結言

ロボットマニピュレータに対する非線形適応 H_∞ 制御系の構成法について述べた. 提案する手法は, 外乱とパラメータの推定誤差を等価的な外乱と見なした H_∞ 制御問題の解として導出される. 数値実験の結果 (Table 2) から, 提案する手法 (Case 3) が通常の適応制御 (Case 1) や通常の適応 H_∞ 制御 (Case 2) と比較して, より少ない制御コストでより良好な過渡特性を有していることがわかる. これは適応パラメータの誤差を外乱と見なした H_∞ 制御の外乱抑制効果と, 制御入力 (安定化信号) が対応する H_∞ 制御問題の評価関数に含まれているためと考えられる.

参考文献

- [1] M. Krstić and H. Deng: *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems*, Springer (1998)
- [2] 宮里: 逆最適性に基づく非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御; 計測と制御, Vol. 39, No. 2, pp. 112–118 (2000)
- [3] 宮里: 適応 $\mathcal{H}_\infty$ 制御系の構成法; 計測と制御, Vol. 40, No. 10, pp. 692–697 (2001)
- [4] 宮里: 最適性に基づく適応制御系の再設計; 計測自動制御学会論文誌, Vol. 38, No. 9, pp. 765–774 (2002)
- [5] 宮里: パラメータを外乱と見なした非線形適応 $\mathcal{H}_\infty$ 制御系の構成法; 計測自動制御学会論文誌, Vol. 39, No. 10, pp. 914–923 (2003)
- [6] 佐藤, 渡辺: 逆最適性に基づくロボットシステムの適応型 H^2 , H^∞ 制御; 第 23 回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, pp. 369–372 (2000)
- [7] 佐藤: 最適性を考慮したロボットシステムの適応型 H^∞ 制御 - 設計の自由度についての考察; 第 1 回制御部門大会資料, pp. 587–590 (2001)
- [8] M. W. Spong and M. Vidyasagar: *Robot Dynamics and Control*, John Wiley & Sons (1989)
- [9] 申, 田村: ロボットシステムのロバスト軌道追従制御 - 消散性理論からのアプローチ -; 計測自動制御学会論文誌, Vol. 35, No. 3, pp. 326–332 (1999)
- [10] P. A. Ioannou and J. Sun: *Robust Adaptive Control*, PTR Prentice-Hall (1996)
- [11] P. Tomei: Robust adaptive control of robots with arbitrary transient performance and disturbance attenuation; *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 44, pp. 654–658 (1999)