不安定零点をもつ可逆系に対する安定な逆システムの 状態空間上での設計*

王 蕊[†]・渡部 慶二[†]・村松 鋭一[†]・有我 祐一[†]・遠藤 茂[†]

State Space Design of Stable Inverse Systems for Invertible Systems with Unstable Zeros*

Rui WANG[†], Keiji WATANABE[†], Eiichi MURAMATSU[†], Yuichi ARIGA[†] and Sigeru ENDO[†]

1. はじめに

低域通過逆システムは、最初、吉川・杉江[1,2]により伝達行列上で提案された。その後、状態空間上での設計法が、山田・渡部[3]により与えられた。さらに、不安定零点をもつ制御対象に対する安定な低域通過逆システムの設計法が文献[4-6]で与えられた。しかし、これらの状態空間法での設計は、制御対象が状態フィードバックで非干渉化可能であるという制限的な条件[7,8]を前提にしている。一般には制御対象が可逆であれば、武藤[9]や加藤・舟橋[10]のインタラクタ行列を用いたExact Model Matching[9]から、低域通過逆システムが導出できる。しかし、三つの問題がある。一つは、一般化インタラクタ行列と低域通過フィルの間の零点一極消去を考慮していないため逆システムの次数が高くなるという問題である。残りの問題は、不安定零点に対する安定化に関するものである。文献[5]の方法は、各行にインナを掛け極一零消去で安定化する計算が必要である。文献[6]では、不安定非行零点の数が入力数より多いと対処できない場合がある。

本速報では、上記の問題をすべて解決し、可逆な系に対し、従来のインタラクタ行列よりも低次で、かつ、すべての不安定零点に対し、直接、安定化できる低域通過逆システムの状態空間上での新しい設計法を提案する。

2. 低域通過逆システム

制御対象として、ラプラス変換上の

$$\begin{aligned} sx(s) &= Ax(s) + Bu(s) \\ y(s) &= Cx(s) \end{aligned} \quad (1)$$

を考える。ただし、 $x \in R^n(s)$, $u, y \in R^m$, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{m \times n}$, A は安定で、 (A, B) 可制御、 (C, A) 可観測とする。簡単のため入出力の次数は等しいとする。伝達行列は $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ である。この系に入

力側から安定な有理関数行列 $P(s) \in R^{m \times m}(s)$ をかけ、 $G(s)P(s)$ を対角化できるとき、 $P(s)$ を安定な低域通過(右)逆システムという。制御対象(1)式に対し、内部安定な低域通過逆システムが存在するための必要十分条件は、制御対象が可逆なこと ($G^{-1}(s)$ が存在すること) である[7]。(1)式が可逆であれば、内部安定な低域通過逆システムは

$$P(s) = G^{-1}(s)G_O(s)G_I(s) \quad (2)$$

で与えられる。ただし、

$$\begin{aligned} G_O(s) &= \text{diag}[g_{O1}(s) \cdots g_{Om}(s)] \\ G_I(s) &= \text{diag}[g_{I1}(s) \cdots g_{Im}(s)] \end{aligned} \quad (3)$$

である。 $g_{Oi}(s)$ はアウトで、その相対次数は、 $P(s)$ をプロバにする次数とする。 $g_{Ii}(s)$ はインナであり、 $G^{-1}(s)$ の第 i 列の虚軸上の極を含む不安定極をすべて消去するものである[5]。

3. 状態空間上での設計

制御対象(1)式は、文献[6]の仮定より広い可逆とする。(2)式に注目し、 $G^{-1}(s)G_O(s)$ の状態空間上での設計方法を以下のステップ1~5で与える。ただし、文献[2]の $G^{-1}(s)$ の有理関数上の煩雑な行列計算をせずに、かつ、文献[9]に比べ低次にする方法である。さらに、文献[5]と異なり、 $G^{-1}(s)G_O(s)$ に右から $G_I(s)$ を掛けずに、直接 $G^{-1}(s)G_O(s)$ を安定化する方法をステップ6で与える。

ステップ1

$$\begin{aligned} y_1(s) &= C_1x(s) + D_1u(s) \\ C_1 &= C, D_1 = 0_{m \times m} \end{aligned} \quad (4)$$

とする。 $k=1$ としステップ2へ。

ステップ2 任意の正則行列 S_k を選び

$$S_k D_k = \begin{bmatrix} \tilde{D}_k \\ 0 \end{bmatrix}, \text{rank } D_k = \text{rank } \tilde{D}_k = m - d \quad (5)$$

* 原稿受付 2006年1月26日

[†] 山形大学 工学部

Key Words: inverse system, invertible system, unstable zeros, stability, state space design.

