有界実条件を使った H_∞ 状態フィードバック則 の直接的導出法*

千田 有 一**・美 多 勉**・三 平 満 司**・王 晶 文**

Direct Derivation of H_∞ State Feedback Control Law Using Bounded Real Lemma*

Yuichi CHIDA**, Tsutomu MITA**, Mitsuji SANPEI** and Jing Wen WANG**

Though the H_∞ control has been studied vigorously, the existing H_∞ control theory is somewhat complex so that comparison of its control effect with other conventional controls is difficult. Therefore, in this paper, we formulate some state feedback controls using H_∞ norm criterion and give suboptimal solutions using only bounded real lemma. The results show that robust control has superior stability margin to the LQ optimal control, for example.

1. 緒 言

近年新しい制御理論として, H_∞ 制御が研究されてきている. その大きな設計目標は周波数依存型重みを使った混合感度問題にあると言われている. また, その設計法には, Francis の方法¹, 木村の Conjugation 法^{2,3}, および, Doyle らの方法⁴がある. しかし, これらの論文ではいかに問題を一般的に解くかを問題にしており, 各解法の関係は完全に明らかになっていない. 最近, 木村ら³, および, 劉ら⁵は Doyle らの問題⁴が Conjugation 法で解けることを証明し, Conjugation 法が前者を包含していることを示している.

しかし, 周波数に依存した重みをどう取れば意味ある結果を得, また, 重みを付けない場合でも H_∞ 制御が従来の LQ 制御とどう違うかなど, 工学的考察は不足している. これに対し, 本稿では

- ① 外乱抑圧などの制御効果を高めると過剰のフィードバック量が必要となり, この結果パラメータ変動に対するロバスト安定性は劣化する. これを回避するのがロバスト制御である.
- ② H_∞ 制御は各種特性関数のベクトル軌跡の評価を, 従来の二乗平均評価からベクトル軌跡の絶対最大値である H_∞ ノルムに変えたものである.

との認識に立ち, 従来から知られている状態フィードバック制御問題を H_∞ ノルムを小さくする制御として捉え直し, 有界実条件から直接的に制御則を導いた. また, 得られた結果を LQ 制御と比べ, どう違うかを調べた. 結果として, H_∞ 制御は LQ 制御を包含し, より安定余有を重視した制御であることなどが明らかにされた. よって, LQ 制御と対比して H_∞ 制御を手っ取り早く知るために本論文は有用と考えられる.

ただし, 目的に鑑み, 定理 4 を除いては, 使った重みは周波数に依存したものではないことを断っておく.

2. 有界実条件と準備

最小実現とは限らない連続時間系を

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ : x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p \quad (1)$$

とし, 以下, $\Sigma\{A, B, C, D\}$ と記述する. また, 対応する伝達関数表現 $G(s) [p \times m]$ を

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2)$$

と表わすことにする. このとき A が安定行列で $G(s)$ が

$$G^T(-j\omega)G(j\omega) \leq I_m \quad (\forall \omega) \quad (3)$$

すなわち, 等価な条件

$$\|G(s)\|_\infty \\ = \sup_{-\infty < \omega < \infty} \{\lambda_{\max}[G^T(-j\omega)G(j\omega)]\}^{1/2} \leq 1 \quad (4)$$

* 原稿受付 1989. 3. 22

** 千葉大学 工学部 Faculty of Engineering, Chiba University; 1-33 Yayoi-cho, Chiba 260, JAPAN

Key Words : H_∞ control, state feedback, bounded real lemma, robust control, mixed sensitivity problem.

を満たすとき、 $G(s)$ を有界実と呼び、 $G(s) \in BH_\infty$ と記述する。 $\|G\|_\infty$ は H_∞ ノルムと呼ばれる。

【補題 1】系 (1) において A を安定行列とする。この場合、 $G(s) \in BH_\infty$ のための必要十分条件は

$$PA + A^T P = -C^T C - L^T L \quad (5a)$$

$$B^T P + W^T L = -D^T C \quad (5b)$$

$$I_m - D^T D = W^T W \quad (5c)$$

を満たす $P \geq 0$ と適当な L, W が存在することである。ただし、 (A, B) が可制御でない場合には、 $|I_m - D^T D| \neq 0$ と仮定する（本論文の範囲内では常にこの条件は満たされている）。

【証明】 (A, B) が可制御のときには文献 9) 参照。必ずしも可制御でない場合には付録 1 参照。■

ここで、以下で使う簡単な補題を述べる。

【補題 2】[†] F を任意とする。この場合、 (C, A) が可検出（可観測）ならば、

$$\left(\begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix}, A - BF \right) \quad (6)$$

も可検出（可観測）である。

【補題 3】[†] (C, A) が可検出のとき、任意の L に対し

$$PA + A^T P = -C^T C - L^T L \quad (7)$$

の解が $P \geq 0$ を満たせば、 A は安定行列である。

3. 状態フィードバックによる H_∞ 制御と安定余有

3.1 問題の設定

以下、制御対象は、 (A, B) 可安定、 (C, A) 可検出の

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) \\ &: x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p \end{aligned} \quad (8)$$

とし、次の状態フィードバック制御によって

$$u(t) = -Fx(t) \quad (9)$$

閉ループ系を安定化し、以下に示す特性関数行列

整定関数[†]：

$$W(s) = C(sI_n - A + BF)^{-1}B \quad (10a)$$

入力端感度関数：

$$S(s) = I_m - F(sI_n - A + BF)^{-1}B \quad (10b)$$

入力端相補感度関数：

$$T(s) = F(sI_n - A + BF)^{-1}B \quad (10c)$$

[†] 整定関数は Cheap Control⁸ で、 $\|W(j\omega)\|_2 \rightarrow 0$ とされた場合、任意の $x(0)$ に対して $\|C(j\omega I_n - A + BF)^{-1}x(0)\|_2 \rightarrow 0$ ともなるので、状態整定の一つの目安として導入したものである。

