ロバスト可解問題に対する 効率的なランダム化アルゴリズム*

和田 孝之[†]・藤崎 泰正[‡]

Efficient Randomized Algorithms for Robust Feasibility Problems*

Takayuki WADA[†] and Yasumasa FUJISAKI[‡]

1. はじめに

ロバスト制御系の設計問題は、一般に、すべての不確かさについて制約条件を満たす解を求めるロバスト可解問題に帰着され、計算複雑さは不確かさの次元についてNP困難なクラスとなる。そこで、厳密な解ではなく、ほとんどすべての不確かさについて制約条件を満たす解を、多項式時間で求めるランダム化アルゴリズムが提案されている[1-6]。これらのアルゴリズムは、不確かさのランダムサンプルに基づく解法であり、サンプルした不確かさに対応する制約条件に基づいて、解になり得ない領域を切除して解を更新することを繰り返す。

ところで、ロバスト制御系の設計問題では、制約条件が状態フィードバックやオブザーバゲインに対応するような複数の行列不等式が連立した形に表せることが多い。この場合には、それらの不等式を個別に扱うことにより、同じ不確かさに対して複数回、解を更新できる可能性がある。これにより解を得るための不確かさのサンプル数を少なくできることが期待できる。

本速報では、ランダム化アルゴリズムとして確率的楕円体法[4,5]を選び、制御問題のもつ特徴を利用した今回の提案の有効性を数値実験を通して具体的に示す。なお、ノルム有界なランダム行列を一樣に生成する方法[7,8]では、計算複雑さは不確かさの次元に依存するため、サンプル数を少なくすることは、不確かさの次元が大きい場合に有効である。

2. ロバスト可解問題と確率的楕円体法

本速報ではロバスト可解問題

$$\text{Find } z \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } v(z, \theta) \leq 0 \quad \forall \theta \in \Theta$$

について考える。ここで、 Θ は可測集合であり、 $v: \mathbb{R}^n \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ は z について凸な可測関数である。

いま、集合 Θ 上に確率測度 $\mathcal{P}$ を導入する。ただし、ある $\theta \in \Theta$ について $v(z, \theta) > 0$ となるような任意の $z \in \mathbb{R}^n$ について、 $\mathcal{P}\{\theta \in \Theta: v(z, \theta) > 0\} > 0$ とする。

以下では、

$$\mathcal{P}\{\theta \in \Theta: v(z, \theta) \leq 0\} \geq 1 - \varepsilon$$

を満足するような確率的解を信頼度 $1 - \delta$ で求めるアルゴリズムを紹介し、その性質をまとめる[5,9]。ただし、 $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$ である。

まず、初期楕円の形状 $P_0 \succ 0$ とパラメータ $\mu > 0$ を与え、

$$\bar{l} \doteq \left\lceil 2(n+1) \ln \frac{\det P_0}{\mu} \right\rceil, \quad \kappa \doteq \left\lceil \ln \frac{\bar{l}}{\delta} / \ln \frac{1}{1-\varepsilon} \right\rceil$$

とおく。

【アルゴリズム 1】

ステップ 1 初期値 z_0 を与え、 $k := 0, l := 0$ とする。

ステップ 2 $l \geq \bar{l}$ ならば、解なしと出力して停止する。

ステップ 3 $v(z_{k-\kappa}, \theta_{k-\kappa}), v(z_{k-\kappa+1}, \theta_{k-\kappa+1}), \dots, v(z_{k-1}, \theta_{k-1})$ が定義されていて、すべてが零ならば、 z_k を出力して停止する。

ステップ 4 集合 Θ から、確率測度 $\mathcal{P}$ に従い θ_k をランダムサンプルする。

ステップ 5 もし $v(z_k, \theta_k) > 0$ ならば、 $l := l + 1$ とし、

$$z_{k+1} := z_k - \frac{1}{n+1} \frac{P_k g_k}{\sqrt{g_k^T P_k g_k}},$$

$$P_{k+1} := \frac{n^2}{n^2 - 1} \left(P_k - \frac{2}{n+1} \frac{P_k g_k g_k^T P_k}{g_k^T P_k g_k} \right)$$

と更新する。ただし、 g_k は、 z_k, θ_k での v の z についての劣勾配を表す。もし $v(z_k, \theta_k) \leq 0$ ならば更新せず、 $z_{k+1} := z_k, P_{k+1} := P_k$ とする。

ステップ 6 $k := k + 1$ とし、ステップ2へ戻る。

* 原稿受付 2005年7月21日

[†] 神戸大学 大学院 自然科学研究科 Graduate School of Science and Technology, Kobe University; 1-1 Rokkodai, Nada, Kobe, Hyogo 657-8501, JAPAN

[‡] 神戸大学 工学部 情報知能工学科 Department of Computer and Systems Engineering, Kobe University; 1-1 Rokkodai, Nada, Kobe, Hyogo 657-8501, JAPAN

Key Words: randomized algorithm, robust feasibility problem, robust control, matrix inequality.