$$S_k C_k = \begin{bmatrix} \tilde{C}_k \\ \bar{C}_k \end{bmatrix} \quad (6)$$
$$\begin{aligned}\bar{c}_i A^j B &= 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \gamma(i) - 2 \\ \bar{c}_i A^{\gamma(i)-1} B &\neq 0\end{aligned}\tag{7}$$
$$q_{kl}(s) = s^{\gamma(i)} + \alpha_{i1}s^{\gamma(i)-1} + \dots + \alpha_{i\gamma(i)} \quad (8)$$
$$\begin{aligned}\Psi_k &= \begin{bmatrix} \bar{c}_1 A^{\gamma(1)} + \alpha_{11} \bar{c}_1 A^{\gamma(1)-1} + \dots + \alpha_{1\gamma(1)} \bar{c}_1 \\ \vdots \\ \bar{c}_d A^{\gamma(d)} + \alpha_{d1} \bar{c}_d A^{\gamma(d)-1} + \dots + \alpha_{d\gamma(d)} \bar{c}_d \end{bmatrix} \\ \Phi_k &= \begin{bmatrix} \bar{c}_1 A^{\gamma(1)-1} B \\ \vdots \\ \bar{c}_d A^{\gamma(d)-1} B \end{bmatrix} \\ Q_k(s) &= \text{diag}[q_{k1}(s) \ \dots \ q_{kd}(s)] \\ M_k(s) &= \begin{bmatrix} I_{m-d} & 0 \\ 0 & Q_k(s) \end{bmatrix} \quad (9)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y_{k+1}(s) &\equiv M_k(s)S_k y_k(s) \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{C}_k \\ \Psi_k \end{bmatrix} x(s) + \begin{bmatrix} \tilde{D}_k \\ \Phi_k \end{bmatrix} u(s) \\ &\equiv C'_{k+1}x(s) + D'_{k+1}u(s) \end{aligned} \quad (10)$$
$$M(s) = \prod_{k=1}^{\alpha-1} M_k(s) S_k \quad (11)$$
$$y_\alpha(s) = M(s)y(s) = C_\alpha x(s) + D_\alpha u(s) \quad (12)$$
$$M(s)G_O(s) = C_\lambda(sI - A_\lambda)^{-1}B_\lambda + D_\lambda \quad (13)$$
$$u(s) = -D_\alpha^{-1}C_\alpha x(s) + D_\alpha^{-1}M(s)G_O(s)r(s) \quad (14)$$
$$y(s) = G(s)u(s) = G_O(s)r(s) \quad (15)$$
$$\begin{aligned} & C(sI - A + BD_\alpha^{-1}C_\alpha)^{-1}BD_\alpha^{-1}M(s)G_O(s) \\ &= C(sI - A)^{-1}B[I - D_\alpha^{-1}C_\alpha(sI - A + BD_\alpha^{-1}C_\alpha)^{-1}B] \\ & \quad \cdot D_\alpha^{-1}[C_\lambda(sI - A_\lambda)^{-1}B_\lambda + D_\lambda] = G_O(s) \end{aligned} \quad (16)$$
$$\begin{aligned} P(s) &= \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} \\ \bar{A} &= \begin{bmatrix} A - BD_{\alpha}^{-1}C_{\alpha} & BD_{\alpha}^{-1}C_{\lambda} \\ 0 & A_{\lambda} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} BD_{\alpha}^{-1}D_{\lambda} \\ B_{\lambda} \end{bmatrix} \\ \bar{C} &= [-D_{\alpha}^{-1}C_{\alpha} \quad D_{\alpha}^{-1}C_{\lambda}], \quad \bar{D} = D_{\alpha}^{-1}D_{\lambda} \end{aligned} \quad (17)$$
$$\bar{B} = [\bar{b}_1 \ \cdots \ \bar{b}_m], \ \bar{D} = [\bar{d}_1 \ \cdots \ \bar{d}_m] \quad (18)$$
$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} \tilde{a}_i \\ I_{n(i)-1} \vdots 0 \end{bmatrix}, \tilde{b}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$
$$X_i(\tilde{A}_i + \varepsilon_i I) + (\tilde{A}_i + \varepsilon_i I)^T X_i - X_i \tilde{b}_i \tilde{b}_i^T X_i = 0 \quad (20)$$

– 27 –

とし

$$\begin{aligned}\hat{A}_i &= \tilde{A}_i - \tilde{b}_i \tilde{b}_i^T X_i = \begin{bmatrix} \tilde{a}_i - X_{i1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_i - X_{i1} \\ I_{n(i)-1} \end{bmatrix}, \hat{C}_i = \tilde{C}_i - \tilde{d}_i X_{i1} \\ \hat{A} &= \text{diag}[\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_m], \hat{B} = \text{diag}[\tilde{b}_1 \cdots \tilde{b}_m] \\ \hat{C} &= [\hat{C}_1 \cdots \hat{C}_m], \hat{D} = [\tilde{d}_1 \cdots \tilde{d}_m]\end{aligned}\quad (21)$$