の H_∞ ノルムを指定された値以下とする問題を考える。この場合、 $A - BF$ を安定行列とする $F(m \times n)$ の集合を $F \in \mathcal{K}$ と表わすことにする。

3.2 LQ 最適制御

まずはじめに、定数スカラーの重み μ, ε を使った評価関数

$$\left\| \frac{\mu^{1/2} W(s)}{\varepsilon^{1/2} S(s)} \right\|_\infty \leq 1 \quad (0 < \mu, 0 < \varepsilon < 1) \quad (11)$$

を満たす $F \in \mathcal{K}$ のクラスを求め、一部の解が LQ 最適制御として求められることを示す。重み μ, ε は、例えば μ を増せば $\|W(s)\|_\infty$ が小さくなることを期待して付けたものである。この問題は

$$G_c(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A - BF & B \\ \hline \mu^{1/2} C & 0 \\ -\varepsilon^{1/2} F & \varepsilon^{1/2} I_m \end{array} \right] \quad (12)$$

において、 $G_c(s) \in BH_\infty$ となることに等価である。

よって、補題 1 よりその必要十分条件は

$$\begin{aligned} P(A - BF) + (A - BF)^T P \\ = -\mu C^T C - \varepsilon F^T F - L^T L \end{aligned} \quad (13a)$$

$$B^T P + W^T L = \varepsilon F, \quad (1 - \varepsilon) I_m = W^T W \quad (13b)$$

を満たす $P \geq 0, L, W$ と $F \in \mathcal{K}$ が存在することになる。この場合、 W, L の一般解は (13b) 式より、 r を任意次元とした任意行列 $H(r \times n)$ を用いて、

$$W = \begin{bmatrix} (1 - \varepsilon)^{1/2} I_m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} (\varepsilon F - B^T P) / (1 - \varepsilon)^{1/2} \\ H \end{bmatrix} \quad (13c)$$

と表わすことができる。よって、 L を (13a) 式へ代入し、整理することにより、(13) 式は未定行列 X を使い

$$\begin{aligned} P(A - BF) + (A - BF)^T P + \mu C^T C + \varepsilon F^T F \\ + (\varepsilon F - B^T P)^T (\varepsilon F - B^T P) / (1 - \varepsilon) + H^T H \\ = PA + A^T P - PBB^T P / \varepsilon + \mu C^T C \\ + X^T X + H^T H = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$: X = [\varepsilon^{1/2} F - B^T P / \varepsilon^{1/2}] / (1 - \varepsilon)^{1/2} \quad (15)$$

にまとめられ、 X が定まれば F は次式で逆算できる。

$$F = B^T P / \varepsilon + [(1 - \varepsilon) / \varepsilon]^{1/2} X \quad (16)$$

よって、問題は $P \geq 0$ と $F \in \mathcal{K}$ の存在性に等価となる。

【定理 1】① $G_c(s) \in BH_\infty$ とする $F \in \mathcal{K}$ は常に存在する。② $F \in \mathcal{K}$ の一般解は、任意な X, H に対する (14) 式の解 $P \geq 0$ と X を使った (16) 式で与えられる。

【証明】 (C, A) 可検出なので (14) 式のリカッチ方程式は任意の X, H に対して $P \geq 0$ の解を持つ。また、(16) 式の F は (15) 式を満たし、この F と (14) 式の解 $P \geq 0$ は (13a) 式も満たす。(13a) 式において、 (C, A) が

可検出であるので、補題2、補題3より、 $A-BF$ は安定行列になる。よって、(16) 式の $F \in \kappa$ を満たす。 ■

<系1> $X=0, H=0$ と選んだ場合の (14), (16) 式

$$F = B^T P / \varepsilon \quad (17a)$$

$$PA + A^T P - PBB^T P / \varepsilon + \mu C^T C = 0 \quad (17b)$$

は LQ 最適制御解で、(11) 式を満たす一つの解となる。

3.3 ロバスト制御問題

ここでは、相補感度関数 $T(s)$ に対して、 $\|T(s)\|_\infty \leq \mu^{-1/2}$ ，すなわち

$$\|\mu^{1/2} T(s)\|_\infty \leq 1 \quad (\mu > 0) \quad (18)$$

とする $F \in \kappa$ のクラスを求める。これは

$$G_c(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A-BF & B \\ \hline \mu^{1/2} F & 0 \end{array} \right] \quad (19)$$

において、 $G_c(s) \in BH_\infty$ となることに等価である。よって補題1より

$$P(A-BF) + (A-BF)^T P = -\mu F^T F - L^T L \quad (20a)$$

$$B^T P + W^T L = 0, I_m = W^T W \quad (20b)$$

を満たす $P \geq 0, L, W$ と $F \in \kappa$ が存在することとなる。この場合 W, L の一般解は $H(r \times n)$ を任意行列とし

$$W = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} -B^T P \\ H \end{bmatrix} \quad (20c)$$

となるので、(20a) 式に代入すると (20) 式は

$$\begin{aligned} PA + A^T P - PBB^T P - F^T B^T P \\ + \mu F^T F + PBB^T P + H^T H \\ = PA + A^T P - [(1/\mu) - 1] PBB^T P \\ + X^T X + H^T H = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$: X = \mu^{1/2} F - B^T P / \mu^{1/2} \quad (22)$$

のように一つにまとめられ、 F は次式となる。

$$F = B^T P / \mu + X / \mu^{1/2} \quad (23)$$

【補題4】 $\mu > 1$ の場合、(21) 式の $P \geq 0$ の解を用いた (23) 式が $F \in \kappa$ を満たすためには、 A は安定行列でなくてはならない。また、 $\mu = 1$ の場合には A を安定行列と仮定すれば $F \in \kappa$ とできる。

【証明】 付録2参照

【定理2】 ① $\mu < 1$ であると常に、また、 $\mu > 1$ であると A が安定行列のときに限り、 $\mu = 1$ のときには A を安定行列と仮定すれば、 $G_c(s) \in BH_\infty$ とする $F \in \kappa$ が

