構造化平衡打ち切り法における誤差ノルムの低減化*

安里健太郎[†]・長堂 勤[‡]・玉城 史朗[‡]

Error Norm Reduction in Structurally Balanced Truncation*

Kentaro ASATO[†], Tsutomu NAGADO[‡] and Shiro TAMAKI[‡]

In this paper, we attempt reducing an error norm in structurally balanced truncation. Structurally balanced truncation is a controller reduction method developed from balanced truncation (a model reduction method) and is carried out by solving Linear Matrix Inequalities (LMIs). In this method, it is easy to get an a priori error bound which depends on LMI solutions, however, it is difficult to obtain optimal LMI solutions because the optimization problem has the objective function which is not convex. To overcome the difficulty, a suboptimal procedure is proposed by Zhou et al., however, their procedure can not decrease the a priori error bound sufficiently. So we propose an error norm reduction algorithm utilizing a linearized objective function (a linearized equation of a non-convex function associated with the error bound) and balancing matrices. Finally, the validity of the proposed method are verified by using numerical examples.

1. はじめに

制御理論の発達に伴い、コントローラの制御性能は向上してきたが、その次数は高くなっていった。コントローラの次数が高くなると、構造が複雑になり、設計コストが増大する。そのため、より低次元のコントローラが求められるが、モデルを低次元化する場合とは異なり、それが元のコントローラの入出力特性に近いほど良いわけではない。コントローラはシステムの安定化や性能改善を目的として設計・実装されるため、高次元コントローラの次数を低減化する場合、閉ループシステムの安定性や制御性能を考慮する必要がある。

この閉ループ特性を考慮した低次元化法の一つに、構造化平衡打ち切り法がある [1]。この手法は、平衡打ち切り法 [2,3] を拡張した手法であり、Fig. 1 のような

線形分数変換形式で記述された閉ループシステムに適用される。構造化平衡打ち切り法には、参考文献 [4, 5] で紹介されているような多くのコントローラ低次元化法にはない大きな利点がある。それは、得られた低次元化コントローラが閉ループシステムの安定性を保証すること、その劣化指標となる誤差ノルムの上界（誤差上界）が容易に得られることである。

構造化平衡打ち切り法を用いて低次元化を行う場合には、閉ループシステムの状態空間データから成る二つの線形行列不等式を解く必要がある。一般にその解は唯一ではなく、その解によって誤差ノルムが変化する。この手法では、誤差の事前情報として誤差上界が容易に得られるので、この上界が最小となる解を用いて低次元化することが望ましい。しかし、このような最適化問題は、目的関数が非凸関数となるため、解くことが困難となっている。

そのため、従来の方法 [1,6,7] では、誤差上界の代わりに、各線形行列不等式の解のトレースを最小化することで低次元化を行っている。しかし、このような方法では、誤差上界を十分に抑えることができず、実際の誤差ノルムが大きくなる可能性がある。また、低次元化対象の実現によって、各線形行列不等式の解が異なるため、誤差上界がより小さくなるような実現を見いだす必要があり、実用的であるとはいえない。

* 原稿受付 2005年5月25日

[†] 琉球大学 大学院 理工学研究科 Graduate School of Science and Engineering, University of the Ryukyus; 1 Senbaru, Nishihara-cho, Nakagami-gun, Okinawa 903-0213, JAPAN

[‡] 琉球大学 工学部 Faculty of Engineering, University of the Ryukyus; 1 Senbaru, Nishihara-cho, Nakagami-gun, Okinawa 903-0213, JAPAN

Key Words: structurally balanced truncation, error bound, linearization, balancing matrix.

本論文では、これらの問題を解決し、誤差上界をより抑えることで、実際の誤差ノルムの低減化を図る。まず、その前段階として、参考文献[8,9]の線形化法により、誤差上界の情報を含む非凸関数（各線形行列不等式解の積のトレース）の最小化問題を凸最適化問題に帰着し、これを解いて低次元化することを考える。そして、この手法をもとに、誤差上界低減化法を提案する。この提案法は、平衡化行列を用いてその非凸関数に含まれている上界情報を選定することで、誤差上界のさらなる低減化を目指した手法である。また、いくつかの例題によって、提案法の有効性を確認する。

2. 構造化平衡打ち切り法

構造化平衡打ち切り法はコントローラ低次元化法として提案された。しかし、適切な一般化プラントを構成することで、これを周波数重み付きモデル低次元化問題に適用することができる[1,6]。ここでは、構造化平衡打ち切り法による低次元化の手順や、この手法を利用するうえで有用な定理について述べる。

