数式処理による固有値問題の解法*

—記号行列の有理式演算に基づく Jordan 分解—

松本英治**・井上紘一**

A Method for Solving Eigenvalue Problems by Symbolic Manipulation*

—Jordan Decomposition of Symbolic Matrices on the Basis of Rational Operations—

Eiji MATSUMOTO** and Koichi INOUE**

A method is presented to deal with the eigenvalue problem for symbolic matrices on the basis of rational operations. From difficulties in solving higher order algebraic equations with symbolic coefficients, it is impossible to obtain the Jordan normal form of a higher order symbolic matrix in a usual sense. Jordan decomposition on the field of rational expressions is considered, which can be performed by symbolic manipulation. The semisimple and the nilpotent components are obtained by substitution of the matrix into polynomials with coefficients of rational expressions. The polynomials are calculated from the characteristic polynomial by rational operations such as irreducible factor decomposition, partial fractional decomposition and multiple reduction. The method for operations of linear subspaces by symbolic manipulation proposed by the authors are applicable to derivations of the generalized eigenspaces and the Jordan normal forms for the eigenvalues in rational expressions.

1. はじめに

近年、複雑な数式の代数計算を計算機によっておこなう数式処理がいくつかの分野で利用されている。特に、制御理論では、多項式・多項式行列の演算や、制御系の設計や解析においてパラメータを含む制御系を計算機で扱うことができれば便利な場合がある。そして、数式処理を応用した CAD システムがいくつか提案されている^{1~4}。

制御理論の基礎の一つである線形代数は、数式処理においても重要な研究課題である。数式処理による線形代数の研究は、主として記号を係数に持つ連立 1 次方程式^{5~7}、や記号行列の代数演算^{8~13} について行なわれてきた。筆者らは、線形空間に関する幾何学的概念を数式処

理で表現する方法を提唱して、制御系の正準分解に応用した¹⁴。

固有値問題は、線形代数において重要であるばかりでなく、線形理論に基づく多くの問題がそれに帰着する。(数値行列の) 固有値問題の数値解法に関しては多くの手法が提案されている。しかしながら、記号(変数)で表現された行列の固有値問題に関しては、初等的な解法以外にほとんど研究されてこなかった。

計算機(数式処理)によりこのような行列の固有値問題を扱うことが可能となれば、制御理論だけでなく多くの分野で役立つ。この場合の一つの困難は、5 次以上の一般的な代数方程式は解析的に解けないので、従来の方法は 5 次以上の記号行列に適用できないことである。また、3 次程度の記号行列でさえも、固有値は非常に複雑な数式となるので、実際には簡単な場合にしか解くことができない。ここでは、数式処理で可能な有理式演算によって、記号行列の Jordan 分解を行なう方法を示す。変数の有理式で表現できないような固有値の演算には、代数的拡大体上の演算や多項式の簡約化の方法を適用す

* 原稿受付 1988. 6. 21

** 京都大学 工学部 Faculty of Engineering, Kyoto University; Yoshida, Sakyo-ku, Kyoto 606, JAPAN

Key Words : symbolic manipulation, eigenvalue problem, Jordan decomposition, Jordan normal form, rational operation.

る。もう一つの困難は、一般固有空間を求めるために、変数に依存する線形部分空間のあいだの演算が必要であることである。筆者らが開発した、線形部分空間の演算を行なう REDUCE の関数パッケージ LINALG¹⁴ を用いれば、容易にこれらの演算を行なうことができる。

2. 数式処理で可能な演算と問題の定式化

通常の数式処理システムは、多変数有理式の四則演算が可能である。したがって、以下で扱う基礎体 F を有理係数 N 変数有理式体とする。また、多くの数式処理システムは整係数多変数多項式環における因子分解が可能である。この機能と F 上の四則演算などから、以下で必要となる F 係数多項式環 $F[t]$ 上の因子分解が可能であることを示す。 P を F の変数に t を加えた整係数 $N+1$ 変数多項式環とする。 $f \in F[t]$ の有理式表現 (互いに素な分母多項式と分子多項式で表わしたもの) を $f = g/h$, g の P における因子分解を

$$g = g_0 g_1 \cdots g_r \quad (1)$$

とする。ここで、 g, h は互いに素、 $g_1, \dots, g_r$ は P の既約因子、 h と g_0 は t を含まない。 g_0 は P で既約でなくてもよい。容易につきの定理を証明できる。

