あいまいな症状に対するセット・カバ理論的故障診断*

石渕 久生**・市橋 秀友**・田中 英夫**

Set-Cover Theoretical Diagnosis Based on Fuzzy Symptoms*

Hisao ISHIBUCHI**, Hidetomo ICHIHASHI** and Hideo TANAKA**

In this paper, the set-cover theoretical diagnosis model proposed by Reggia et al. is extended to allow a fuzzy occurrence of symptoms. In the Reggia's model, each disorder has the set of possible manifestations which is represented by the possible causal relations, and this relation represents the knowledge that disorder c_i may cause manifestation e_j . In addition to this relation, we introduce the necessary causal relation which represents the knowledge that disorder c_i always causes manifestation e_j . By this relation, the information that manifestation e_j doesn't occur in the patient can be available for the diagnosis process. In order to diagnose the fuzzy symptoms, we propose the method for constructing the belief function on the frame of diagnosis hypotheses. The upper and lower probabilities of each diagnosis hypothesis and each disorder are obtained from this belief function.

1. はじめに

故障診断に対するエキスパート・システムの多くは、MYCYNをはじめとして“if A then B ”形式の知識にもとづくものが多い¹。また、この形式によるファジィ診断には、命題 A, B をファジィ集合で与え、症状パターンと前件部 A との適合度により診断を行なうものがある²。

これに対し、Reggia ら³により提案されたセット・カバ理論的診断モデルは、“原因 c_i は結果 e_j を引き起こすことがある”という可能的因果関係にもとづくものであり、複数の原因が同時に存在するような場合に対する診断を目的にしたものである。

本研究では、Reggia らのモデルをもとに、症状に対するあいまいな情報を取り扱うことができる診断モデルを提案する。まず、2. において Reggia らによる診断モデルを説明し、新たに必然的因果関係を定義する。必然的因果関係は、“原因 c_i は必ず結果 e_j を引き起こす”という知識を表わすものであり、この因果関係により、

症状が起きていないという情報を診断に利用することが可能になる。つぎに、3. においてあいまいな症状に対する診断問題を定義する。そして、個々の症状に対するあいまいな情報を Dempster-Shafer 理論における証拠と考えることにより、複数の原因の組み合わせである診断仮説上での基本確率を導出する。この基本確率により、診断仮説に対する上界および下界確率とともに、個々の原因の存在に対する上界および下界確率が求められる。

2. セット・カバ理論にもとづく診断モデル

2.1 Reggia らのモデル

Reggia ら³により提案されたセット・カバ理論的診断モデルは、複数の原因が同時に存在するような場合を対象とした故障診断に理論的な基礎を与えようという最近の試みである。このモデルは、Parsimonious Covering Model と呼ばれ、次の四つの要素 C, E, R^*, E^+ から構成されている。

C : 原因の集合, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$

E : 結果の集合, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

R^* : $C \times E$ 上の可能的因果関係

E^+ : 診断対象において発生している結果の集合

このことから、診断問題は、 $P = \langle C, E, R^*, E^+ \rangle$ と

* 原稿受付 1988. 6. 6

** 大阪府立大学 工学部 University of Osaka Prefecture ; Mozuumemachi 4-804, Sakai, Osaka 591, JAPAN

Key Words : set-cover model, fuzzy diagnosis, causal relation, basic probability, lower and upper probabilities.

表現される。この診断モデルにおいて、 E^+ の補集合 ($E - E^+$) は、発生していない結果の集合である。また、関係 R^* は、次のように定義された可能的因果関係を表わしている。

[定義 1] $\langle c_i, e_j \rangle \in R^*$

↑ ↓

“原因 c_i は、結果 e_j を引き起こすことがある”

診断問題は、この可能的因果関係を用いて症状 E^+ を引き起こしている原因の集合を推論する問題である。可能的因果関係 R^* により次の二つの関数が定義される。

[定義 2]

$$\text{effects}^*(c_i) = \{e_j | \langle c_i, e_j \rangle \in R^*\} \quad (1)$$

$$\text{causes}^*(e_j) = \{c_i | \langle c_i, e_j \rangle \in R^*\} \quad (2)$$

ここで、 $\text{effects}^*(c_i)$ は原因 c_i により引き起こされる可能性のある結果の集合であり、逆に $\text{causes}^*(e_j)$ は結果 e_j を引き起こす可能性のある原因の集合である。