【性質 1】

- (1) 不確かさのサンプル数の上界は、 $\kappa \bar{l}$ である。
- (2) 解の更新回数の上界は $\bar{l}$ である。
- (3) ステップ 3 で出力された z_k が確率的解である信頼度は $1-\delta$ 以上である。
- (4) ステップ 2 で解なしと出力された場合には、 $(z - z_0)^T P_0^{-1} (z - z_0) \leq 1$ を満たす $z \in \mathbb{R}^n$ と解集合の共通部分が μ により決まる体積より小さい。

3. 制御問題の構造とアルゴリズムの効率化

ここでは、制御問題のもつ特徴を利用して、アルゴリズムを改良することを考える。

たとえば、LPV システムに対する $\mathcal{H}_\infty$ 制御系の設計問題は、 $A(\theta)$, $B_1(\theta)$, $B_2(\theta)$, $C_1(\theta)$, $C_2(\theta)$, $D_{12}(\theta)$, $D_{21}(\theta)$, および $\gamma > 0$ が与えられたとき、

$$V_1(X, \theta) \leq 0, V_2(Y, \theta) \leq 0, V_3(X, Y) \leq 0 \quad \forall \theta \in \Theta$$

を満たす対称行列 X , Y を求める問題として書き表すことができる。ここで、

$$\begin{aligned} V_1(X, \theta) &\doteq A(\theta)X + XA^T(\theta) + XC_1^T(\theta)C_1(\theta)X \\ &\quad + \gamma^{-2}B_1(\theta)B_1^T(\theta) - B_2(\theta)B_2^T(\theta) + \epsilon I, \\ V_2(Y, \theta) &\doteq A^T(\theta)Y + YA(\theta) + YB_1(\theta)B_1^T(\theta)Y \\ &\quad + \gamma^{-2}C_1^T(\theta)C_1(\theta) - C_2^T(\theta)C_2(\theta) + \epsilon I, \\ V_3(X, Y) &\doteq - \begin{bmatrix} X & \gamma^{-1}I \\ \gamma^{-1}I & Y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であり、 $\epsilon > 0$ は適当な定数である。参考文献 [3] では、これを

$$v(z, \theta) := \|\text{block diag}\{V_1, V_2, V_3\}\|^+$$

とおいてロバスト可解問題に帰着し、ランダムマイズドアルゴリズムを用いることを提案している。ただし、 z は X と Y の独立な要素からなるベクトル、 $\|\cdot\|$ はフロベニウスノルム、 $[\cdot]^+$ は半正定対称行列上への射影を表す。

ここで、本来の制約条件に着目して、

$$\begin{aligned} v_1(z, \theta) &:= \|[V_1(X, \theta)]^+\|, \quad v_2(z, \theta) := \|[V_2(Y, \theta)]^+\|, \\ v_3(z) &:= \|[V_3(X, Y)]^+\| \end{aligned}$$

と定義すれば、すべての $\theta \in \Theta$ について $v(z, \theta) \leq 0$ を満たす z は、すべての $\theta \in \Theta$ について $v_1(z, \theta) \leq 0$, $v_2(z, \theta) \leq 0$, $v_3(z) \leq 0$ を満たし、逆もまた成り立つことがわかる。

アルゴリズム 1 では、ランダムサンプルした θ_k について制約を満たしていなければ値を更新する。このとき、上記のように、制約を複数の不等式が連立した形に分解すれば、各制約を個別にチェックすることにより、複数回楕円を更新できる可能性がある。更新 1 回あたりの楕円の体積の減少率は一定である [10] ので、更新の回数が多ければ多いほど、体積はより速く減少する。結果として、アルゴリズムが停止するまでに生成される不確かさ

のサンプル数が少なくなることが期待できる。なお、類似のアイデアは、IQC 可解問題を対象に、参考文献 [11] でも用いられている。

そこで本速報では、ロバスト可解問題を

$$\begin{aligned} \text{Find } z &\in \mathbb{R}^n \\ \text{s.t. } v_i(z, \theta) &\leq 0 \quad \forall \theta \in \Theta, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \end{aligned}$$