2.1 コントローラの低次元化

Fig. 1 の閉ループシステムにおいて、 n 次元一般化プラント $G(s)$ とその m 次元安定化コントローラ $K(s)$ が次式で与えられた場合を考える。

$$G = \begin{bmatrix} G_{zw} & G_{zu} \\ G_{ew} & G_{eu} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$K = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \quad (2)$$

このとき、 w から z までの閉ループ伝達関数 T_{zw} は次式となる。

$$\begin{aligned} T_{zw} &= G_{zw} + G_{zu}K(I - G_{eu}K)^{-1}G_{ew} \in \mathcal{RH}_\infty \\ &=: \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、次の線形行列不等式を満足する P, Q が存在すると仮定する。

$$\bar{A}P + P\bar{A}^T + \bar{B}\bar{B}^T \leq 0, P = \text{diag}(P_G, P_K) \geq 0 \quad (4)$$

$$\bar{A}^T Q + Q\bar{A} + \bar{C}^T \bar{C} \leq 0, Q = \text{diag}(Q_G, Q_K) \geq 0 \quad (5)$$

ただし、 P_G, Q_G は $n \times n$ 対称行列、 P_K, Q_K は $m \times m$ 対称行列とする。さらに、次式を満足する平衡化（同時対角化）行列 T_K が存在すると仮定する。

$$P_{Kb} = Q_{Kb} = \text{diag}(\Sigma_{K1}, \Sigma_{K2}) =: \Sigma_K, \quad (6)$$

$$P_{Kb} = T_K^{-1} P_K (T_K^{-1})^T$$

$$Q_{Kb} = T_K^T Q_K T_K$$

$$\Sigma_{K1} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{m_r})$$

$$\Sigma_{K2} = \text{diag}(\sigma_{m_r+1}, \dots, \sigma_m),$$

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{m_r} > \sigma_{m_r+1} \geq \dots \geq \sigma_m$$

Fig. 1 Closed-loop system

ただし、 m_r は求める低次元化コントローラの次数である。この平衡化行列 T_K を用いて K の状態変換を行い、構造化平衡実現、

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} T_K^{-1} A_K T_K & T_K^{-1} B_K \\ C_K T_K & D_K \end{bmatrix} \\ &=: \begin{bmatrix} A_{Kb11} & A_{Kb12} & B_{Kb11} \\ A_{Kb21} & A_{Kb22} & B_{Kb21} \\ C_{Kb11} & C_{Kb12} & D_K \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

を得る。低次元化コントローラ K_r は、 Σ_{K2} に対応した(7)式の状態変数を打ち切ることで得られる。

$$K_r = \begin{bmatrix} A_{Kb11} & B_{Kb11} \\ C_{Kb11} & D_K \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここで、以下の定理が成り立つ[1]。

【定理 1】 (8)式の低次元化コントローラ K_r で構成される閉ループ伝達関数 T_{zwr} は、

$$T_{zwr} = G_{zw} + G_{zu}K_r(I - G_{eu}K_r)^{-1}G_{ew} \in \mathcal{RH}_\infty \quad (9)$$

となる。また、この T_{zwr} と(3)式の T_{zw} に関して、

$$\|T_{zw} - T_{zwr}\|_\infty \leq 2\text{tr}(\Sigma_{K2}) \quad (10)$$

が成り立つ。

定理 1 からわかるように、誤差ノルム $\|T_{zw} - T_{zwr}\|_\infty$ の上界は、 $\text{tr}(\Sigma_{K2})$ によって与えられる。また、 $\text{tr}(\Sigma_{K2})$ は $P_K Q_K$ の固有値によって決定され、これらの関係は、

$$\text{tr}(\Sigma_{K2}) = \sum_{i=m_r+1}^m \lambda_i^{1/2}(P_K Q_K) \quad (11)$$

となる。ただし、 $\lambda_i(P_K Q_K)$ は $P_K Q_K$ の i 番目に大きい固有値とする。コントローラを低次元化する場合、この誤差上界が最小となる P_K, Q_K を用いることは適切である。しかし、(11)式は非凸関数であるため、この上界の最小化を目的とした問題（非凸最適化問題）を解くことは困難である。そこで、(11)式の代わりに、

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i(P_K) = \text{tr}(P_K), \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i(Q_K) = \text{tr}(Q_K) \quad (12)$$

の最小化を目的とした凸最適化問題(i),

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \text{tr}(P_K + Q_K) \\ &\text{subject to LMIs (4) and (5)} \end{aligned}$$

の解 P_K, Q_K ¹を用いて低次元化を行う [1,6,7]. ただし, 問題 (i) の解 P_K, Q_K および誤差上界は, K の実現によって変化してしまう (4. の例題 3 参照).