これらの関数により、症状 E^+ の被覆という概念が次のように定義される。

[定義 3]

診断仮説 $\theta (\theta \subset C)$ が次の条件を満たすとき、 θ を症状 E^+ の被覆という。

$$\text{effects}^*(\theta) = \bigcup_{c_i \in \theta} \text{effects}^*(c_i) \supset E^+ \quad (3)$$

以上の定義より、次の定理が得られる。この定理の証明は付録 1 に示す。

[定理 1] 次の二つの条件は同値である。

$$(I) \text{effects}^*(\theta) \supset E^+ \quad (4)$$

$$(II) \theta \cap \text{causes}^*(e_j) \neq \emptyset \text{ for all } e_j \in E^+ \quad (5)$$

条件 (II) は、結果 e_j が発生しているならば、 e_j を引き起こす可能性のある原因集合 $\text{causes}^*(e_j)$ のなかの少なくとも一つの要素が診断仮説 θ に含まれなければならないことを示している。

この定理より、明らかに次の二つの性質が成り立つ。

[性質 1]

E_1^+, E_2^+ に対する被覆の集合を θ_1^*, θ_2^* とする。このとき、 $E_1^+ \subset E_2^+$ ならば、 $\theta_1^* \supset \theta_2^*$ となる。

[性質 2]

$C \times E$ 上の二つの可能的因果関係 R_1^*, R_2^* にもとづく E^+ の被覆の集合を θ_1^*, θ_2^* とする。このとき、 $R_1^* \subset R_2^*$ ならば、 $\theta_1^* \subset \theta_2^*$ となる。

性質 1 は発生している症状が多いほど対応する被覆の数が少なくなること示しており、性質 2 は可能的因果関係が広く与えられているほど被覆の数が多くなることを示している。

いま、可能的因果関係 R^* と患者において発生してい

る症状の集合 E^+ が Fig. 1 のように与えられたとしよう。この例では、 E^+ の被覆つまり定理 1 の条件を満たす診断仮説は、 $\{c_1, c_3\}, \{c_1, c_4\}, \{c_2, c_3, c_5\}$ など多数存在する。このような簡単な例からも明らかなように、一般に E^+ の被覆は多数存在する。そこで、Reggia ら³ は、 E^+ の被覆のなかで濃度最小のものを解とする診断モデルを提案した。このモデルの性質については、Reggia ら⁴ により詳しく調べられている。また、Peng ら⁵ は、診断問題の解の基準として、濃度最小という基準に加え、非冗長性 (irredundancy)、関連性 (relevancy) という基準の妥当性について確率を用いて論じている。

Fig. 1 Possible causal relation R^* and manifestation E^+

2.2 必然的因果関係の導入と診断モデル

原因 c_i と結果 e_j との因果関係を表わすものとして、ここで新たに、必然的因果関係 R_* を次のように定義する。

[定義 4] $\langle c_i, e_j \rangle \in R_*$

↑ ↓

“原因 c_i は、必ず結果 e_j を引き起こす”

この定義より明らかなように、必然的因果関係 R_* と可能的因果関係 R^* の間には、 $R_* \subset R^*$ の関係がある。また前節と同様に、この必然的因果関係 R_* により次の二つの関数が定義される。

[定義 5]

$$\text{effects}_*(c_i) = \{e_j | \langle c_i, e_j \rangle \in R_*\} \quad (6)$$

$$\text{causes}_*(e_j) = \{c_i | \langle c_i, e_j \rangle \in R_*\} \quad (7)$$

ここで、 $\text{effects}_*(c_i)$ は原因 c_i により必ず引き起こされる結果の集合であり、逆に $\text{causes}_*(e_j)$ は結果 e_j を必ず引き起こす原因の集合である。

いま、必然的因果関係 R_* が Fig. 2 に示すように与えられているとしよう。例えば $\{c_1, c_4\}$ という診断仮説について考えると、原因 c_4 により必ず引き起こされる結果 e_5 が発生していないので、この診断仮説は E^+ に対する診断としては適当でないことがわかる。この例からも明らかなように、診断仮説 θ は次の条件を満たさなければならない。