と再定式化し、アルゴリズム 1 のステップ 5 を次のように置き換えることを提案する。

【アルゴリズム 2】

ステップ 1 初期値 z_0 を与え、 $k := 0$, $l := 0$ とする。

ステップ 2 $l \geq \bar{l}$ ならば、解なしと出力して停止する。

ステップ 3 $v(z_{k-\kappa}, \theta_{k-\kappa})$, $v(z_{k-\kappa+1}, \theta_{k-\kappa+1})$, $\dots$, $v(z_{k-1}, \theta_{k-1})$ が定義されていて、すべてが零ならば、 z_k を出力して停止する。

ステップ 4 集合 Θ から、確率測度 $\mathcal{P}$ に従い θ_k をランダムサンプルする。

ステップ 5

(a) $z_k^1 := z_k$, $P_k^1 := P_k$ とおき、 $i := 1$ とする。

(b) もし $v_i(z_k^i, \theta_k) > 0$ ならば、 $l := l + 1$ とし、

$$\begin{aligned} z_k^{i+1} &:= z_k^i - \frac{1}{n+1} \frac{P_k^i g_k^i}{\sqrt{g_k^{i,T} P_k^i g_k^i}}, \\ P_k^{i+1} &:= \frac{n^2}{n^2 - 1} \left(P_k^i - \frac{2}{n+1} \frac{P_k^i g_k^i g_k^{i,T} P_k^i}{g_k^{i,T} P_k^i g_k^i} \right) \end{aligned}$$

と更新する。ただし、 g_k^i は、 z_k^i , θ_k での v_i の z についての劣勾配を表す。もし $v_i(z_k^i, \theta_k) \leq 0$ ならば更新せず、 $z_k^{i+1} := z_k^i$, $P_k^{i+1} := P_k^i$ とおく。

(c) もし $i < m$ ならば、 $i := i + 1$ とし、ステップ 5(b) へ戻る。そうでなければ、 $z_{k+1} := z_k^{m+1}$, $P_{k+1} := P_k^{m+1}$ とし、次のステップへ進む。

ステップ 6 $k := k + 1$ とし、ステップ 2 へ戻る。

このアルゴリズムの性質は、アルゴリズム 1 と同様であり、性質 1 がそのまま成り立つ。つまり、不確かさのサンプル数の上界は同じである。しかし、前述の通り、従来法より提案法の方が、実際に生成されるサンプル数が少なくなることが期待できる。

4. 数値実験結果

ここでは、提案法を LPV システムに対する $\mathcal{H}_\infty$ 制御系の設計問題に適用し、従来法との比較を行う。

パラメータの設定は参考文献 [3] に従った。また、 δ , ϵ はそれぞれ 0.01 とし、 $\mu = 0.1$ と選んだ。初期値は $z_0 := 0$, $P_0 := 100I$ と与えた。そして、 γ の値をいくつか選び、それぞれにつきアルゴリズムを 100 回実行した。結果を Table 1 に示す。なお、 k_{ave} は平均サンプル回数、 r_{feas} はアルゴリズムがステップ 3 で（解ありを出力して）停止した割合を示す。Table 1 より、問題が可解でないときに改善の度合いが大きくなり、 $\gamma = 0.6$ のと

Table 1 Average number of samples θ

γ	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8
k_{ave}^s	8050.59	40614.00	16427.60	8317.23	5844.32
r_{feas}	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00
k_{ave}^m	5837.40	33360.00	15236.30	8077.22	5776.90
r_{feas}	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00

きには 30% 程度サンプル数が少ない。

一般に、制約条件が厳しければ厳しいほど、各制約が満たされにくくなる。したがって、提案法の方が従来法より不確かさのサンプル数あたりの解候補の更新回数が多くなり、Table 1 の結果が得られたと考えられる。

確率的楕円体法に二分探索を組み合わせて γ を最適化する場合を考えると、可解でない問題を複数解かなければならない。そのため、提案法はより効果が大いことが期待できる。このような二分探索は参考文献 [9] で提案されている（付録参照）。そこで、 γ の探索範囲を 0.9 から 1.5 とし、可解問題を解く際に従来法と提案法を用いて、それぞれについて実際に二分探索を行った。アルゴリズムは、それぞれ 100 回実行した。その結果、従来法を用いた場合の平均サンプル数は 3.54×10^7 個、提案法では、 2.62×10^7 個となった。つまり、提案法の方が 30% 弱程度サンプル数が少なくなり、実際に有効であることが確認できた。なお、求まった最適値の平均値は従来法では $\gamma = 1.058$ となり、提案法は $\gamma = 1.072$ であった。