2.2 周波数重み付きモデルの低次元化

一般化プラント G が次式で与えられた場合を考える.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & W_o \\ W_i & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$W_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, \quad W_o = \begin{bmatrix} A_o & B_o \\ C_o & D_o \end{bmatrix}$$

この G と K で構成される閉ループ伝達関数 T_{zw} は,

$$T_{zw} = W_o K W_i \quad (14)$$

となる. W_i を入力重み, W_o を出力重み, K を低次元化対象としたとき, これは周波数重み付きモデルとなる. このように一般化プラント G を与えることで, 構造化平衡打ち切り法を周波数重み付きモデル低次元化問題に適用することができる.

なお, この問題において $G \in \mathcal{RH}_\infty, K \in \mathcal{RH}_\infty$ のとき, (4), (5) 式を満たす P, Q は常に存在する [6]. また, 定理 1 より, このとき得られた低次元モデルは安定となる.

3. 誤差上界の低減化

2.1 で述べたように, 制約条件 (4), (5) 式のもとで, 誤差上界 $2\text{tr}(\Sigma_{K2})$ が最小となる P_K, Q_K を求めることは困難である. そのため, 従来の方では, (11) 式の代わりに (12) 式を最小化することで P_K, Q_K を決定し, 低次元化を行っている. しかし, この手法では, 誤差上界を十分に抑えることができず, 実際の誤差ノルムが大きくなる可能性がある. また, 低次元化対象の実現によって, 得られる P_K, Q_K が異なるため, 誤差上界がより小さくなるような実現を見いだす必要がある.

そこで, 本論文では, これらの問題を解決し, 誤差上界をより抑えることで, 実際の誤差ノルムの低減化を図る. 3.1 では, その前段階として, $\text{tr}(P_K Q_K)$ の準最適化問題を解くことによって低次元化を行う手法 (線形化による準最適化法) について述べる. そして, 3.2 では, この手法をもとに, 平衡化行列を利用することで誤差上界のさらなる低減化を目指した手法 (誤差上界低減化法) を提案する.

3.1 線形化による準最適化法

ここでは, まず, 誤差上界 $2\text{tr}(\Sigma_{K2})$ を決定する変数, P_K, Q_K (P, Q) について考えてみる. (4) 式を満たす P の一つを $P^{(c)} = \text{diag}(P_G^{(c)}, P_K^{(c)})$ としたとき, スカラ $\alpha \geq 1$ に対して,

¹正確には, 問題 (i) の解は P, Q であるが, K の低次元化に必要なものはその一部の P_K, Q_K であるので, 便宜上, 問題 (i) の解を P_K, Q_K と書くことがある.

$$\bar{A}(\alpha P^{(c)}) + (\alpha P^{(c)})\bar{A}^T + \bar{B}\bar{B}^T \leq (1-\alpha)\bar{B}\bar{B}^T \leq 0$$

が成立する. これから, $\alpha P^{(c)}$ も (4) 式を満たすことがわかる. 同様に, (5) 式を満たす Q の一つを $Q^{(c)} = \text{diag}(Q_G^{(c)}, Q_K^{(c)})$ としたとき, $\beta Q^{(c)}$ ($\beta \geq 1$) もまた (5) 式を満たす. この $\alpha P^{(c)}, \beta Q^{(c)}$ ($\alpha P_K^{(c)}, \beta Q_K^{(c)}$) によって得られる誤差上界は, (11) 式から,

$$2 \sum_{i=m_r+1}^m \lambda_i^{1/2}((\alpha P_K^{(c)})(\beta Q_K^{(c)})) = 2\sqrt{\alpha\beta}\text{tr}(\Sigma_{K2}^{(c)})$$

となる. ただし, $2\text{tr}(\Sigma_{K2}^{(c)})$ は $P_K^{(c)}, Q_K^{(c)}$ によって得られる誤差上界である. これからわかるように, α, β が大きくなるにつれ, 誤差上界も大きくなる. ここで, 誤差上界の情報を含む $\text{tr}(P_K Q_K)$ の最小化問題について考えてみる.