Fig. 2 Necessary causal relation R_* and manifestation E^+

$$\text{effects}_*(\theta) = \bigcup_{c_i \in \theta} \text{effects}_*(c_i) \subset E^+ \quad (8)$$

前節で示した定理と同様に、必然的因果関係 R_* に対しても次の定理が成り立つ。証明は付録2に示す。

[定理2] 次の三つの条件は同値である。

$$(III) \text{ effects}_*(\theta) \subset E^+ \quad (9)$$

$$(IV) \theta \subset C' = \{c_i | \text{effects}_*(c_i) \cap (E - E^+) = \phi\} \quad (10)$$

$$(V) \theta \cap \text{causes}_*(e_j) = \phi \text{ for all } e_j \in E - E^+ \quad (11)$$

条件(IV)は、診断仮説 θ が原因集合 C' ($C' \subset C$) のベキ集合であることを示している。また、条件(V)は、結果 e_j が発生していなければ、 e_j を必ず引き起こす原因集合 $\text{causes}_*(e_j)$ の要素が診断仮説 θ に含まれないことを示している。

この定理より、明らかに次の二つの性質が成り立つ。

[性質3]

E_1^+, E_2^+ に対し、定理2の条件を満たす診断仮説 θ の集合を θ_{1*}, θ_{2*} とする。このとき $E_1^+ \subset E_2^+$ ならば、 $\theta_{1*} \subset \theta_{2*}$ となる。

[性質4]

$C \times E$ 上の二つの必然的因果関係 R_{1*}, R_{2*} に対し、定理2の条件を満たす診断仮説 θ の集合を θ_{1*}, θ_{2*} とする。このとき、 $R_{1*} \subset R_{2*}$ ならば、 $\theta_{1*} \supset \theta_{2*}$ となる。

性質3は発生している症状が多いほど定理2の条件を満たす診断仮説の数が増えることを示しており、性質4は必然的因果関係が広く与えられているほど定理2の条件を満たす診断仮説の数が増えることを示している。

定理1と定理2の条件から、症状 E^+ に対する診断仮説 θ が満たさなければならない条件は次のようになる。

$$\text{effects}_*(\theta) \subset E^+ \subset \text{effects}_*(\theta) \quad (12)$$

このことから、二つの因果関係にもとづく診断問題が次のように定義される。

[定義6]

可能的因果関係と必然的因果関係にもとづく診断問題

は、 $P = \langle C, E, R^*, R_*, E^+ \rangle$ と表現され、(12) 式の条件を満たす診断仮説 θ を求める問題である。

例えば、Fig.1 と Fig.2 に示す例題では、この条件を満たす E^+ の被覆は $\{c_1, c_3\}$ のみであるので、症状 E^+ の原因は $\{c_1, c_3\}$ であると診断される。

3. 症状があいまいな場合に対する診断モデル

前節における診断モデルでは、診断対象(患者)において発生している症状の集合 E^+ は明確に与えられていた。本章では、発生している症状があいまいである場合に対し、前節のモデルを応用した診断モデルを提案する。

3.1 あいまいな症状に対する診断問題

ここでは、“症状 e_1 は発生しているようだ”、“症状 e_2 は発生していないようだ”、“症状 e_3 は発生しているかどうか分からない”といったあいまいな情報にもとづく診断問題を考える。

このような症状に対するあいまいな情報を $\tilde{E}^+$, $\tilde{E}^-$ という二つのファジ集合で表現する。 $\tilde{E}^+$ は発生している症状を表わすファジ集合であり、 $\tilde{E}^-$ は発生していない症状を表わすファジ集合である。この二つのファジ集合のメンバーシップ関数は、次のように定められるとする。

(1) e_j が明らかに発生している場合

$$\mu_{\tilde{E}^+}(e_j) = 1, \mu_{\tilde{E}^-}(e_j) = 0$$

(2) e_j が明らかに発生していない場合

$$\mu_{\tilde{E}^+}(e_j) = 0, \mu_{\tilde{E}^-}(e_j) = 1$$

(3) e_j は発生しているようだが明らかでない場合

$$\mu_{\tilde{E}^+}(e_j) = \alpha, \mu_{\tilde{E}^-}(e_j) = 0$$

ただし、 $0 < \alpha < 1$

(4) e_j は発生していないようだが明らかでない場合

$$\mu_{\tilde{E}^+}(e_j) = 0, \mu_{\tilde{E}^-}(e_j) = \beta$$

ただし、 $0 < \beta < 1$

(5) e_j が発生しているかどうか全く分からない場合

$$\mu_{\tilde{E}^+}(e_j) = 0, \mu_{\tilde{E}^-}(e_j) = 0$$

このとき、 α あるいは β の値は、診断者により各々の症状に対して与えられるとする。

このようにファジ集合を定義することにより、症状の発生に対して部分的に無知であるという(3), (4)の場合や、完全に無知であるという(5)の場合も取り扱うことができるようになる。