とおく. Riccati 方程式 (20) 式の性質から, $\hat{A}_i$ の固有値は, $\tilde{A}_i$ の安定な固有値, および $\tilde{A}_i$ の不安定固有値を点 $(-\varepsilon_i, 0)$ を通り虚軸に平行な線の対称な点に移したもののからなり [11], $\hat{A}_i$ は安定である. このとき, もとの $\bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}$ の第 i 列は

$$\begin{aligned}\bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{b}_i + \bar{d}_i &= \tilde{C}_i(sI - \tilde{A}_i)^{-1}\tilde{b}_i + \tilde{d}_i \\ &= [\tilde{C}_i v(s) + \tilde{d}_i(s^{n(i)} - \tilde{a}_i v(s))] \frac{1}{s^{n(i)} - \tilde{a}_i v(s)} \\ v(s) &= [s^{n(i)-1} \cdots s \ 1]^T\end{aligned}\quad (22)$$

であり, 新しい $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ の第 i 列は

$$\begin{aligned}\hat{C}_i(sI - \hat{A}_i)^{-1}\tilde{b}_i + \tilde{d}_i \\ &= [\tilde{C}_i v(s) + \tilde{d}_i(s^{n(i)} - \tilde{a}_i v(s))] \frac{1}{s^{n(i)} - [\tilde{a}_i - X_{i1}]v(s)}\end{aligned}\quad (23)$$

である. (23) 式は, $\bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{b}_i + \bar{d}_i$ の分子と安定極を変えずに, 不安定極だけを点 $(-\varepsilon_i, 0)$ を通り虚軸に平行な線の対称な点に移したものであり,

$$\hat{C}_i(sI - \hat{A}_i)^{-1}\tilde{b}_i + \tilde{d}_i = [\bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{b}_i + \bar{d}_i]g_{Ii}(s)\quad (24)$$

が成り立つ. ただし, $g_{Ii}(s)$ は, $\bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{b}_i + \bar{d}_i$ の不安定極を零点にもつ安定な有理関数である.

(注意3) (24) 式から, $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ は, 文献 [5] と異なり, 後ろからインナをかけずに, 直接, 安定化する方法である. さらに, 文献 [6] と異なり, 不安定非行零点の数にかかわらずに, すべての不安定零点に適用することができる.

最後に, $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ の最小実現を

$$(\hat{A}_{\min}, \hat{B}_{\min}, \hat{C}_{\min}, \hat{D}_{\min})$$

とすると, 安定な低域通過逆システムは,

$$P(s) = \hat{C}_{\min}(sI - \hat{A}_{\min})^{-1}\hat{B}_{\min} + \hat{D}_{\min}\quad (25)$$

で与えられ,

$$G(s)P(s) = \text{diag}[g_{O1}(s)g_{I1}(s) \cdots g_{Om}(s)g_{Im}(s)]\quad (26)$$

と対角化できる.

4. おわりに

不安定零点をもつ可逆系に対し, 安定に非干渉化できる低域通過逆システムの状態空間上の新しい設計法を提案した.

参考文献

- [1] 吉川, 杉江: 高周波遮断逆システムとそのサーボ系への応用; 計測自動制御学会論文集, Vol. 18, No. 8, pp. 792-799 (1982)
- [2] 前田, 杉江: アドバンスド制御のためのシステム制御理論, pp. 65-67, システム制御情報ライブラリー-3, 朝倉書店 (1990)
- [3] 山田, 渡部: 低域通過逆システムの状態空間法での構成; 計測自動制御学会論文集, Vol. 28, No. 8, pp. 923-930 (1992)
- [4] 山田, 渡部: 安定な低域通過型逆システムの状態空間法での構成法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 32, No. 6, pp. 862-870 (1996)
- [5] 山田, 木下: 状態空間法による安定な低域通過逆システムの新設計法; システム制御情報学会論文誌, Vol. 16, No. 2, pp. 85-93 (2003)
- [6] 浅黄, 渡部, 村松, 有我: 状態フィードバックと逆システムによる非最小位相系に対する非干渉化の体系的設計法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 41, No. 3, pp. 234-241 (2005)
- [7] 小林: 非干渉制御, 最適な制御系設計と各種制御方式の基礎・理論応用の実際, アイ・エヌ・ジー出版部, pp. 309-327 (1993)
- [8] Q.-G. Wang: *Decoupling Control*, Springer (2003)
- [9] 武藤: 多変数制御系における無限零点とインタラクタ行列について; 計測と制御, Vol. 32, No. 4, pp. 237-252 (1993)
- [10] 加藤, 舟橋: 左下三角インタラクタ行列の新計算法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 33, No. 12, pp. 1178-1180 (1997)
- [11] 川崎, 示村: 指定領域に極を配置する状態フィードバック則の設計法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 15, No. 4, pp. 37-43 (1979)