<定理1> F の係数の任意性を除いて、 $g_1, \dots, g_r$ は $F[t]$ の既約因子である。

<証明> $g_i (i=1, \dots, r)$ が $F[t]$ で可約とする。すなわち、

$$g_i = p_1 p_2 \quad (2)$$

と分解できるとする。ここで、 $p_1, p_2 \in F[t]$ は t の1次以上の多項式である。 p_1, p_2 の有理式表現を

$$p_1 = q_1/r_1, p_2 = q_2/r_2 \quad (3)$$

とする。(3)式を(2)式に代入すると

$$g_i = (q_1/r_2)(q_2/r_1) \in P \quad (4)$$

上式は多項式で、 q_1 と r_1, q_2 と r_2 は互いに素なので、 q_1 は r_2 で、 q_2 は r_1 で割り切れるはずである。したがって、上式は g_i が二つの (t の1次以上の) P の多項式に分解できることを示しており、 g_i が P の既約因子である仮定に反する。□

V を n 次元列ベクトル空間 F^n , $A \in F^{n \times n}$ を V 上の行列、すなわち各要素が F の元である $n \times n$ 行列とする。以下では、 F 上の四則演算、 $F[t]$ における因子分解などを用いて、 A の Jordan 標準形の一般化を行なう。この標準形は、全ての固有値が F に属するならば、通常の Jordan 標準形に帰着する。 $f \in F[t]$ を A の特性多項式、体 L を A のすべての固有値を F に添加した代数的拡大体 (分解体) とする。以下の議論において、

証明をせずに既知としている数学的事実は文献¹⁵ によっている。

3. 有理式演算に基づく一般固有空間

特性多項式 $f \in F[t]$ の既約因子分解を

$$f = f_0 f_1 \cdots f_r \quad (5)$$

と表わす。ここで、 f_0 は t を含まず、 $f_1, \dots, f_r$ の t の最高次係数を1とする。体 F は完全体であることから、つぎの二つの定理が成立する。

<定理2> $f_i (i=1, \dots, r)$ は重根 $\in L$ を持たない。

<証明> 体 F の単位元は1である。したがって、 F の標数は0であるから完全体である。いいかえれば、 F 上代数的な元 α の最小多項式は、 F の分解体 L において単根のみを持つ。 f_i は既約なので、ある元の最小多項式であり、重根を持たないことは明らか。□

<定理3> もし、 f_i と f_j が一つでも共通の根 $\alpha \in L$ をもつならば、 $f_i = f_j$ である。

<証明> α は F 上代数的であり、 f_i, f_j は F で既約なので α の最小多項式である。ともに、 α の t に関する最高次係数は1なので等しい。□

$F[t]$ における剰余の定理からつぎの定理が導かれる。

<定理4> f の根 α の重複度を k , α の F における最小多項式を m とする。このとき、 $f = m^k g$ と分解できる ($g \in F[t]$)。

<証明> $F[t]$ のイデアル $I(\alpha) = \{h \in F[t] | h(\alpha) = 0\}$ は単項イデアルであり、 α の最小多項式 $m \in F[t]$ が $I(\alpha)$ を生成する。すなわち、 f は m で割り切れる。 m は既約なので定理2から重根を持たない。以上から $f/m \in F[t]$ は重複度 $k-1$ の根 α を持つ。これを繰り返せば、 f は m^k で割り切れ、剰余の定理から f は m^k の因子を持つ。□

以上の定理からつぎの定理が成り立つことは明らかである。

<定理5> f はつぎのように因子分解できる。

$$f(t) = (t-\alpha_1)^{m_1} \cdots (t-\alpha_r)^{m_r} g_1(t)^{k_1} \cdots g_s(t)^{k_s} \quad (6)$$