このときの診断問題は、患者の症状に対するあいまいな情報 $\tilde{E}^+$ と $\tilde{E}^-$ から、可能的因果関係 R^* と必然的因

果関係 R_* を用いて原因の集合を推論する問題となる。

このような診断問題を $\tilde{P} = \langle C, E, R^*, R_*, \tilde{E}^+, \tilde{E}^- \rangle$ と表現し、その例を Fig. 3 に示す。この例では、症状の発生に対するファジイ集合 $\tilde{E}^+$ と症状が発生していないことに対するファジイ集合 $\tilde{E}^-$ は、次のように与えられている。

$$\tilde{E}^+ = \{1/e_1, 0.8/e_2, 0.6/e_3, 0/e_4, 0/e_5, 0/e_6\}$$

$$\tilde{E}^- = \{0/e_1, 0/e_2, 0/e_3, 1/e_4, 0.7/e_5, 1/e_6\}$$

症状 e_1 は明らかに発生しており、 e_2, e_3 は発生しているようだが明らかではない。また、症状 e_4, e_6 は明らかに発生しておらず、 e_5 は発生していないようだが明らかではない。

Fig. 3 Example of diagnostic problem

3.2 診断問題の縮小

複数の原因が同時に発生することを考慮した診断問題では、診断仮説は個々の原因ではなく原因の組み合わせとなる。したがって、診断仮説は原因集合 C のベキ集合となり、その数は原因の数に対して指数関数的に増加する。このような組み合わせの爆発を避けるために、まずセット・カバー論的診断モデルを用いて考慮すべき診断仮説の数を減少させることにする。

2.1 で示したように、症状 E^+ の発生が明らかであれば、診断仮説 θ は定理 1 の条件を満たさなければならなかった。あいまいな症状 $\tilde{E}^+$ の場合では、そのメンバ

ーシップ値が 1 であるレベル集合 $\tilde{E}_{a-1}^+$ の発生が明らかであるので、診断仮説 θ は次の条件を満たさなければならぬ。

$$(VI) \text{ effects}^*(\theta) \supset \tilde{E}_{a-1}^+ \quad (13)$$

$$(VII) \theta \cap \text{causes}^*(e_j) \neq \phi \text{ for all } e_j \in \tilde{E}_{a-1}^+ \quad (14)$$

定理 1 で示したように、この二つの条件は同値である。例えば条件 (VII) は、結果 e_j の発生が明らかであれば、 e_j を引き起こす可能性のある原因集合 $\text{causes}^*(e_j)$ のなかの少なくとも一つの要素が診断仮説 θ に含まれなければならないことを示しており、定理 1 の条件 (II) と同じものである。

また、2.2 で示したように、症状 $(E - E^+)$ が発生していないことが明らかであれば、診断仮説 θ は定理 2 の条件を満たさなければならなかった。あいまいな症状 $\tilde{E}^-$ の場合では、そのメンバーシップ値が 1 であるレベル集合 $\tilde{E}_{a-1}^-$ が発生していないことが明らかであるので、診断仮説 θ は次の条件を満たさなければならない。

$$(VIII) \text{ effects}_*(\theta) \subset E - \tilde{E}_{a-1}^- \quad (15)$$

$$(IX) \theta \subset C' = \{c_i | \text{effects}_*(c_i) \cap \tilde{E}_{a-1}^- = \phi\} \quad (16)$$

$$(X) \theta \cap \text{causes}_*(e_j) = \phi \text{ for all } e_j \in \tilde{E}_{a-1}^- \quad (17)$$

定理 2 で示したように、この三つの条件は同値である。例えば条件 (X) は、結果 e_j が発生していないことが明らかならば、 e_j を必ず引き起こす原因集合 $\text{causes}_*(e_j)$ の要素が診断仮説 θ に含まれないことを示しており、定理 2 の条件 (V) と同じものである。