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \text{tr}(P_K Q_K) \\ &\text{subject to LMI's (4) and (5)} \end{aligned}$$

この問題において, 最適解が $P_K^{(c)}, Q_K^{(c)}$ として得られた場合, スカラ $\alpha < 1, \beta < 1$ に対して, $\alpha P_K^{(c)}, \beta Q_K^{(c)}$ は実行可能解とならない. したがって, $\text{tr}(P_K Q_K)$ を最小化することで得られた解 $P_K^{(c)}, Q_K^{(c)}$ は, ある小さな誤差上界を与えるものとして利用することができる. しかし, 非凸関数である $\text{tr}(P_K Q_K)$ の最小化を目的とした上記の問題は, 解くことが困難となっている.

そこで, 参考文献 [8,9] の線形化法を適用することにより, $\text{tr}(P_K Q_K)$ の最小化問題を凸最適化問題に帰着して, これを解くことを考える. この線形化法は, 出力フィードバック低次元安定化問題や出力フィードバック定常安定化問題などの解法として利用される. 線形化法を用いてこれらの問題を解く場合, 実行可能解 (二つの正定対称行列解) の積のトレースを目的関数として選ぶことができる. これを参考にして目的関数 $\text{tr}(P_K Q_K)$ をある点 $(\hat{V}_s, \hat{W}_s)$ で線形化すると, 次式ようになる.

$$\hat{\phi}_{lin} = \text{const} + \text{tr}(\hat{W}_s P_K + \hat{V}_s Q_K) \quad (15)$$

ただし, $\hat{V}_s, \hat{W}_s$ は P_K (または Q_K) と同サイズの定数対称行列である. この線形近似式 $\hat{\phi}_{lin}$ を利用した $\text{tr}(P_K Q_K)$ の準最適化アルゴリズムは次のようになる.

【準最適化アルゴリズム】 (線形化による準最適化法)

Step 1 $l=0$ とし, 初期値 $(\hat{V}_l, \hat{W}_l)|_{l=0}$ を設定する.

Step 2 次の凸最適化問題 (ii) を解く.

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \text{tr}(\hat{W}_l P_K + \hat{V}_l Q_K) \\ &\text{subject to LMI's (4) and (5)} \end{aligned}$$

Step 3 $l:=l+1$ とし, これが規定数 c_1 に達したら終了する. そうでなければ, 問題 (ii) の解 P_K, Q_K を次の近似点とし, **Step 2** に戻る.

$$(\hat{V}_l, \hat{W}_l)|_{l=l+1} = (P_K, Q_K)$$

準最適化アルゴリズムにおいて、初期値 $(\hat{V}_l, \hat{W}_l)|_{l=0}$ を問題 (ii) の実行可能解として選んだとき、 $P_K, Q_K, \hat{V}_l$ および $\hat{W}_l$ は常に準正定行列となるので、線形化された目的関数（問題 (ii) の目的関数）は下に有界となる。また、線形化された目的関数の値は、繰り返し回数に対して単調減少する。したがって、このアルゴリズムによって P_K, Q_K を決定することで $\text{tr}(P_K Q_K)$ の減少が期待できる。準最適化アルゴリズムによって P_K, Q_K を決定した後は、(6) 式以降の手順に従い低次元化を行う。なお、

$$(\hat{V}_l, \hat{W}_l)|_{l=0} = (I, I), \quad c_1 = 1$$

としたとき、この手法は従来法に一致する。

3.2 誤差上界低減化法

ここで、 $\text{tr}(P_K Q_K)$ について考えてみる。(6) 式より、

$$\text{tr}(P_K Q_K) = \text{tr}(\Sigma_K^2) = \text{tr}(\Sigma_{K1}^2) + \text{tr}(\Sigma_{K2}^2) \quad (16)$$

となる。この式からわかるように、準最適化アルゴリズムによって $\text{tr}(P_K Q_K)$ を小さくし、ある小さな誤差上界が達成できたとしても、それが十分に抑えられた上界であるとは限らない。そこで、 P_K, Q_K を以下の方法によって決定し、誤差上界のさらなる低減化を目指す[10]。

はじめに、 P_K, Q_K の平衡化行列 T_K とその逆行列 T_K^{-1} を次のように分割することを考える。

$$T_K = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \quad T_K^{-1} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

このとき、

$$\begin{aligned} P_{Kb} &= \begin{bmatrix} Y_1 P_K Y_1^T & Y_1 P_K Y_2^T \\ Y_2 P_K Y_1^T & Y_2 P_K Y_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{K1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{K2} \end{bmatrix} \\ Q_{Kb} &= \begin{bmatrix} X_1^T Q_K X_1 & X_1^T Q_K X_2 \\ X_2^T Q_K X_1 & X_2^T Q_K X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{K1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{K2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18) \quad (19)$$