† $\mu = 1$ の場合には A がリアプノフ安定でも解が存在することがあるが、細かい議論は省略する。② のように、 (H, A) を可検出に選べば、 A は安定行列となる。

存在する。② (H, A) を可検出と仮定すると、 $F \in \kappa$ の一般解は、 X, H を自由パラメータと考えた、(21) 式の $P \geq 0$ の解に対して、(23) 式で与えられる†。

【証明】 $\mu < 1$ の場合： (H, A) を可検出に選べば (21) 式は任意の X, H に対して $P \geq 0$ の解を持つ。一方、(21) 式は (20a) 式も満たし

$$\begin{aligned} P(A-BF) + (A-BF)^T P \\ = -\mu F^T F - H^T H - PBB^T P \end{aligned} \quad (24)$$

となり、 (H, A) が可検出であるので $F \in \kappa$ となり、 $G_c(s) \in BH_\infty$ となる。また、このとき、 F の一般解は (23) 式となる。 $\mu \geq 1$ の場合：補題4と $\mu = 1$ の場合に用いた仮定より、 $X=0, H=0, P=0, F=0 \in \kappa$ の特解が存在し、 $G_c(s) \equiv 0$ とできる。また、そのほかの解 $P \geq 0$ に対応する (23) 式の F は、 (H, A) を可検出にとると、(24) 式から $F \in \kappa$ を満たす一般解となる。 ■

(18) 式を満たす一つの解として $X=0$ とおいた場合

$$F = B^T P / \mu \quad (25a)$$

$$PA + A^T P - (1/\mu - 1) PBB^T P + H^T H = 0 \quad (25b)$$

のようになる。この場合

$$\Phi(s) \triangleq (sI - A)^{-1} \quad (26)$$

とおき、(25) 式を整理すると、一巡伝達関数

$$F\Phi(s)B \quad (27)$$

は次式を満たすことが確かめられる (付録3参照)。

$$\begin{aligned} B^T \Phi^T(-s) F^T + F\Phi(s)B \\ = (\mu - 1) B^T \Phi^T(-s) F^T F\Phi(s)B \\ + B^T \Phi^T(-s) H^T H\Phi(s)B / \mu \end{aligned} \quad (28)$$

また、還送差行列

$$R(s) = I_m + F\Phi(s)B \quad (29)$$

は次式を満たすことも (28) 式から分る。

$$\begin{aligned} R^T(-s)R(s) \\ = I_m + \mu B^T \Phi^T(-s) F^T F\Phi(s)B \\ + B^T \Phi^T(-s) H^T H\Phi(s)B / \mu \end{aligned} \quad (30)$$

本式の H の大きさは任意なので、 $H \rightarrow 0$ を考えれば、藤井ら⁶の結果に似た次の系を得る。

<系2> ロバスト制御の還送差行列は任意の H に対して

$$\begin{aligned} R^*(j\omega)R(j\omega) \\ \geq I_m + \mu B^T \Phi^*(j\omega) F^T F\Phi(j\omega)B \end{aligned} \quad (31)$$

を満たす。ここで、添え字 * は共役転置記号である。

この系から、 $m=1$ の場合、一巡伝達関数は Fig.1

 Fig. 1 Nyquist plot of $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mu = 0.7$

のように

$$|1 + \mu b^T \Phi^*(j\omega) f^T f \Phi(j\omega) b|^{1/2} - 1 \quad (32)$$

のゲルシュゴーリン帯分以上の余有を持って $(-1, j0)$ を中心とした半径 1 の円の外側に存在することが分る。よって、LQ 最適制御の場合より厳しい円条件を満たすことが分り、ロバスト制御は LQ 最適制御より大きい安定余有を持つことが分る。

また、 $\mu \geq 1$ の場合には、(28) 式より次式が成り立つ。

$$B^T \Phi^*(j\omega) F^T + F \Phi(j\omega) B \geq 0 \quad (33)$$

＜系 3＞ ロバスト制御の一巡伝達関数は $\mu \geq 1$ のとき正実となり、 $\text{rank}(H) = n$ と選べば強正実となる。

【証明】 $\mu \geq 1$ の場合、 A は補題 4 より安定行列であったので、(33) 式より正実であることは明らかである。また、 $\text{rank}(H) = n$ の場合、 $H^T H = Q(n \times n) > 0$ となるので、(25) 式は

$$B^T P = F \mu \quad (34)$$

$$PA + A^T P = (1/\mu - 1) PBB^T P - Q < 0 \quad (35)$$

のカルマン-ヤコビッチ条件を満たし、しかも、 A が安定行列なので、 $P \geq 0$ の解があればそれは $P > 0$ を満たす。したがって、 $\mu F \Phi(s) B$ 、すなわち (27) 式は強正実となる。

この系より、 $\mu \geq 1$ の場合には、一巡伝達関数の位相遅れは 90° 以内か、あるいは、 $\omega \neq \pm\infty$ を除いて 90° 未満となることが分る。

3.4 周波数に依存しない混合感度問題

この問題は標準的な H_∞ 制御問題であり

$$\left\| \frac{\mu^{1/2} T(s)}{\varepsilon^{1/2} S(s)} \right\|_\infty \leq 1 \quad (0 < \mu, 0 < \varepsilon < 1) \quad (36)$$

すなわち

$$G_c(s) \triangleq \begin{bmatrix} A - BF & B \\ \mu^{1/2} F & 0 \\ -\varepsilon^{1/2} F & \varepsilon^{1/2} I_m \end{bmatrix} \quad (37)$$