このように診断問題 $\tilde{P}$ に対する診断仮説は、上の条件 (VI)~(X) を満たさなければならない。したがって、診断問題 $\tilde{P}$ に対しては、この条件を満たす診断仮説のみを考慮すればよいことになる。

[定義 6]

条件 (VI)~(X) を満たす診断仮説 θ の集合を集合 Θ とする。

2. で示した性質 1~4 により、この集合 Θ に含まれる診断仮説に対して次の性質が得られる。

- (1) 性質 1 より：集合 $\tilde{E}_{a-1}^+$ に含まれる症状が多くなるほど集合 Θ に含まれる診断仮説の数は少なくなる。
- (2) 性質 2 より：可能的因果関係 R^* が包含の意味で小さいほど集合 Θ に含まれる診断仮説の数は少なくなる。
- (3) 性質 3 より：集合 $\tilde{E}_{a-1}^-$ に含まれる症状が多くなるほど集合 Θ に含まれる診断仮説の数は少なくなる。
- (4) 性質 4 より：必然的因果関係 R_* が包含の意味で大きいほど集合 Θ に含まれる診断仮説の数は少なくなる。

簡単に言えば、(1) と (3) は、症状についてのあいまいさが少ないほど考慮すべき診断仮説の数が少なくなることを示しており、(2) と (4) は、因果関係のあいまいさが

少ないほど考慮すべき診断仮説の数が少なくなることを示している。

さらに、条件 (IX) より、集合 θ は集合 C' のベキ集合の部分集合であることがわかる。診断仮説としてのベキ集合は、Kleer⁶ らが行なっているように、階層的表現を用いると視覚的に理解しやすい。例えば、Fig. 3 の例題では、 $C' = \{c_1, c_3, c_4\}$ となるので、 C' のベキ集合は Fig. 4 のように表現され、集合 θ は曲線 L より上の部分となる。

Fig. 4 Representation of hypotheses in terms of a superset-subset lattice

3.3 あいまいな症状による基本確率の導出

ここでは、患者において発生している個々のあいまいな症状を、Dempster-Shafer 理論における証拠とみなすことにより、診断仮説集合 θ 上での Bel 関数を導出する方法を示す。

3.3.1 Dempster-Shafer 理論

Dempster⁷ は、主観にかかわる不確実性を扱うために、下界および上界確率 (lower and upper probabilities) という考え方を提案した。Shafer⁸ はこの考え方を発展させ、基本確率 (basic probability) を用いて下界および上界確率を定義した。

基本確率 $m(A)$ は、部分集合 A に閉じこめられてはいるがそのなかでは自由に動けるものであると考えられ、部分集合内のどの要素であるかについては無知であるということを表現している。この基本確率 $m(A)$ は、 $[0, 1]$ 内の値をとり、次の条件を満たす。

$$m(\phi) = 0 \quad (18)$$

$$\sum_{A \in \theta} m(A) = 1 \quad (19)$$

この基本確率を用いて、下界確率 $P_*(A)$ および上界確率 $P^*(A)$ が、それぞれ次のように定義される。

[定義 7]

$$P_*(A) = \sum_{A_j \subset A} m(A_j) \quad (20)$$

$$P^*(A) = 1 - P_*(\bar{A}) \quad (21)$$

ただし、 $\bar{A}$ は A の補集合である。

また、独立な証拠から推論された基本確率を統合する方法は、Dempster の結合規則⁷として与えられている。 m_1, m_2 を独立な証拠にもとづいて得られた基本確率とすると、新たな基本確率 m が次式により得られる。

$$m(A) = m_1 \oplus m_2 = \frac{\sum_{A_i \cap A_j = A} m_1(A_i) m_2(A_j)}{1 - \sum_{A_i \cap A_j = \phi} m_1(A_i) m_2(A_j)} \quad (22)$$

3.3.2 あいまいな症状にもとづく基本確率

簡単のため、症状 e_j に対するファジイ集合 $\tilde{E}^+, \tilde{E}^-$ のメンバーシップ値をそれぞれ s_j^+, s_j^- とする。つまり、 $\mu_{\tilde{E}^+}(e_j) = s_j^+, \mu_{\tilde{E}^-}(e_j) = s_j^-$ とおくことにする。