となる。ただし、 X_1, X_2, Y_1 および Y_2 は適当なサイズの行列である。また、(17)~(19) 式から、

$$T_K T_K^{-1} = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 = I \quad (20)$$

$$Y_1 P_K Y_2^T = 0, \quad X_1^T Q_K X_2 = 0 \quad (21)$$

$$\Sigma_{K2} = Y_2 P_K Y_2^T =: P_{Kb2} \quad (22)$$

$$= X_2^T Q_K X_2 =: Q_{Kb2} \quad (23)$$

が成り立つ。つぎに、 $\text{tr}(P_{Kb2} Q_{Kb2}) = \text{tr}(\Sigma_{K2}^2)$ の線形近似式、

$$\phi_{lin} = \text{const} + \psi, \quad \psi = \text{tr}(W_s P_{Kb2} + V_s Q_{Kb2}) \quad (24)$$

について考える。この近似式の近似点 (V_s, W_s) を

$$V_s = Y_2 \tilde{V}_s Y_2^T, \quad W_s = X_2^T \tilde{W}_s X_2 \quad (25)$$

とおくと、(20)~(23) 式の関係から ψ は、

$$\begin{aligned} \psi &= \text{tr}(Y_2 P_K Y_2^T X_2^T \tilde{W}_s X_2 + Y_2 \tilde{V}_s Y_2^T X_2^T Q_K X_2) \\ &= \text{tr}(Y_2 P_K \tilde{W}_s X_2 + Y_2 \tilde{V}_s Q_K X_2) \\ &\quad - \text{tr}(Y_2 P_K Y_1^T X_1^T \tilde{W}_s X_2 + Y_2 \tilde{V}_s Y_1^T X_1^T Q_K X_2) \\ &= \text{tr}(Y_2 (P_K \tilde{W}_s + \tilde{V}_s Q_K) X_2) \end{aligned} \quad (26)$$

と変形できる。ここで、 $m \times m$ 行列 $Z = \{z_{ij}\}$ に対して、 $\text{tr}'(Z)$ を

$$\text{tr}'(Z) = \sum_{i=m_r+1}^m z_{ii} \quad (27)$$

と定義すると、

$$\psi = \text{tr}'(T_K^{-1} (P_K \tilde{W}_s + \tilde{V}_s Q_K) T_K) \quad (28)$$

と書くことができる。これより、近似式 ϕ_{lin} を

$$\phi_{lin} = \text{const} + \text{tr}'(T_K^{-1} (P_K \tilde{W}_s + \tilde{V}_s Q_K) T_K) \quad (29)$$

と表すことができる。この近似式を利用することで、 $\text{tr}(\Sigma_{K2}^2)$ を低減化できるが、 T_K は事前に行うことができない。そこで、 T_K を近似点 $(\tilde{V}_s, \tilde{W}_s)$ の平衡化行列 $\tilde{T}_s$ で置き換えた近似式¹

$$\tilde{\phi}_{lin} = \text{const} + \text{tr}'(\tilde{T}_s^{-1} (P_K \tilde{W}_s + \tilde{V}_s Q_K) \tilde{T}_s) \quad (30)$$

を利用して、以下の P_K, Q_K 決定アルゴリズムを提案する。

【提案アルゴリズム】（誤差上界低減化法）

Step 1 (4), (5) 式を満たす P_K, Q_K を求め、これらの平衡化行列 T_K を計算する。

Step 2 $l=0$ とし、初期値 $(\tilde{V}_l, \tilde{W}_l)|_{l=0}$ および $\tilde{T}_l|_{l=0}$ を次で設定する。

$$(\tilde{V}_l, \tilde{W}_l)|_{l=0} = (P_K, Q_K), \quad \tilde{T}_l|_{l=0} = T_K$$

Step 3 次の凸最適化問題 (iii) を解く。

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \text{tr}'(\tilde{T}_l^{-1} (P_K \tilde{W}_l + \tilde{V}_l Q_K) \tilde{T}_l) \\ &\text{subject to LMIs (4) and (5)} \end{aligned}$$

Step 4 $l:=l+1$ とし、これが規定数 c_2 に達したら終了する。そうでなければ、問題 (iii) の解 (P_K, Q_K) を次の近似点、この解の平衡化行列 T_K を $\tilde{T}_l|_{l=l+1}$ とし、**Step 3** に戻る。

$$(\tilde{V}_l, \tilde{W}_l)|_{l=l+1} = (P_K, Q_K), \quad \tilde{T}_l|_{l=l+1} = T_K$$