5. おわりに

本速報では、制御問題の特徴を利用して、ロバスト可解問題に対するランダム化アルゴリズムの改善法を提案した。この方法は他の一般的な改善法と組み合わせることもでき、たとえば、劣勾配と制約の大きさを利用する DeepCut [10] と併用しても有効である。

参考文献

- [1] B. Polyak and R. Tempo: Probabilistic robust design with linear quadratic regulators; *Systems & Control Letters*, Vol. 43, No. 5, pp. 343–353 (2001)
- [2] G. Calafiore and B. Polyak: Stochastic algorithms for exact and approximate feasibility of robust LMIs; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, No. 11, pp. 1755–1759 (2001)
- [3] Y. Fujisaki, F. Dabbene and R. Tempo: Probabilistic design of LPV control systems; *Automatica*, Vol. 39, No. 8, pp. 1323–1337 (2003)
- [4] S. Kanev, B. Schutter and M. Verhaegen: An ellipsoid algorithm for probabilistic robust controller design; *Systems & Control Letters*, Vol. 49, No. 5, pp. 365–375 (2003)
- [5] Y. Oishi: Probabilistic design of a robust state-feedback controller based on parameter-dependent Lyapunov functions; *Proc. the 42nd IEEE Confer-*

ence on Decision and Control, pp. 1920–1925 (2003)

- [6] Y. Fujisaki and Y. Oishi: Guaranteed cost regulator design: Probabilistic solution and randomized algorithm; *Proc. the 16th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, CD-ROM (2004)
- [7] G. Calafiore, F. Dabbene and R. Tempo: Randomized algorithms for probabilistic robustness with real and complex structured uncertainty; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 12, pp. 2218–2235 (2000)
- [8] G. Calafiore and F. Dabbene: A probabilistic framework for problems with real structured uncertainty in systems and control; *Automatica*, Vol. 38, No. 8, pp. 1265–1276 (2002)
- [9] Y. Oishi: Implementation of a randomized algorithm for solving parameter-dependent linear matrix inequalities; *Proc. the 2004 IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 1183–1188 (2004)
- [10] R. Bland, D. Goldfarb and M. Todd: The ellipsoid method: A survey; *Operations Research*, Vol. 29, No. 6, pp. 1039–1091 (1981)
- [11] C.-Y. Kao, A. Megretski and U. Jönsson: Specialized algorithms for IQC feasibility and optimization problems; *Automatica*, Vol. 40, No. 2, pp. 239–252 (2004)

付 録

参考文献 [9] で提案された確率的二分探索のアルゴリズムと性質を以下にまとめる。

まず、許容誤差 γ_{err} 、 γ の探索範囲 $(\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$ を与え、

$$\bar{m} \doteq \lceil \log_2(\bar{\gamma} - \underline{\gamma} / \gamma_{\text{err}}) \rceil, \quad \kappa' \doteq \left\lceil \left(\ln \frac{\bar{m}}{\delta} \right) / \ln \frac{1}{1-\varepsilon} \right\rceil$$

とおく。

【アルゴリズム 3】

ステップ 1 $\gamma_U := \bar{\gamma}$, $\gamma_L := \underline{\gamma}$ と与える。

ステップ 2 $\gamma_U - \gamma_L < \gamma_{\text{err}}$ ならば、アルゴリズムを停止。

ステップ 3 $\gamma := (\gamma_U + \gamma_L) / 2$ とし、 κ を κ' におきかえ、
アルゴリズム 1（または 2）を実行。

ステップ 4 アルゴリズム 1（または 2）がステップ 2 で停止したならば、 $\gamma_L := \gamma$ とし、ステップ 3 で停止したならば、 $\gamma_U := \gamma$ とする。

ステップ 5 ステップ 2 へ戻る。

【性質 2】

- (1) 不確かさのサンプル数の上界は、 $\bar{m}\kappa'\bar{l}$ である。
- (2) $\gamma_U \neq \bar{\gamma}$ となって停止した $\gamma = \gamma_U$ に対する出力が確率的解である信頼度は $1 - \delta$ 以上である。
- (3) $\gamma_L \neq \underline{\gamma}$ で停止すると、 $(z - z_0)^T P_0^{-1} (z - z_0) \leq 1$ を満たす $z \in \mathbb{R}^n$ と $\gamma = \gamma_L$ に対する解集合の共通部分が μ により決まる体積より小さい。