定理 1 の条件 (II) より、もし症状 e_j が発生していれば、 $\text{causes}^*(e_j)$ に含まれる原因のなかで少なくとも一つは存在していなければならない。このことから、症状 e_j の発生している度合 s_j^+ は、“ $\text{causes}^*(e_j)$ のなかの少なくとも一つの原因は存在している” という命題を度合 s_j^+ で支持する証拠と考えることができる。

診断仮説の集合 θ のなかでこの命題と対応している診断仮説の集合 A_j^+ は、次のようになる。

$$A_j^+ = \{\theta \mid \theta \cap \text{causes}^*(e_j) \neq \phi, \theta \in \theta\} \quad (23)$$

このことから、症状 e_j の発生している度合 s_j^+ は、部分集合 A_j^+ を支持する度合と考えられ、次のような基本確率が得られる。

$A_j^+ \neq \theta$ のとき

$$m_j^+(A) = \begin{cases} 0, & A \neq A_j^+, \theta \\ s_j^+, & A = A_j^+ \\ 1 - s_j^+, & A = \theta \end{cases} \quad (24)$$

$A_j^+ = \theta$ のとき

$$m_j^+(A) = \begin{cases} 0, & A \neq \theta \\ 1, & A = \theta \end{cases} \quad (25)$$

Fig. 3 の例題では、症状 e_2 が度合 0.8 で発生しているという情報から、 $\text{causes}^*(e_2) = \{c_3, c_4\}$ であるので Fig. 5 のような基本確率 m_2^+ が得られる。

部分集合 $\{\theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ に与えられた基本確率 0.8 は、部分集合内に閉じこめられてはいるがそのなかを自由に動かすることができる。これは、症状 e_2 の発生は、診断仮

Fig. 5 Basic probability m_2^+

説 $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ を 0.8 で支持しているが、そのなかのどれであるかについては何も支持していないことに対応している。

一方、定理 2 の条件 (V) より、もし e_j が発生していなければ、 $\text{causes}_*(e_j)$ に含まれる原因はすべて存在していないということがわかる。このことから、症状 e_j の発生していない度合 s_j^- は、“ $\text{causes}_*(e_j)$ に含まれる原因はすべて存在していない” という命題を度合 s_j^- で支持する証拠と考えることができる。

診断仮説の集合 Θ のなかでこの命題に対応している診断仮説の集合 A_j^- は、次のようになる。

$$A_j^- = \{\theta \mid \theta \cap \text{causes}_*(e_j) = \phi, \theta \in \Theta\} \quad (26)$$

このことから、症状 e_j が発生していない度合 s_j^- は、診断仮説の集合 A_j^- を支持する度合と考えられ、次のような基本確率が得られる。

$A_j^- \neq \Theta$ のとき

$$m_j^-(A) = \begin{cases} 0, & A \neq A_j^-, \theta \\ s_j^-, & A = A_j^- \\ 1-s_j^-, & A = \Theta \end{cases} \quad (27)$$

$A_j^- = \Theta$ のとき

$$m_j^-(A) = \begin{cases} 0, & A \neq \Theta \\ 1, & A = \Theta \end{cases} \quad (28)$$

例えば Fig. 3 の例題では、 $\text{causes}_*(e_5) = \{c_4\}$ であるので、症状 e_5 が発生していない度合が 0.7 であるという情報から、Fig. 6 のような基本確率 m_5^- が得られる。

Fig. 6 Basic probability m_5^-

3.3.3 基本確率の結合

これまでに得られた基本確率を、Dempster の結合規則で結合することにより、あいまいな症状 $\tilde{E}^+, \tilde{E}^-$ にもとづく基本確率 m が得られる。この基本確率 m は、形式的には、次のように書くことができる。

$$m = m_1^+ \oplus \dots \oplus m_n^+ \oplus m_1^- \oplus \dots \oplus m_n^- \quad (29)$$

ただし、 n は因果関係が定義されている症状の集合 E の濃度 (要素の数) である。

上式では、形式的には $2n$ 個の基本確率を結合するようになっているが、実際の計算は見かけよりもずっと簡

単になる。なぜなら、すでにセット・カバ理論的な考え方をういて問題を縮小しているの、その中の多くの基本確率は (25) 式あるいは (28) 式のようなものとなり、この形式の基本確率は、vacuous belief function と呼ばれる Bel 関数を構成するものであり、(29) 式の計算には何の影響も与えないからである。