ここで $g_1, \dots, g_s$ は $F[t]$ で既約で互いに素である。

$\alpha_i \in F$ は重複度 m_i の F に含まれる固有値である。 $g_i(t)$ の t に関する次数を p_i , 根を $\beta_{ij} \in L (j=1, \dots, p_i)$ とする。 β_{ij} は、重複度 k_{ij} の F に含まれない固有値である。定理2からこれらの固有値はすべて異なる。

固有値 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ に対する一般固有空間は

$$V_0(\alpha_i) = \{x \in V | (A - \alpha_i I)^{m_i} x = 0\} \quad (7)$$

で定義される。ここで、 I は $n \times n$ 単位行列である。一方、 F に含まれない固有値は一般には N 変数の有理式

で表現できない。そこで、 p_i 個の固有値 β_{ij} ($j=1, \dots, p_i$) を定義多項式 g_i を持つ一つの F 上代数的な元 β_i で表わし、これを代数的固有値とよぶ。代数的固有値 $\beta_1, \dots, \beta_s$ に対する一般固有空間を

$$U_0(\beta_i) = \{x \in V \mid g_i(A)^{k_i} x = 0\} \quad (8)$$

で定義する。ここで、 $g_i(A)$ は多項式 $g_i(t)$ の変数 t を行列 A に置き換えたものを表わす。定数項には単位行列 I を掛ける。

体を F から分解体 L に拡大したときの、ベクトル空間を V_L 、行列を A_L で表わす。 A_L は A と等しいが V_L 上の線形変換とみなすので区別する。

このとき、 A_L の固有値 β_{ij} はすべてその基礎体 L に含まれるので、(7) 式と同様な通常の一般固有空間を定義することができる。すなわち、 $i=1, \dots, s$ に対して、

$$W_0(\beta_{ij}) = \{x \in V_L \mid (A_L - \beta_{ij}I)^{k_i} x = 0\} \quad (9)$$

つぎの定理は L における一般固有空間と V における一般固有空間との関係を示す。

<定理6> $U_0(\beta_i) = (W_0(\beta_{i1}) \oplus \dots \oplus W_0(\beta_{ip_i})) \cap V$

<証明> V_L において、 $x \in W_0(\beta_{i1}) \oplus \dots \oplus W_0(\beta_{ip_i})$ とすると、

$$(A_L - \beta_{i1}I)^{k_i} \dots (A_L - \beta_{ip_i}I)^{k_i} x = g_i(A_L)^{k_i} x = 0 \quad (10)$$

この x が V に含まれるとすると $g_i(A)^{k_i} x = 0$ となり、(8) 式から $x \in U_0(\beta_i)$ である。つぎに、逆を証明するために、 f を $L[t]$ の要素とみなすと、

$$f(A_L) = 0 \quad (11)$$

$$f(t) = g_i(t)^{k_i} h(t) = (t - \beta_{i1})^{k_i} \dots (t - \beta_{ip_i})^{k_i} h(t) \quad (12)$$

が成立する。ここで、 $h \in L[t] (\in F[t])$ 、である。 V_L における分解定理から $g_i(A_L)^{k_i} x = 0$ を満たす任意の $x \in V_L$ は

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_{p_i}, \quad x_j \in W_0(\beta_{ij}) \quad (13)$$

と直和分解できる。ここで、 $x \in U_0(\beta_i)$ とすると、上式は $x \in W_0(\beta_{i1}) \oplus \dots \oplus W_0(\beta_{ip_i})$ であることを示している。 $x \in V$ なので逆が証明できた。□

<定理7> $U_0(\beta_i)$ は V の A による $k_i p_i$ 次元不変部分空間である。

<証明> $x \in U_0(\beta_i)$ とすると、 A と A の多項式行列 $g_i(A)^{k_i}$ は可換だから、

$$Ag_i(A)^{k_i} x = g_i(A)^{k_i} Ax = 0 \quad (14)$$

したがって、 $Ax \in U_0(\beta_i)$ 、すなわち、 $U_0(\beta_i)$ は A による不変部分空間である。 V_L において $W_0(\beta_{ij})$ の次元は