において $G_c(s) \in BH_\infty$ となる F を求める問題になる。

この場合にも、

$$P(A - BF) + (A - BF)^T P = -(\varepsilon + \mu) F^T F - L^T L \quad (38a)$$

$$B^T P + W^T L = \varepsilon F, (1 - \varepsilon) I_m = W^T W \quad (38b)$$

より、 L は (13c) 式の形式で与えられ、(38) 式は

$$\begin{aligned} PA + A^T P - PBB^T P + (\varepsilon + \mu) F^T F + H^T H \\ + \frac{\varepsilon^2 F^T F - \varepsilon F^T B^T P - \varepsilon PBF + PBB^T P}{1 - \varepsilon} \\ = PA + A^T P + H^T H \\ + \frac{\theta F^T F - F^T B^T P - PBB^T P}{1 - \varepsilon} \\ = PA + A^T P - (1 - \mu) PBB^T P / \theta \\ + X^T X + H^T H = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\theta \triangleq \varepsilon + (1 - \varepsilon)\mu > 0 \quad (40)$$

$$X = (\theta^{1/2} F - B^T P / \theta^{1/2}) / (1 - \varepsilon)^{1/2} \quad (41)$$

と一つにまとめられ、 F は次式となる。

$$F = B^T P / \theta + [(1 - \varepsilon) / \theta]^{1/2} X \quad (42)$$

【定理 3】 ① $\mu < 1$ であると常に、また、 $\mu > 1$ であると A が安定行列のときに限り、 $\mu = 1$ のときには A を安定行列と仮定すれば、 $G_c(s) \in BH_\infty$ とする $F \in \kappa$ が存在する。② (H, A) を可検出と仮定すると、 $F \in \kappa$ の一般解は、 X, H を自由パラメータと考えた、(39) 式の $P \geq 0$ の解に対して、(42) 式で与えられる。

【証明】 (39), (42) 式について補題 4 が成り立ち、定理 2 と全く同様にして証明できる。 ■

(36) 式を満たす一つの解として $X = 0$ とおいた場合

$$F = B^T P / \theta \quad (43a)$$

$$PA + A^T P - (1 - \mu) PBB^T P / \theta + H^T H = 0 \quad (43b)$$

となる。さらに、この解を使った場合の選送差行列は

$$\begin{aligned} R^T(-s)R(s) = I_m + \mu B^T \Phi^T(-s) F^T F \Phi(s) B \\ + B^T \Phi^T(-s) H^T H \Phi(s) B / \theta \end{aligned} \quad (44)$$

を満たし、任意の H と θ に対して系 2、系 3 と同様な議論ができる。よって、混合感度問題の解はロバスト制御と同様な安定余有を持つ。

3.5 Doyle らの問題

Doyle⁴ らは、制御入力 $u(t)$ 、外乱 $w(t)$ 、出力 $z(t)$ としたとき、 (C, A) 可観測、 (A, B_2) 可安定な系

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \quad (45a)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u(t) \quad (45b)$$

において、(9) 式の状態フィードバックにより、 $w(t)$

から $z(t)$ までの閉ループ伝達関数

$$G_c(s) = \begin{bmatrix} A-B_2F & B_1 \\ C & 0 \\ -F & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

を $\|G_c(s)\|_\infty < 1$ とする問題を考えている。この問題は等号を除けば有界条件と一致し

$$P(A-B_2F) + (A-B_2F)^T P = -F^T F - C^T C - L^T L \quad (47a)$$

$$B_1^T P + W^T L = 0, \quad I = W^T W \quad (47b)$$

を満たす $P \geq 0, L, W, F \in \mathcal{K}$ を見つける問題となるが、 (C, A) は可観測なので、 $\{(C^T, F^T)^T, A-B_2F\}$ も可観測となり、 $P > 0$ の解が問題となる。この場合には、 L は (20c) 式の形式で与えられ、(47) 式は

$$\begin{aligned} PA - PB_2F + A^T P - F^T B_2^T P \\ + F^T F + C^T C + PB_1 B_1^T P + H^T H \\ = PA + A^T P - P(B_2 B_2^T - B_1 B_1^T) P \\ + C^T C + X^T X + H^T H = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

$$: X = F - B_2^T P \quad (49)$$

とまとめられ、 F は次式となる。

$$F = B_2^T P + X \quad (50)$$

【定理4】 ① $G_c(s) \in BH_\infty$ とする必要十分条件は、(48) 式が解 $P > 0$ を持つような適当な X, H が存在することである。② $F \in \mathcal{K}$ の一般解は (50) 式で与えられる。

【証明】 (50) 式の F が $F \in \mathcal{K}$ であることを証明する。(48) 式の解 $P > 0$ は、(47a) 式も満たし、 (C, A) が可観測なので、補題2, 3より、 $A-B_2F$ は安定行列となる。

【注意1】 $X=0$ とおけば十分解として、Doyle ら⁴ の結果を得る。ただし、彼らは、 $P > 0$ で $A-B_2B_2^T P + B_1 B_1^T P$ が安定行列となる、いわゆる Central Solution を考えている。しかし、 $\|G_c(s)\|_\infty \leq 1$ のためには、Central Solution である必要はない。 $A-B_2B_2^T P$ を安定行列にする解 $P \geq 0$ は一般に複数存在する。

4. 近似 Zeroing と LTR

4.1 近似 Zeroing と Cheap Control

制御対象を (A, B) 可安定、 (C, A) 可検出な

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Ev, \quad y = Cx \\ x &\in R^n, u \in R^m, y \in R^p, v \in R^k \end{aligned} \quad (51)$$

とし、 y は制御出力、 v は任意外乱とする。この場合、状態フィードバック制御 (9) 式により閉ループ系は

$$\dot{x} = (A-BF)x + Ev, \quad y = Cx \quad (52)$$

となる。近似 Zeroing 問題は v から y までの閉ループ

伝達関数

$$G_{yv}(s) = C(sI_n - A + BF)^{-1} E \quad (53)$$

の H_∞ ノルムをできるだけ小さくする $F \in \mathcal{K}$ を求めること、すなわち、できるだけ大きい μ に対して

$$\|\mu^{1/2} G_{yv}(s)\|_\infty \leq 1 \quad (54)$$

を満たす F を求めることである。この場合にも、 $G_c(s) \triangleq \mu^{1/2} G_{yv}(s)$ と定義して、補題1を使うと

$$P(A-BF) + (A-BF)^T P = -\mu C^T C - L^T L \quad (55a)$$

$$E^T P + W^T L = 0, \quad I_k = W^T W \quad (55b)$$

を満たす $P \geq 0, W, L, F \in \mathcal{K}$ を求める問題となる。任意行列 H を用いると $W = (I_k, 0)^T, L^T = (-PE, H^T)$ を得るので (55) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned} PA + A^T P - PBF - F^T B^T P \\ + \mu C^T C + PEE^T P + H^T H = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