提案アルゴリズムによって P_K, Q_K を決定した後は、(6) 式以降の手順に従い低次元化を行う。

¹これは、 P_K, Q_K と $\tilde{V}_s, \tilde{W}_s$ のそれぞれの立場を入れ替えて、点 $(\tilde{T}_s^{-1} P_K (\tilde{T}_s^{-1})^T, \tilde{T}_s^T Q_K \tilde{T}_s)$ における $\text{tr}'(\tilde{T}_s^{-1} \tilde{V}_s \tilde{W}_s \tilde{T}_s)$ の近似式と考えることができる。

Table 1 Results in Example 1

m_r	(I)		(II)		(III)	
	$2\text{tr}(\Sigma_{K2})$	$\ T_{zw} - T_{zwr}\ _\infty$	$2\text{tr}(\Sigma_{K2})$	$\ T_{zw} - T_{zwr}\ _\infty$	$2\text{tr}(\Sigma_{K2})$	$\ T_{zw} - T_{zwr}\ _\infty$
1	59.036	45.526	59.351	45.856	58.764	45.109
2	15.582	4.8974	15.834	5.2859	14.549	3.2383
3	5.4056	5.3545	5.3943	5.3519	5.3561	5.3286

Table 2 Results in Example 2

m_r	(I)		(II)		(III)	
	$2\text{tr}(\Sigma_{K2})$	$\ T_{zw} - T_{zwr}\ _\infty$	$2\text{tr}(\Sigma_{K2})$	$\ T_{zw} - T_{zwr}\ _\infty$	$2\text{tr}(\Sigma_{K2})$	$\ T_{zw} - T_{zwr}\ _\infty$
1	20.769	7.0110	27.725	6.6521	17.770	7.0744
2	9.6251	3.4812	13.050	3.6734	8.9361	3.7475
3	1.6067	0.8728	2.2173	1.5246	1.4629	0.6559

Table 3 Results in Example 3

m_r	(I)		(II)		(III)	
	$2\text{tr}(\Sigma_{K2})$	$\ T_{zw} - T_{zwr}\ _\infty$	$2\text{tr}(\Sigma_{K2})$	$\ T_{zw} - T_{zwr}\ _\infty$	$2\text{tr}(\Sigma_{K2})$	$\ T_{zw} - T_{zwr}\ _\infty$
1	28.376	7.0895	27.725	6.6521	17.770	7.0744
2	14.243	4.4568	13.050	3.6733	8.9364	3.7211
3	2.3961	1.4078	2.2173	1.5245	1.4629	0.6564

4. 数値例

ここでは、周波数重み付きモデル低次元化問題の数値例を用いて提案法の有効性を確認する。比較のため、以下の方法で低次元化を行う。

(I) 従来の手法 (2. 参照)

(II) 線形化による準最適化法 (3.1 参照)

(III) 誤差上界低減化法 (3.2 参照)

ただし、以下の例題では、準最適化アルゴリズム、提案アルゴリズムの初期値として、問題 (i) の解 P_K, Q_K を用いる。

【例題 1】 次の入力重み付き 4 次元モデル [6,11] を考える。

$$G = \begin{bmatrix} 0 & I \\ W_i & 0 \end{bmatrix}, W_i = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 10 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2.17 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_K = \begin{bmatrix} -0.6503 & -0.2734 & 0.0030 & -0.1815 \\ 0.2883 & -1.0171 & 0.0102 & -1.2651 \\ 0.0377 & 0.1087 & -0.0011 & -3.2129 \\ 0.8699 & -4.6643 & 16.1671 & -18.3349 \end{bmatrix}$$

$$B_K = \begin{bmatrix} 3.3317 & 3.2155 \\ 0.2883 & -1.0171 \\ -4.5402 & 2.6599 \\ -17.4882 & 6.0988 \end{bmatrix}$$

$$C_K = \begin{bmatrix} 31.5142 & 6.4374 & -0.0750 & 4.3834 \end{bmatrix}$$

$c_1 = c_2 = 5$ としたときの結果を Table 1 に示す。また、 $m_r = 2$ のときの $\text{tr}(P_K Q_K)$ 、上界 $2\text{tr}(\Sigma_{K2})$ の推移をそれぞれ、Figs. 2, 3 に示す。