固有値 β_{ij} の重複度 k_i なので、 $W_0(\beta_{i1}) \oplus \dots \oplus W_0(\beta_{ip_i})$ の次元は $k_i p_i$ である。このことは、(13) 式から $g_i(A_L)^{k_i} x = 0$ を満たす $x \in V_L$ の自由度が $k_i p_i$ であることを示している。二つの等しい行列 $g_i(A_L) = g_i(A)$ をそれぞれ $L^{n \times n}$ 、 $F^{n \times n}$ の要素とみなしたときの階数は等しいことが知られているので、 $g_i(A)^{k_i} x = 0$ を満たす $x \in V$ の自由度 ($U_0(\beta_i)$ の次元) も $k_i p_i$ である。□

(6) 式から分かるようにつぎの関係がある。

$$n = \sum_{i=1}^r m_i + \sum_{i=1}^s k_i p_i \quad (15)$$

つぎの定理は一般化された固有空間への分解定理を表わす。

<定理8> V はつぎのように直和分解される。

$$V = V_0(\alpha_1) \oplus \dots \oplus V_0(\alpha_r) + U_0(\beta_1) \oplus \dots \oplus U_0(\beta_s) \quad (16)$$

<証明> 特性多項式 f の因子分解 (6) 式において各因子は互いに素なので通常の分解定理と定義 (7), (8) 式から (16) 式が導かれる。□

(16) 式の各部分空間の基底を順にならべたものに新しい基底を変換すると、 A は対角線に $m_1, \dots, m_r, k_1 p_1, \dots, k_s p_s$ 次元の正方小行列がならぶ形となる。最初の r 個の小行列はすべての固有値が基礎体 F に含まれる。したがって、 F における有理式演算だけで、Jordan 標準形を求めることが可能なので、ここでは議論をしない。次章では、 F に含まれない固有値、すなわち代数的固有値に対応する A の小行列の Jordan 分解を考える。

4. 有理式 Jordan 分解

F が完全体であることからつぎの Jordan 分解が知られている。すなわち、任意の $A \in F^{n \times n}$ に対して

$$A = S + N, \quad SN = NS, \quad S, N \in F^{n \times n} \quad (17)$$

となる半単純行列 S とべき零行列 N が一意に定まる。体 F 上でのこの分解を有理式 Jordan 分解とよぶことにする。このとき、 $\phi, \phi \in F[t]$ が存在して、

$$S = \phi(A), \quad N = \psi(A) \quad (18)$$

となる多項式 $\phi, \phi \in F[t]$ が存在する。このような多項式は一意ではなく、 A の最小多項式の多項式倍を加える任意性がある。よく知られているように、半単純行列 S はすべての固有値が F に含まれている場合には対角型となるが、今の場合には一般に対角型とならないことに注意する。また、べき零行列はすべての固有値が 0 なので、 F 上で通常の Jordan 標準形に変換できる。

したがって、 A の Jordan 分解を行なう問題は多項式 ϕ, ψ を求めることに帰着する。この多項式は数式処理で扱うことのできる有理式体 F の係数を持っている

が、つぎに示すように導出の過程において、 F に含まれない固有値の演算が必要とされる。本章の最後に、この困難を解消する方法を述べる。

以下では、前章の最後に述べたように A を直和分解 (16) 式に基づいて準対角型に変換して、代数的固有値に対応する A の正方小行列だけに注目する。問題を簡単にするため、 A の固有値は F に含まれないで、かつ、特性多項式 f が既約な (t の p 次の) 多項式 $g \in F[t]$ によって