【定理5】 $G_c(s) \in BH_\infty$ となるための必要十分条件は、ある $Q \geq 0$ と $\delta > 0$ に対して

$$PA + A^T P - P(\delta BB^T - EE^T)P + \mu C^T C + Q = 0 \quad (57)$$

が解 $P \geq 0$ を持つことである。このとき、 $F \in \mathcal{K}$ の一つは次式で与えられる。

$$F = \delta B^T P \quad (58)$$

(証明) 十分性：(57)、(58) 式の解 $P \geq 0$ が (56) 式を満たすことを示す。まず、(57) 式がある与えられた $Q \geq 0, \delta, \mu$ に対して定まった解 $P \geq 0$ を持ったとする。この場合、 H を $H^T H \triangleq Q + \delta PBB^T P$ ととり、 $Q = H^T H - \delta PBB^T P \geq 0$ と (58) 式の F を (57) 式に代入すれば、整理して (56) 式を得る。また、 $A-BF$ の安定性については、(57)、(58) 式より

$$\begin{aligned} P(A-BF) + (A-BF)^T P \\ = -\mu C^T C - F^T F / \delta - PEE^T P - Q \end{aligned} \quad (59)$$

が成り立つので、補題2、補題3より $F \in \mathcal{K}$ となる。

必要性：(56) 式を満たす $P \geq 0$ が存在したとき、ある $\delta > 0$ が存在し、 P が (57) 式を満たすことを示す。そこで、

$$S \triangleq PA + A^T P + PEE^T P + \mu C^T C + H^T H \quad (60)$$

$$S - \delta^T PBB^T P = Q' \quad (61)$$

と定義して見よう。この場合、 $B^T P x = 0$ を満たす x があれば、(56) 式から、このようなすべての x について $x^T S x = 0$ となり、(61) 式から、 $x^T Q' x = 0$ を得る。また、(61) 式から、 $B^T P x \neq 0$ を満たすすべての x に対して $x^T Q' x \leq 0$ とする

$$\delta \geq \lambda_{\max}(S)/\lambda_{\min+}(PBB^T P) \quad (62)$$

が存在する。ここで、 $\lambda_{\max}$ は最大固有値、 $\lambda_{\min+}$ は非零の最小固有値である。よって、(61) 式の Q' は半負定である。そこで、 Q' を適当な $Q \geq 0$ を選んで、 $Q' = H^T H - Q \leq 0$ と置きなおすと、(61) 式は (57) 式となり、(56) 式を満たす $P \geq 0$ に対して (57) 式が成り立つことがわかる。なお、 $B^T P = 0$ の場合には $Q' = 0$ とすれば良い。■

【注意 2】 文献 7)、10) でも同じ問題が扱われているが、得られた必要条件と十分条件には若干のギャップがある。すなわち、(57) 式で、正定な Q のみを考えているため、解 P も正定なクラスに限定されてしまい、定理 5 よりも必要条件、十分条件共により厳しい条件となっている。例えば

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = [1, 0], \mu = 3$$

のとき (57) 式は $Q = 0$ に対し $\delta = 5$ として次の半定解

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0, A - BF = \begin{bmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$P \geq 0$ を持ち、文献 7) の方法では得られない解である。

つぎに、最小位相系では Cheap Control によって、 $\mu \rightarrow \infty$ ととれること、すなわち

$$\|G_{yv}(s)\|_\infty \rightarrow 0 \quad (63)$$

とする $F \in \mathcal{K}$ の存在性を示しておく。

【命題 1】 $m \geq p$ で $\Sigma\{A, B, C\}$ が最小位相ならば、 $\mu \rightarrow \infty$ とする、 $F \in \mathcal{K}$ が存在する。

【証明】 一般性を失わず、 C, B, E をフルランクとし、 F として、 μ をパラメータとした LQ 最適制御の解

$$F = \mu^2 B^T P \quad (64a)$$

$$PA + A^T P - \mu^2 PBB^T P + C^T C = 0 \quad (64b)$$

を使う。(64b) 式は、 $A_c = A - BF$ と置けば

$$PA_c + A_c^T P + \mu^2 PBB^T P + C^T C = 0 \quad (65)$$

ともなる。この場合、良く知られているように、 $\mu \rightarrow \infty$ で P と μP は一定値に収束し⁸⁾、特に、 $\Sigma\{A, B, C\}$ が最小位相のとき、 $F \in \mathcal{K}$ で $P \rightarrow 0$ となり、(64b) 式から

$$\mu^2 PBB^T P \rightarrow C^T C \quad (66)$$

を得る。ここで、 $\Phi(j\omega) = (j\omega I_n - A_c)^{-1}$ において、(65) 式を使うと

$$\begin{aligned} G_{yv}^*(j\omega)G_{yv}(j\omega) &= E^T \Phi^* C^T C \Phi E \\ &= E^T \Phi^* \{-PA_c - A_c^T P - \mu^2 PBB^T P\} \Phi E \\ &= E^T \Phi^* \{P(j\omega I - A_c) + (-j\omega I - A_c)^T P \\ &\quad - \mu^2 PBB^T P\} \Phi E \\ &= E^T \{\Phi^* P + P \Phi - \mu^2 \Phi^* PBB^T P \Phi\} E \end{aligned} \quad (67)$$