例えば、Fig. 3 の例題では形式的には 12 個の基本確率を結合しなければならないが、実際には、 m_2^+ と m_5^- のみを結合することにより、基本確率 m が Fig. 7 のように得られる。Fig. 7 より、それぞれの診断仮説に対する上界および下界確率が次のように求められる。ただし $[\quad, \quad]$ は、[下界確率, 上界確率] を表わす。

$$\theta_1: [0, 0.2], \quad \theta_2: [0.56, 1]$$

$$\theta_3: [0, 0.3], \quad \theta_4: [0, 0.3]$$

このことから、診断仮説 θ_2 が最も確率が高いことがわかる。

Fig. 7 Basic probability m

また、基本確率 m により、個々の原因の存在に対する上界および下界確率も求めることができる。原因 c_i の存在について、“原因 c_i は存在する” という命題に対応する診断仮説の集合 B_i は、次のようになる。

$$B_i = \{\theta \mid c_i \in \theta, \theta \in \Theta\} \quad (30)$$

したがって、原因 c_i の存在に対する上界および下界確率は、次のようになる。

$$P^*(\text{原因 } c_i \text{ が存在する}) = P^*(B_i) \quad (31)$$

$$P_*(\text{原因 } c_i \text{ が存在する}) = P_*(B_i) \quad (32)$$

Fig. 3 の例題では、原因 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ それぞれの存在に対する上界および下界確率が次のように求められる。

$$\begin{aligned} c_1: [1, 1] & & c_2: [0, 0] \\ c_3: [0.56, 1] & & c_4: [0, 0.3] \\ c_5: [0, 0] & & c_6: [0, 0] \end{aligned}$$

4. 数値計算例

あいまいな症状にもとづく診断問題の例として、原因 9 項目、症状 13 項目による診断の例を示す。いま、二つの因果関係が次のように与えられているとする。

$$R^* = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$R_* = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

さらに、症状に関する二つのファジイ集合 $\tilde{E}^+$, $\tilde{E}^-$ が次のように得られているとする

$$\begin{aligned} \tilde{E}^+ &= \{1/e_{12}, 0.8/e_{13}\} \\ \tilde{E}^- &= \left\{ \frac{1}{e_1}, \frac{1}{e_2}, \frac{1}{e_3}, \frac{1}{e_4}, \frac{1}{e_5}, \frac{1}{e_6}, \frac{1}{e_7}, \frac{1}{e_8}, \right. \\ &\quad \left. \frac{0.7}{e_9}, \frac{0.8}{e_{10}}, \frac{1}{e_{11}} \right\} \end{aligned}$$

この問題に対し、前章で提案した診断モデルにより得られた基本確率 m を Fig. 8 に示す。この図から θ_2 が最も有望な診断仮説であり、次に θ_4 であることがわかる。さらに、個々の原因に対する上界および下界確率が次のように得られる。

$$\begin{aligned} c_4 &= [0, 0.3], \quad c_5 = [0, 0.06], \quad c_6 = [0.94, 1] \\ c_i &= [0, 0], \quad i = 1, 2, 3, 7, 8, 9 \end{aligned}$$

Fig. 8 Basic probability m

5. おわりに

本研究では、次のことを行なった。

(1) Reggia らにより提案されたセット・カバー論的診

断問題に対し、新たに“原因 c_i は必ず結果 e_j を引き起こす”という必然的因果関係を導入した診断モデルを提案した。

(2) あいまいな症状にもとづく診断問題の設定を行なった。

(3) あいまいな症状にもとづく診断問題に対し、個々のあいまいな症状を Dempster-Shafer 理論における証拠とみなすことにより、複数の原因の集合である診断仮説上での Bel 関数を求める方法を提案した。さらに、この Bel 関数により、診断仮説に対する上界および下界確率とともに個々の原因の存在に対する上界および下界確率を求めることができることを示した。

