二次元評価関数を持つ離散時間線形量子的最適制御問題 解法のために必要な多次元解求解のための一計算的方法*

宗像 経博[†]・イリハム キリム[‡]

On a Calculative Method for Multi-dimensional Solutions of Quantized Linear Discrete Optimal Control Problem with a Two-dimensional Performance Function*

Tsunehiro MUNAKATA[†] and Ilham KERIM[‡]

1. はじめに

システムの制御入力、許容制御として所与の離散値(たとえば整数値)を取るような制御システムを量子的制御システム [1,3] という。

複数ロボットの協調制御、戦闘機の編隊制御等で近年話題になっているハイブリッド制御は、この量子的制御と離散値制御でかわりを持つものである。

本速報では、最初に離散値の完全最適および非劣解について確認する。つぎに、二次の評価関数を持つ離散時間線形量子的最適制御問題を Halkin の定式化 [2] に基づいて与える¹。そして量子的離散形最大原理 [3] を本速報での問題を解く一手法として言及する。ところで、この最大原理を用いる際、随伴システムの逆時間方向の初期値ベクトルの導出が必要であるが、その前提となる完全最適解あるいは非劣解を求解する方法として、以前は幾何的(図的)な方法を提案していた。本速報では、幾何学的考察に基づく計算的方法による求解法として、8ステップのアルゴリズムによる方法を提案する。最後に、提案の方法への適用例として5次の数値例を与える。

2. 離散値変数問題のための多次元解について

離散値の多次元解に対する定義が、本学会誌のバックナンバーである参考文献 [3] で与えられている。制御的には、連続値制御の結果としての連続値状態量に対して、Zadeh [4] が与えた多次元解の考え(定義)を、離散値制御の結果としての離散値状態量(量子的システムの状態量)に適用したもので、なじみの多くない離散値の完全最適解、離散値の非劣解、 $co W$ (離散集合 W の凸包)の境界点(最外郭点)である凸包点等が、本速報での制御問題を解くために用いられる。参考文献 [3] の Fig.2 と Fig.3 を参照のこと。

3. 二次元評価関数を持つ離散時間線形量子的最適制御問題に対する多次元解へのアルゴリズム

3.1 問題の記述

状態方程式は次のように与える。

$$x(i+1) - x(i) = A(i)x(i) + g(i, u(i)), \quad i = 0, 1, 2, \dots, k-1 \quad (1)$$

ここで、

x : 状態ベクトル, $(n+1)$ 次元状態実空間 R^{n+1} の要素

u : 制御ベクトル, r 次元実空間 R^r の部分集合 Ω (Ω : 有界, 有限な要素から作られる許容制御の集合) の要素²

A : $(n+1)$ 次元正方形行列

g : $(n+1)$ 次元ベクトル値関数

k : ある固定された正の整数。

* 原稿受付 2005年2月17日

[†] 広島国際学院大学 Mechanical Engineering, Hiroshima Kokusai Gakuin University; 6-20-1, Nakano, Aki-ku, Hiroshima 739-0321, JAPAN

[‡] 広島大学大学院 Graduate School of Engineering, Hiroshima University; 1-4-1, Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, Hiroshima 739-8527, JAPAN

Key Words: quantized discrete control, two-dimensional problem, calculative method, noninferior solution.

¹参考文献 [2] で与えられる Halkin の最適制御問題は、離散時間線形連続値制御で、この制御に関して有界、閉、凸性という位相的条件のみを課し、幾何学的アプローチにより最適条件を求めようとする最大化問題で一般的な最適制御問題である。本速報では、Halkin の課している位相的条件に注目し、制御変数を離散化して、量子的制御システムとし、評価関数を多次元(2次元)化して用いている。

²例えば参考文献 [6] のように、連続時間システムの離散時間化と同様に、制御変数の離散化も二種類: ①制御システムの制御変数自体は連続であるが、取り得る値を離散値とする場合、②制御システムの制御変数が本質的に離散値を取る場合、が考えられる。本速報では、①の場合を扱っている。したがって、状態変数値も①の状況での離散値を取っている。

次の事項を仮定する. (i) $g(i, u(i))$ は, 各 $i=0, 1, 2, \dots, k-1$ において, u に対して有界な関数である. (ii) $I+A(i)$ は, 各 $i=0, 1, 2, \dots, k-1$ において, 正則行列である. なお, I は単位行列である.