となり、本式から $\mu^{-1} E^T E$ を引くと、さらに

$$\begin{aligned} G_{yv}^*(j\omega)G_{yv}(j\omega) - \mu^{-1} E^T E &= E^T \{\Phi^* P + P \Phi - \mu^2 \Phi^* PBB^T P \Phi - I_n / \mu\} E \\ &= -E^T (\mu^{-1/2} I_n - \mu^{1/2} P \Phi)^* (\mu^{-1/2} I_n - \mu^{1/2} P \Phi) E \\ &\quad - E^T \Phi^* [\mu^2 PBB^T P - \mu P^2] \Phi E \end{aligned} \quad (68)$$

となる。ここで、本式第 1 項は任意の μ に対して半負定である。一方、第 2 項の [] 中は、 $\mu \rightarrow \infty$ で

$$\begin{aligned} \mu^2 PBB^T P - \mu P^2 &= \mu^2 PBB^T P - P(\mu P) \rightarrow C^T C \geq 0 \end{aligned} \quad (69)$$

となる。ここで、(66) 式と $P \rightarrow 0$, $\mu P \rightarrow$ 一定となることを使った。よって、 $\mu \rightarrow \infty$ で次式が成り立つ。

$$G_{yv}^*(j\omega)G_{yv}(j\omega) \leq \mu^{-1} E^T E \quad (70)$$

本式は各 ω に対して

$$\lambda_{\max}\{G_{yv}^*(j\omega)G_{yv}(j\omega)\} \leq \mu^{-1} \lambda_{\min}\{E^T E\} \quad (71)$$

を意味しており、 E がフルランクなので、 $|E^T E| =$ 一定 $\neq 0$ より、 $\lambda_{\max}\{G_{yv}^*(j\omega)G_{yv}(j\omega)\} \rightarrow 0$ ($\mu \rightarrow \infty$) となり、(63) 式が成り立つ。

4.2 LTR (Loop Transfer Recovery) 問題

この問題は松尾¹⁵⁾によって検討され、佐伯¹⁰⁾によって解かれたものであるが、必ずしも分りやすいとは言えないので、ここで再度扱っておく。今、制御対象を (8) 式とする。この場合、(9) 式の状態フィードバックによって入力端の一巡伝達関数は

$$L(s) = F(sI - A)^{-1} B \quad (72)$$

となる。ここで、状態が観測できず、入力端の変動を考えない場合のオブザーバによるフィードバックを

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + Ky(t) + Bu(t) \quad (73a)$$

$$u(t) = -F\hat{x}(t) : K(n \times p) \quad (73b)$$

とすると、オブザーバの直列補償器実現が

$$F(sI_n - A + BF + KC)^{-1} K \quad (74)$$

となるので、オブザーバ併合系の一巡伝達関数は

$$L'(s) = F(sI_n - A + BF + KC)^{-1} K \cdot C(sI - A)^{-1} B \quad (75)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
L(s) - L'(s) &= F(sI_n - A)^{-1}B - F(sI_n - A + BF + KC)^{-1}K \\
&\quad \cdot C(sI_n - A)^{-1}B \\
&= F[I_n - (sI_n - A + BF + KC)^{-1}KC] \cdot (sI_n - A)^{-1}B \\
&= F(sI_n - A + BF + KC)^{-1}(sI_n - A + BF) \\
&\quad \cdot (sI_n - A)^{-1}B \\
&= F(sI_n - A + BF + KC)^{-1}[B + BF(sI - A)^{-1}B] \\
&= F(sI_n - A + BF + KC)^{-1}B \cdot [I_m + L(s)] \quad (76)
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 K を選んで

$$\|\mu^{1/2}F(sI_n - A + BF + KC)^{-1}B\|_{\infty} \leq 1 \quad (77)$$

とできれば、

$$\begin{aligned}
&\sup_{\omega} \bar{\sigma}\{L(j\omega) - L'(j\omega)\} \\
&\leq \mu^{-1/2} \cdot \sup_{\omega} \bar{\sigma}\{I_m + L(j\omega)\} \quad (78)
\end{aligned}$$

となり、 $\mu \rightarrow \infty$ で、 $L'(j\omega)$ は $L(j\omega)$ に $\mu^{-1/2}$ に比例して回復する。ただし、 $A - BF - KC$ は安定行列とし、これを安定行列にするオブザーバのゲイン K を $K \in \kappa$ と記述する。この場合

$$A_o = A - BF \quad (79)$$

とおき、(77) 式 $\| \cdot \|_{\infty}$ 内の伝達関数の転置を $G_c(s)$ と定義すると、 $G_c(s) \in BH_{\infty}$ となる K を求める問題となる。よって、補題1より、次の条件式を得る。

$$P(A_o - KC)^T + (A_o - KC)P = -\mu BB^T - L^T L \quad (80a)$$

$$FP + W^T L = 0, \quad I_m = W^T W \quad (80b)$$

(80b) 式の一般解は、任意行列 $H(r \times n)$ を使って、 $W = (I_m, 0)^T$, $L^T = (-PF^T, H^T)$ となり、(80) 式は

$$\begin{aligned}
&PA_o^T + A_o P - PC^T K^T - KCP \\
&\quad + \mu BB^T + PF^T FP + H^T H = 0 \quad (81)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 (A, B) が可安定なので、 (A_o, B) も可安定であり、補題2の双対として、 $\{A_o - KC, (K, B)\}$ も任意の K に対して可安定なので、定理5と命題1の双対(転置をとる)が成り立ち以下ようになる。

【定理6】 (77) 式が $K \in \kappa$ で成り立つための必要十分条件は、ある $Q \geq 0$ と $\delta > 0$ に対して

$$PA_o^T + A_o P - P(\delta C^T C - F^T F)P + \mu BB^T + Q = 0 \quad (82)$$

が $P \geq 0$ の解を持つことであり、 $K \in \kappa$ の一つは

$$K = \delta PC^T \quad (83)$$

で与えられる。

【命題2】 $\Sigma\{A, B, C\}$ が最小位相で、 $p \geq m$ であれば、(77) 式で $\mu \rightarrow \infty$ とする $K \in \kappa$ が存在する。