参 考 文 献

- 1) P. Harmon & D. King : Expert Systems, John Wiley & Sons, Inc., (1985), 諏訪基(監訳): エキスパートシステムズ, サイエンス社 (1986)
- 2) 寺野, 浅居, 菅野: ファジイシステム入門, オーム社 (1987)
- 3) J. A. Reggia, D. S. Nau & P. Y. Wang : Diagnostic Expert Systems Based on a Set Covering Model; Int. J. Man-Machine Studies, Vol. 19, pp. 437~460 (1983)
- 4) J. A. Reggia, D. S. Nau & P. Y. Wang : A Formal Model of Diagnostic Inference; Information Sciences, Vol. 37, pp. 227~285 (1985)
- 5) Y. Peng & J. A. Reggia : A Probabilistic Causal Model for Diagnostic Problem Solving-Part. I; IEEE Trans. Syst. Man. Cybern., Vol. SMC-17, pp. 146~162 (1987)
- 6) J. Kleer & B. C. Williams : Diagnosing Multiple Faults; Artificial Intelligence, Vol. 32, pp. 97~130 (1987)
- 7) A. P. Dempster : Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping; Ann. Math. Statist., Vol. 38, pp. 325~339 (1967)
- 8) G. Shafer : A Mathematical Theory of Evidence, Princeton Univ. Press (1976)

付録 1 定理 1 の証明

(I) $\rightarrow$ (II): 条件 (I) より、任意の $e_j \in E^+$ に対し、

$$e_j \in \text{effects}^*(c'_i) \quad (\text{A.1})$$

となるような $c'_i \in \theta$ が存在する。このとき、関数 effects^* の定義より、 $\langle c'_i, e_j \rangle \in R^*$ となる。一方、関数 causes^* の定義より明らかなように、この c'_i は、 $\text{causes}^*(e_j)$ に含まれる。ゆえに、次式が成り立つ。

$$c'_i \in \theta \cap \text{causes}^*(e_j) \neq \emptyset \quad (\text{A.2})$$

(II) $\rightarrow$ (I): 条件 (II) より、任意の $e_j \in E^+$ に対し、

$$c'_i \in \text{causes}^*(e_j) \quad (\text{A.3})$$

となるような $c'_i \in \theta$ が存在する。したがって、関数 causes^* の定義より、 $\langle c'_i, e_j \rangle \in R^*$ となる。ゆえに、関数 effects^* の定義より、 $e_j \in \text{effects}^*(c'_i)$ となる。このことはすべての $e_j \in E^+$ に対して成り立つので、(3) 式より条件 (I) が成り立つ。 $\square$

付録 2 定理 2 の証明

(Ⅲ)→(Ⅸ)：条件 (Ⅲ) より、任意の $c_i \in \theta$ に対して、

$$\text{effects}_*(c_i) \subset E^+ \quad (\text{A.4})$$

が成り立つ。ゆえに、次式が成り立つので、条件 (Ⅳ) が導かれる。

$$\text{effects}_*(c_i) \cap (E - E^+) = \phi, \quad c_i \in \theta \quad (\text{A.5})$$

(Ⅳ)→(Ⅴ)：条件 (Ⅳ) より任意の $c_i \in \theta$ に対して、

$$\text{effects}_*(c_i) \cap (E - E^+) = \phi \quad (\text{A.6})$$

となる。したがって、任意の $e_j \in E - E^+$ に対し、

$$\langle c_i, e_j \rangle \notin R_* \quad (\text{A.7})$$

となる。ゆえに、 causes_* の定義より、

$$c_i \notin \text{causes}_*(e_j) \quad \text{for all } e_j \in E - E^+ \quad (\text{A.8})$$

となる。これは、すべての $c_i \in \theta$ に対して成り立つので、条件 (Ⅴ) が導かれる。

(Ⅴ)→(Ⅲ)：条件 (Ⅴ) より任意の $c_i \in \theta$ に対して、

$$c_i \notin \text{causes}_*(e_j) \quad \text{for all } e_j \in E - E^+ \quad (\text{A.9})$$

となる。したがって、

$$\langle c_i, e_j \rangle \notin R_* \quad \text{for all } e_j \in E - E^+ \quad (\text{A.10})$$

となる。ゆえに、 effects_* の定義より、

$$\text{effects}_*(c_i) \cap (E - E^+) = \phi \quad (\text{A.11})$$

となる。このことから、すべての $c_i \in \theta$ に対して次式が成り立つので、条件 (Ⅲ) が導かれる。

$$\text{effects}_*(c_i) \subset E^+ \quad (\text{A.12})$$

□