初期条件は次のように与える: $x(0) = x_0$.

本速報での制御問題を次のように与える:

与えられた初期値 x_0 に対し, 状態方程式 (1) を満たし,

$$x(k) \in R^{n+1} \text{ (終端条件は自由)} \quad (2)$$

かつ評価関数 (2 次元ベクトル値関数):

$$\begin{bmatrix} x^n(k) \\ x^{n+1}(k) \end{bmatrix} : \text{最大} \quad (3)$$

とするような操作量の列 $\{u(i)\}, i=0, 1, 2, \dots, k-1$ と, 対応する状態量 $\{x(i)\}, i=0, 1, 2, \dots, k$ を求めよ.

ここに, $x^n(k)$ と $x^{n+1}(k)$ は, それぞれ $x(k)$ の n 番目と $(n+1)$ 番目の要素を表す. なお, 評価関数すなわちベクトル値関数 (3) の最大化とは, 状態ベクトル $x(k)$ でその n 番目と $(n+1)$ 番目の要素について, **2.** で確認した離散値の完全最適解あるいは非劣解として最大となる $x(k)$ を見つけることを意味する. また, ここでの制御問題を満たす操作量の列および対応する状態量をそれぞれ $\{\hat{u}(i)\}, i=0, 1, 2, \dots, k-1; \{\hat{x}(i)\}, i=0, 1, 2, \dots, k$ と表すことにする. なお, 本速報での定式化は, Halkin の連続値制御問題の定式化を参考に行っている.

3.2 アルゴリズム

状態方程式が (1) である制御問題において, 状態ベクトルの次数は $(n+1)$, 評価関数の次数は 2 である. したがって, 運動空間の次数は $(n-1)$ となる. そしてこの運動空間はベクトル $e^1, e^2, \dots, e^{n-1}$ によって作られる $(n-1)$ 次元空間である. なお, e^i は i 番目の要素のみが 1 の単位ベクトルである. 評価関数は 2 次元であるので, **2.** で確認された定義により, 完全最適解あるいは非劣解は, Halkin の状態変数表現である $x(k)$ の $(n+1)$ 次元の状態量を考え, その一部分である最後の二要素に対応させてある評価関数の作る 2 次元平面への状態量の写像結果に対して, 探索することにする.

時刻 i での到達可能集合を $W(i)$ とする. (1) で表されるシステムでは, 最終時刻は k だが, その随伴システムでは, 初期値は逆時間方向で $\hat{p}(k)$ である. この随伴ベクトルを得るために必要な, 離散値の完全最適解あるいは離散値の非劣解 $\hat{x}(k)$ を計算的な方法で求めるアルゴリズムを与えることが本速報での目的であるので, $W(k)$ について考慮する.

$$W(0) = \{x_0\} \quad (4)$$

$$W(i) = \{x(i) : x(i) = [I+A(i-1)]x(i-1) + g(i-1, u(i-1)) | u(i-1) \in \Omega\}, i=1, 2, \dots, k \quad (5)$$

であり, 時刻 k における $W(k)$ は有限個で, 有界な値を持つベクトル (状態点) で構成されている. 完全最適解あるいは非劣解 $\hat{x}(k)$ は, 到達可能集合 $W(k)$ の評価関数の平面への写像である $W'(k)$ の凸包すなわち $co W'(k)$ の凸包点 (境界点) を, 評価関数の平面を構成している e^n 軸の最大点から e^{n+1} 軸の最大点までを探索することによって得られる. なお, 評価関数の平面上の事々には, $W'(k)$ のようにプライムを付けることにする. 当然, 完全最適解あるいは非劣解は, $W(k)$ の $W'(k)$ に対して得られるもので, $co W(k)$ の $co W'(k)$ ではない. しかし, $W(k)$ の $W'(k)$ の最外郭の要素は, $co W$ の $co W'$ の外郭点 (凸包点) と完全に一致しているので, 後者に対して連続的な探索が可能となる.

次のようなアルゴリズムが提案できる.

Step 1 状態方程式: $x(i+1) = [I+A(i)]x(i) + g(i, u(i))$, $i=0, 1, \dots, k-1, x(0) = x_0, u(i) \in \Omega$ により, $x(k)$ をすべて計算する.