5. 結 言

有界実条件から直接、種々の H_{∞} 制御問題を簡単に導き、ロバスト制御や混合感度問題の安定余有を示し、さらに、近似 Zeroing と LTR の必要十分条件を導出した。導出は極めて簡単であり、 H_{∞} 制御系の極配置などの吟味もできるが、紙面の都合上省略する¹²。また、ここでは状態フィードバックのみについて取り扱ったが出力フィードバックも同様にして取り扱える、さらに、周波数依存型重み関数がある場合も、拡大系に対して本手法を適用すれば、同様にして解くことができる¹³。

参 考 文 献

- 1) B. A. Francis : A Course in H_{∞} Control Theory, Springer-Verlag (1987)
- 2) H. Kimura : Conjugation, Interpolation and Model-matching in H_{∞} ; Int J. Control, Vol. 49, No. 1, pp. 269~307 (1989)
- 3) H. Kimura & R. Kawatani : Synthesis of H_{∞} Controllers Based on Conjugation, Proc. of 27th CDC, pp. 7~13 (1988)
- 4) J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar & B. Francis : State-space Solutions to Standard H_2 and H_{∞} Control Problems, ACC (1988),
- 5) K. Z. Liu & T. Mita, On State Feedback H -Infinity Control Problems - A Conjugation Approach-Systems & Control Lett., 28th CDC, to appear
- 6) T. Fujii & P. Khargonekar : Inverse Problems in H_{∞} Control Theory and Linear-Quadratic Differential Games; 27th CDC, pp. 26~31 (1988), The 11th SICE Symposium on DST, pp. 61~66 (1988)
- 7) I. R. Peterson : Disturbance Attenuation and H_{∞} Optimization, IEEE Trans. on AC, Vol. 32, No. 5, pp. 427~429 (1987)
- 8) B. A. Francis & K. Glover : Bounded Peaking in the Optimal Linear Regulator with Cheap Control; IEEE Trans. on AC, Vol. 23, No. 4, pp. 608~617 (1978)
- 9) B. D. O. Anderson & S. Vongpanitlerd : Network Analysis and Synthesis, Prentice-Hall (1973)
- 10) 佐伯 : 回復度を指定できる LTR 法によるオブザーバの設計; 第11回 DST シンポジウム, pp. 25~30 (1988)
- 11) 美多 : LQ 最適制御から導かれる H_{∞} 最適制御, 計測自動制御学会論文集, 24 巻, 11 号, pp. 1207~1209 (1988)
- 12) 美多, 三平, 千田, 王 : H_{∞} 制御の有界実性による直接解法 - 状態フィードバックの場合 - ; 第18回制御理論シンポジウム, pp. 1~6 (1989)
- 13) 三平, 美多, 中道 : H_{∞} 制御の有界実性による直接解法 - 出力フィードバックの場合 - ; 同上, pp. 7~12 (1989)
- 14) 児玉, 須田 : システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (1978)
- 15) 松尾, 富永, 杉坂, 相良 : 未知入力オブザーバを用いたフィードバック制御系のロバスト設計; 電気学会産業応用部門誌, 108 巻, 7D 号, pp. 639~645 (1988)

付録1 以下、文献9)の証明手順に沿って説明する。まず、(1)式に対して次の関数を定義する。

$$R(s) \triangleq (I_m - D^T D) / 2 - (D^T C + B^T M) (sI - A)^{-1} B \quad (A1)$$

ただし, M は次式の解 $M \geq 0$ とする.

$$MA + A^T M = -C^T C \quad (A2)$$

すると, この二式を変形して次式を得る.

$$R^T(-s) + R(s) = I_m - G^T(-s)G(s) \quad (A3)$$

また, $G(s)$ が漸近安定ならば, $R(s)$ も漸近安定となる. よって, $G(s) \in BH_\infty$ のための必要十分条件は, $R(s)$ が次の正実条件を満たすことになる.

$$R^T(-j\omega) + R(j\omega) \geq 0 \quad (A4)$$

ここで, A が安定行列であるが, 必ずしも最小実現でない $R(s)$ について

$$\text{【補題 A1】 } R(s) = H(sI - F)^{-1}G + E \quad (A5)$$

が正実となるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} QF + F^T Q &= -L^T L, \quad G^T Q + W^T L = H \\ E^T + E &= W^T W \end{aligned} \quad (A6)$$

を満たす $Q \geq 0$ が存在することである.

が証明できれば, (A5) 式と (A1) 式において

$$\begin{aligned} F &= A, \quad G = B, \quad H = -D^T C - B^T M \\ E &= (I_m - D^T D) / 2 \end{aligned} \quad (A7)$$

の対応関係があるので, (A6) 式へ代入して次式を得る.

$$\begin{aligned} QA + A^T Q &= -L^T L, \\ B^T Q + W^T L &= -D^T C - B^T M, \quad I_m - D^T D = W^T W \end{aligned} \quad (A8)$$

最後に (A2) 式を (A8) 式に加えて整理し, $P = Q + M \geq 0$ とおけば (5) 式を得る. よって, 有界実定理は正実定理の応用である.

補題 A1 は (F, G) 可制御の場合には, (A6) 式の $Q \geq 0$ の存在性に帰着されることが知られている⁹.

よって, (F, G) が必ずしも可制御でない場合の, 補題 A1 の必要条件の証明には, 可制御な部分が (A6) 式に対応する条件下で $Q \geq 0$ の解を持つとき, 不可制御な部分があっても, (A6) 式が $Q \geq 0$ の解を持つことを証明すれば良い. 十分条件は可制御, 可観測性とは無関係に, (A6) 式が成立つときスペクトル因子

$$T(s) = W + L(sI - F)^{-1}G \quad (A9)$$

によって

$$R(-s) + R(s) = T^T(-s)T(s) \quad (A10)$$

と分解できる⁹ ことから明らか.