Table 1 から、 $m_r = 3$ の場合を除き、手法 (II) の結果は手法 (I) の結果に比べて悪いことがわかる。3.2 で述べたように、 $\text{tr}(P_K Q_K)$ を小さくしても、十分に抑えられた誤差上界が得られるとは限らない。これについては、Figs. 2, 3 から確認することができる。一方、手法 (III) では、すべての次数において誤差ノルムとその上界が改善されていることがわかる。また、Figs. 2, 3 から、手法 (III) では、 $\text{tr}(P_K Q_K)$ は大きくなってしまいが、上界 $2\text{tr}(\Sigma_{K2})$ は他の手法より抑えられていることが確認できる。この結果から、提案した手法 (III) は、誤差上界をより抑えることで誤差ノルムの低減化が達成できたといえる。

【例題 2】 次の入出力重み付き 4 次元モデルを考える。

$$G = \begin{bmatrix} 0 & W_o \\ W_i & 0 \end{bmatrix},$$

$$W_i = \begin{bmatrix} -0.1283 & -1.4411 & 0.1866 & -0.1689 \\ 0.0000 & -0.1538 & -1.5986 & 1.1167 \\ -0.1575 & -0.1525 & -1.7177 & -0.1722 \\ -1.0273 & 0.0175 & -0.1341 & -1.7993 \end{bmatrix}$$

$$W_o = \begin{bmatrix} A_o & B_o \\ C_o & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_o = \begin{bmatrix} -5.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -3.2000 & 0.0000 \\ 2.8000 & -1.4000 & -9.1200 \end{bmatrix}$$

Fig. 2 $\text{tr}(P_K Q_K)$ in Example 1 ($m_r = 2$) Fig. 3 $2\text{tr}(\Sigma_{K2})$ in Example 1 ($m_r = 2$)

$$B_o = \begin{bmatrix} -0.1321 & -0.1516 & -0.0593 \\ 1.9640 & 1.1257 & 0.1123 \\ 1.7317 & 0.1543 & -1.1739 \end{bmatrix}$$

$$C_o = \begin{bmatrix} 0.1130 & 1.5612 & -1.2960 \\ 0.1553 & 0.1521 & 0.1914 \\ -0.1693 & 0.0531 & -0.1671 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix},$$

$$A_K = \begin{bmatrix} -0.4413 & 0.2382 & 0.4110 & -0.0057 \\ 0.0000 & -0.0594 & 0.1190 & 0.7823 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0859 & 0.0231 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.9955 \end{bmatrix}$$

$$B_K = \begin{bmatrix} 1.3588 & 1.0833 \\ 0.6337 & 1.4275 \\ 1.2293 & -1.2036 \\ -1.5695 & 1.3999 \end{bmatrix}$$

$$C_K = \begin{bmatrix} -0.6594 & 0.2828 & -0.3265 & 0.0483 \\ 0.5576 & -0.7018 & 0.3588 & 0.1445 \\ 0.0867 & 0.8087 & 0.0529 & -1.3964 \end{bmatrix}$$

$$D_K = \begin{bmatrix} 0.6514 & -0.1493 \\ 2.0184 & -0.0412 \\ 0.9914 & -0.0102 \end{bmatrix}$$

$c_1 = c_2 = 10$ としたときの結果を Table 2 に示す。また、 $m_r = 2$ のときの $\text{tr}(P_K Q_K)$, 上界 $2\text{tr}(\Sigma_{K2})$ の推

Fig. 4 $\text{tr}(P_K Q_K)$ in Example 2 ($m_r = 2$) Fig. 5 $2\text{tr}(\Sigma_{K2})$ in Example 2 ($m_r = 2$)

移をそれぞれ, Figs. 4, 5 に示す。

Table 2 より, $m_r = 1$ の実際の誤差ノルムを除いて, この例題でも手法 (II) の結果 (とくに誤差上界) は悪いことがわかる。また, Figs. 4, 5 から, $\text{tr}(P_K Q_K)$ は小さくなるが $2\text{tr}(\Sigma_{K2})$ は大きくなってしまいうことが確認できる。 Σ_K の定義から, Σ_{K1} の最小要素は, Σ_{K2} の最大要素より常に大きくなる。したがって, 多くの問題では, 手法 (II) によって $\text{tr}(P_K Q_K)$ を小さくしても, このように, より大きい要素を含む $\text{tr}(\Sigma_{K1}^2)$ を優先的に小さくしてしまうと考えられる。いっぽう, 手法 (III) では, 誤差上界はすべての次数において改善されているが, 実際の誤差ノルムは他の手法と比較して大きくなる場所がある。このように, 誤差上界を抑えても実際の誤差ノルムが小さくならない場合がある。しかし, 構造化平衡打ち切り法は誤差上界を評価指標とする低次元化法であるため, 上界を最も抑えることができる手法 (III) は, 効果的な手法であるといえる。