Step 2 $\max_{x(k) \in W(k)} (x^n(k))$ を見つける. 複数個存在するときは, $x^{n+1}(k)$ が最大になるような $x(k)$ を選ぶ. なお, $\hat{x}_1(k)$ は $x^n(k)$ の最大を表す.

Step 3 $\max_{x(k) \in W(k)} (x^{n+1}(k))$ を見つける. 複数個存在するときは, $x^n(k)$ が最大になるような $x(k)$ を選ぶ. なお, $\hat{x}_2(k)$ は $x^{n+1}(k)$ の最大を表す.

Step 4 $\hat{x}_1(k)$ と $\hat{x}_2(k)$ が一致するときは, Step 5 へ. そうでないときは, Step 6 へ.

Step 5 $\hat{x}(k)$: 完全最適解. アルゴリズムは終了.

Step 6 二点 $\hat{x}'_1(k)$ と $\hat{x}'_2(k)$ を通る直線を引く. この直線より上方に位置し, e^n 軸と e^{n+1} 軸とで囲まれる領域における点 $x'(k)$ を探索する. $x'(k)$ が存在しなければ, Step 7 へ. $x'(k)$ が存在すれば, Step 8 へ.

Step 7 $\hat{x}_1(k)$ と $\hat{x}_2(k)$ (これら二点のみ): 非劣解. アルゴリズムは終了.

Step 8 $\hat{x}'_1(k)$ から $\hat{x}'_2(k)$ 間での点 (状態ベクトル) $\hat{x}'(k)$ を, 次の角度の情報で探索する.

$$\max_{x'(k)} \left[-\frac{x'^{n+1}(k) - \hat{x}'_1^{n+1}(k)}{x'^n(k) - \hat{x}'_1^n(k)} \right] \quad (6)$$

そして, e^{n+1} 軸に関して探索が済んだ領域は切除される. 探索されたこれらの点 $x'(k)$: 非劣解 $\hat{x}(k)$. アルゴリズムは終了.

(補注) 1) 点 (状態ベクトル) $x(k)$ の個数は, 許容操作量の個数と時刻 k の累乗に比例して増加する. 提案の方法は, いわゆる一括法で, Step 1 で全点 (全状態ベクトル) $x(k)$ を求め, 一括的に処理している. 当然, 許容制御の個数および時刻 k は共にあまり大きな値は取らないこととしている.

2) Halkin は, 参考文献 [2] で, 各時刻での最適状態量は, 結果として, $W(i), i=0, 1, \dots, k$ である有界, 閉, 凸な到達可能集合の境界 (最外郭線) 上に存在することを,

ホイヘンスの伝播定理を引用して示している。このことは、本問題では、 $W(i), i=0, 1, \dots, k$ である有界な各時刻の到達可能集合の凸包点に対応し、したがって、完全最適解あるいは非劣解の求解として、 $W(k)$ の凸包点に注目した探索を行った次第である。

3) 角度情報による探索である Step 8 では、二つ目の評価関数 $x^{n+1}(k)$ の e^{n+1} 軸の値 (数値例では、 $x^5((6))$ の e^5 軸の値) に基づき、小さい方から大きい方に探索し、探索後はその領域を切除している。

3.3 数値例

状態変数が5次元 (3次元の運動空間と2次元の評価関数)、最終時刻が6の終端自由問題を考える。なお、たとえば、以下の Ω の許容制御3点と原点とを端点とする四面体 (凸体) の側および内部の値を許容制御値とする連続値制御問題に対し、簡便な量子的制御問題を考えている。

状態方程式:

$$\begin{bmatrix} x^1(i+1) \\ x^2(i+1) \\ x^3(i+1) \\ x^4(i+1) \\ x^5(i+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^1(i) \\ x^2(i) \\ x^3(i) \\ x^4(i) \\ x^5(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -i^2 & 1 & 3 \\ -3 & i & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2i & 0 & 1 \\ i^2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & i & 3i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1(i) \\ x^2(i) \\ x^3(i) \\ x^4(i) \\ x^5(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^1(i) & 0 & u^3(i) \\ 0 & 2i & 0 \\ i & 0 & -3 \\ u^1(i) & u^2(i) & 1 \\ 1 & -2 & u^3(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1(i) \\ u^2(i) \\ u^3(i) \end{bmatrix} \quad i=0, 1, \dots, 5 \quad (7)$$