そこで, (F, G) が不可制御であっても

$$E^T + E = I_m - D^T D > 0 \quad (A11)$$

であれば, 補題 A1 が成立つことを示す. (F, G) が不

可制御の場合の正準形式は次のようになる.

$$\begin{aligned} H &= [H_1, H_2], \quad F = \begin{bmatrix} F_1 & F_{12} \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &: (F_1, G_1) \text{ 可制御} \end{aligned} \quad (A12)$$

そこで

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \gamma \end{bmatrix}, \quad L = [L_1, L_2] \quad (A13)$$

と定義した Q, L を (A6) 式に代入すると

$$\alpha F_1 + F_1^T \alpha = -L_1^T L_1 \quad (1)$$

$$\beta F_2 + F_1^T \beta + \alpha F_{12} = -L_1^T L_2 \quad (2)$$

$$\gamma F_2 + F_2^T \gamma + \beta^T F_{12} + F_{12}^T \beta = -L_2^T L_2 \quad (3)$$

および,

$$G_1^T \alpha + W^T L_1 = H_1 \quad (4)$$

$$G_1^T \beta + W^T L_2 = H_2 \quad (5)$$

$$E^T + E = W^T W \quad (6)$$

を得る. ここで, (1), (4), (6) 式は可制御部分の正実条件を示しており, $\alpha \geq 0$ [(H_1, F_1) が可観測なら $\alpha > 0$] の解がある. このとき, スペクトル因子

$$\begin{aligned} T(s) &= W + L_1(sI - F_1)^{-1}G_1 \\ &= W + W^{-1}(H_1 - G_1^T \alpha)(sI - F_1)^{-1}G_1 \end{aligned} \quad (A14)$$

の逆行列

$$\begin{aligned} T^{-1}(s) &= W^{-1} - W^{-2}(H_1 - G_1^T \alpha) \\ &\quad \times \{sI - F_1 + G_1 W^{-2}(H_1 - G_1^T \alpha)\}^{-1} G_1 W^{-1} \end{aligned} \quad (A15)$$

は $R(s)$ が正実なので $\text{Re}\{s\} > 0$ で解析的となり

$$F_2 \triangleq F_1 - G_1 W^{-2}(H_1 - G_1^T \alpha) \quad (A16)$$

は $\text{Re}\{s\} > 0$ に固有値を持たないことが証明できる⁹.

一方, (2), (5) 式は

$$\begin{aligned} \beta F_2 + F_2^T \beta + \alpha F_{12} \\ + (H_1^T - \alpha G_1) W^{-2} H_2 &= 0 \end{aligned} \quad (A17)$$

と整理できるが, F_2 が安定で F_2 の固有値の実部は非正なので, $\lambda_i\{F_2\} + \lambda_j\{F_2\} \neq 0$ となり, 任意の α に対して唯一解 β を持つ.

さらに, (3) 式は

$$\begin{aligned} \gamma F_2 + F_2^T \gamma + \beta^T F_{12} + F_{12}^T \beta \\ + (H_2 - G_1 \beta)^T W^{-2} (H_2 - G_1 \beta)^T &= 0 \end{aligned} \quad (A18)$$

とおけ, F_2 の安定性から, γ は任意の β について唯一解を持つ.

よって, (A6) 式の Q は α に対応する唯一解を持つ. さらに, A を安定と仮定しているので, F も安定であり, リアプノフ方程式 $QF + F^T Q = -L^T L$ から, 解 Q

は半正定である.

付録2 $\mu > 1$ の場合: A の任意の固有値, 固有ベクトルを $\lambda, x \neq 0$ とする. $P \geq 0$ の解を仮定した, (21) 式に左右から $\bar{x}^T, x$ をかけて整理すると, 次の不等式を得る.

$$2 \operatorname{Re}\{\lambda\} \bar{x}^T P x = -\bar{x}^T X^T X x - \bar{x}^T H^T H x + (1/\mu - 1) x^T P B B^T P x \leq 0 \quad (\text{A } 19)$$

よって, $Px \neq 0$ のときには, $\operatorname{Re}\{\lambda\} \leq 0$ となり, $\operatorname{Re}\{\lambda\} = 0$ となるのは $Xx = Hx = B^T Px = 0$ の場合に限られる. しかし, この場合, (23) 式から $Fx = 0$ となり, $(A - BF)x = \lambda x$: $\operatorname{Re}\{\lambda\} = 0$ を得, $F \notin \kappa$ となる. また, $Px = 0$ の場合には, $Xx = Hx = 0$ を得, これから $Fx = 0$ となり, $(A - BF)x = \lambda x$ を得, $\operatorname{Re}\{\lambda\} < 0$ でなければ, $F \in \kappa$ とならない. よって A は安定行列でなくてはならない. $\mu = 1$ の場合: $P = 0$, $X = 0$, $H = 0$, $F = 0$ の解が存在することからも明らか.

付録3 (25a) 式より $B^T P = \mu F$ となるので

$$P(sI - A) + (-sI - A^T)P = (\mu^2 - \mu)F^T F + H^T H \quad (\text{A } 20)$$

を (25b) 式より得る. 両辺に左右から $B^T \Phi^T(-s)$, $\Phi(s)B$ をかけ, $P^T B = \mu F$ を再度使うと

$$\begin{aligned} & B^T \Phi^T(-s) P B + B^T P \Phi(s) B \\ &= \mu B^T \Phi^T(-s) F^T + \mu F \Phi(s) B \\ &= (\mu^2 - \mu) B^T \Phi^T(-s) F^T F \Phi(s) B \\ &+ B^T \Phi^T(-s) H^T H \Phi(s) B \end{aligned} \quad (\text{A } 21)$$

となり, μ で両辺を割ると, (28) 式となる. (30) 式は (28) 式両辺に $I_m + B^T \Phi^T(-s) F^T F \Phi(s) B$ を加えて整理すれば導出できる.