【例題 3】 例題 2 の入出力重み付きモデルにおいて, K を次の行列 T_e で状態変換した場合を考える。

$$T_e = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 2.5000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1000 \end{bmatrix}$$

$c_1 = c_2 = 10$ としたときの結果を Table 3 に示す。

Tables 2, 3 からわかるように, T_e で状態変換した後 K を低次元化した場合, 手法 (I) の結果は他の手法より悪くなる. (4), (5) 式を満たす P, Q の集合は, T_{zw} の実現によって異なる. これについては, ある正則なブロック対角行列で T_{zw} を状態変換する (または (4), (5) 式を合同変換する) ことで確認できる. この例題では K のみを状態変換したので, P_K, Q_K の集合のみが変化し, P_G, Q_G の集合は変わらない. したがって, 手法 (I) では, 目的関数として (12) 式を用いているため, 実現によって異なる P_K, Q_K , つまり, 異なる低次元化モデル K_r が得られる. このように, 得られる低次元化モデル K_r が K の実現に依存してしまうため, 手法 (I) は実用的であるとはいえない. いっぽうで, 手法 (II), (III) の結果はほとんど変化していないことがわかる. これは, 手法 (II), (III) では目的関数として, それぞれ, (15), (30) 式 (これらの式は K の実現に依存しない) を利用しているためである.

5. おわりに

本論文では, 従来法の問題を解決し, 誤差上界をより抑えることで, 実際の誤差ノルムの低減化を図った. まず, その前段階として, 参考文献 [8,9] の線形化法により, $\text{tr}(P_K Q_K)$ の最小化問題を凸最適化問題に帰着し, これを解くことによって低次元化を行う方法 (線形化による準最適化法: 準最適化アルゴリズム) について述べた. そして, この準最適化法をもとに, 平衡化行列を用いて $\text{tr}(P_K Q_K)$ に含まれている上界情報を選定することで, 誤差上界をより低減化する方法 (誤差上界低減化法: 提案アルゴリズム) を提案した. また, 例題 1~3 の数値例を用いて, 提案法の有効性の確認を行った. これにより, 準最適化アルゴリズム では, $\text{tr}(P_K Q_K)$ を小さくすることはできるが, 誤差上界を十分に抑えることができないことを示した. いっぽう, 提案アルゴリズム では, 平衡化行列を用いて $\text{tr}(P_K Q_K)$ の上界情報を選定することで, 他の手法より誤差上界を低減化できることを示した. また, 従来法では, 低次元化対象の実現によって結果が他の手法より悪くなってしまう場合があるが, 準最適化アルゴリズム, 提案アルゴリズム では, 結果がその実現によらないことを示した.

参考文献

- [1] K. Zhou, C. D'Souza and J. R. Cloutier: Structurally balanced controller order reduction with guaranteed closed loop performance; *Systems & Control Letters*, 24, pp. 235–242 (1995)
- [2] B. C. Moore: Principal component analysis in linear systems; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 26, pp. 17–32 (1981)
- [3] S. Gugercin and A. C. Antoulas: A survey model reduction by balanced truncation and some new results; *Int. J. Control*, Vol. 77, No. 8, pp. 748–766 (2004)
- [4] 大日方, B. アンダーソン: 制御システム設計, 朝倉書店 (1999)
- [5] K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover: *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall (1996)
- [6] D. C. Oh and J. H. Kim: A simple frequency weighted model reduction using structurally balanced truncation: existence of solutions; *Int. J. Control*, Vol. 75, No. 15, pp. 1190–1195 (2002)
- [7] G. Wang, V. Sreeram and W. Q. Liu: Balanced performance preserving controller reduction; *Systems & Control Letters*, 46, pp. 99–110 (2002)
- [8] L. EL Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami: A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 42, No. 8, pp. 1171–1176 (1997)
- [9] 岩崎: LMI と制御, 昭晃堂 (1997)
- [10] 安里, 長堂: 構造化平衡打ち切りモデルの誤差ノルム低減化; 第 23 回 SICE 九州支部学術講演会, pp. 137–138 (2004)
- [11] G. Wang, V. Sreeram and W. Q. Liu: A new frequency-weighted balanced truncation method and an error bound; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 44, No. 9, pp. 1734–1737 (1999)