許容操作量:

$$u(i) = \begin{bmatrix} u^1(i) \\ u^2(i) \\ u^3(i) \end{bmatrix} \in \Omega = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

初期値:

$$x(0) = 0 \text{ (ゼロベクトル)}$$

評価関数:

$$\begin{bmatrix} x^4(6) \\ x^5(6) \end{bmatrix} : \text{最大 (終端自由)}$$

このとき、最終6時刻における離散値の完全最適解あるいは離散値の非劣解を求めよ。

結果: 仮定 (i) と (ii) は満たされている。到達可能集合 $W(6)$ に対し、 $W(6)$ の全点 (全状態ベクトル) の個数は、 $729 (= 3^6)$ である。

次の結果が得られる。なお、2次元の評価関数の結果のみを記載している。

$$\hat{x}_1(6) = \begin{bmatrix} 102,761 \\ 68,307 \end{bmatrix}, \hat{x}_2(6) = \begin{bmatrix} 37,737 \\ 128,640 \end{bmatrix}$$

このとき、結果として8個の非劣解が得られる。

$$\hat{x}(6) = \begin{bmatrix} 19,922 \\ -12,258 \\ -1,357 \\ 102,761 \\ 68,307 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 19,922 \\ -12,258 \\ -1,365 \\ 102,761 \\ 68,307 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 31,301 \\ -15,483 \\ 1,355 \\ 80,624 \\ 102,726 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 31,307 \\ -15,483 \\ 1,347 \\ 80,624 \\ 102,726 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 36,461 \\ -15,518 \\ 2,990 \\ 72,309 \\ 111,976 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 36,461 \\ -15,518 \\ 2,982 \\ 72,309 \\ 111,976 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 42,073 \\ -13,034 \\ 6,074 \\ 37,737 \\ 128,640 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 42,073 \\ -13,034 \\ 6,066 \\ 37,737 \\ 128,640 \end{bmatrix}$$

3.4 本速報での制御問題の最終的な解法

解法手段として、たとえば最大原理によると、本速報で求めた完全最適解あるいは複数個の非劣解より選ばれた選好解に対し、 n 番目と $(n+1)$ 番目の要素が非負である随伴ベクトルの初期値 p' を、 $co W'(k)$ を支持する支持直線 (分離直線) の外向きの法線ベクトル: $p' = \lambda e^n + (1-\lambda)e^{n+1}$ として求めることにより解ける。

なお、本速報の場合、状態方程式が線形であるので、煩雑な2点境界値問題にはならない。

4. おわりに

2次元の評価関数を持つ量子的制御問題を、最大原理で解くとき、逆時間方向の初期値である随伴ベクトルの導出が必要で、離散値の完全最適解あるいは非劣解を求めなければならない。以前、この求解には、幾何学的 (図的) 方法を提案していたが、本速報では、幾何学的考察に基づく計算的方法による求解法である8ステップによるアルゴリズムを提案した。

今後の課題としては、本速報がいわゆる一括法であったので、状態 $x(k)$ について逐次的な探索を行う逐次法 [5] を完成させたい。また、3次元の評価関数を持つ場合も考えたい。

参考文献

- [1] Y. Anzai: A note on reachability of discrete-time quantized control systems; *IEEE Trans.*, AC-19, No. 5, pp. 575-577 (1974)
- [2] H. Halkin: Optimal control for systems described by difference equations; *Advances in control systems; theory and applications*, Vol. 1, No. 1, pp. 173-196 (1964)
- [3] 宗像: 二評価関数を有する Halkin タイプの制御問題の一最適離散値解; システムと制御, Vol. 28, No. 11, pp. 61-68 (1984)
- [4] L. A. Zadeh: Optimality and nonscalar-valued performance criteria; *IEEE*, AC-8, No. 1, pp. 59-60 (1963)
- [5] 宗像, 井上: 2次元評価関数の非劣解逐次求解に関する考察; 第8回計測自動制御学会中国支部学術講演会論文集, pp. 270-271 (1999)
- [6] 高橋, 浜田: 線形システム解析の基礎, 第2章, 実教出版 (1979)