$$f = g^k \quad (19)$$

と表わされていると仮定する。定理 2 から g は重根をもたない。すなわち、 g は $L[t]$ において、あい異なる 1 次因子の積に分解される。

$$g(t) = (t - \gamma_1) \cdots (t - \gamma_p) \quad (20)$$

$\gamma_1, \dots, \gamma_p$ は A の重複度 k のあい異なる固有値 $\in L$ である。

$$h_i(t) = f(t)/(t - \gamma_i)^k \in L[t] \quad (21)$$

と定義して、 $q_i \in L[t]$ を

$$\sum_{i=1}^p h_i(t) q_i(t) = 1$$

あるいは

$$\frac{1}{f(t)} = \sum_{i=1}^p \frac{q_i(t)}{(t - \gamma_i)^k} \quad (22)$$

を満たすものとする。このとき、多項式 ϕ, ψ は

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^p \gamma_i h_i(t) q_i(t), \quad \psi(t) = t - \phi(t) \quad (23)$$

で与えられる。ここで、 ϕ を A の最小多項式 m で割った剰余をあらたに ϕ としておくことより簡単な多項式となる。このとき $\phi, \psi \in F[t]$ であることが知られている。

上で示されたように、多項式 ϕ, ψ を求める過程で、固有値 $\gamma_1, \dots, \gamma_p \in L$ を含む演算が必要となる。しかし、実際にはこの演算は、 $F[t]$ における多項式の簡約化の方法を適用することによって、数式処理で可能な有理式演算で行なうことが可能である。最初に、 p 個の固有値 $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ を単なる記号 (変数) とみなして、(19)~(23) 式の手順で多項式 ϕ を求める。 F' を F の N 個の変数に独立な変数 $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ を加えた $N+p$ 変数有理式体とすると、 ϕ は $F'[t]$ の要素である。つぎに、

$$g(t) = t^p + c_{p-1}t^{p-1} + \cdots + c_0 \quad (24)$$

と表わす。 $c_i \in F$ ($i = 0, \dots, p-1$) である。このとき、 $i = 1, \dots, p$ に対して

$$g(\gamma_i) = 0, \quad (25)$$

である。また、 p 個の根と係数の関係

$$\begin{aligned} R_1 &= \gamma_1 + \cdots + \gamma_i + c_{p-1} = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ R_p &= \gamma_1 \cdots \gamma_p - (-1)^p c_0 = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

がある。 ϕ の有理式表現の分母、分子多項式において、変数 $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ に関して、(26) 式の多項式条件があることを考慮に入れて簡約化すると、変数 $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ が消去できるはずである。このとき、(25) 式は (26) 式から導かれるので考慮しなくてもよい。もし、 ϕ からこれらの変数を消去できないとすると、 $\phi \in F[t]$ であることに矛盾する。もう一つの方法は、 ϕ を定義多項式 (25) 式を持つ F 上代数的な元 $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ に関する有理式とみなす。数式処理の理論で知られている代数的拡大体上の演算¹⁶を行なえば、 ϕ を $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ に関する多項式で表現することができる。この後で (26) 式の条件のもとで上と同じ方法で $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ を消去すればよい。

このような与えられた多項式をいくつかの多項式条件のもとで簡約化するためには、多項式イデアル論に基づいて Gröbner 基底を用いる方法が知られている¹⁶。すなわち、イデアル $(R_1, \dots, R_p)$ の Gröbner 基底を $(R_1, \dots, R_p, R_{p+1}, \dots, R_q)$ として、 ϕ をこの基底で M -簡約すればよい。次章で簡単な例について特性多項式から多項式 ϕ を求める方法を説明する。

5. 多項式 ϕ の例

この章では、(19) 式の形の特性多項式を持つような行列の半単純成分を与える多項式 ϕ を求める。

<例 1> $f(t) = (t^2 + at + b)^2$ の場合

基礎体 F は a, b からなる有理式体とする。実際には、与えられた行列に含まれるすべての変数の有理式体であるが、特性多項式だけに注目する。 $g(t) = 0$ の 2 根を γ_1, γ_2 とすると、

$$g(t) = t^2 + at + b = (t - \gamma_1)(t - \gamma_2) \quad (27)$$

である。固有値 γ_1, γ_2 は a, b の有理式だけでなくベキ根を用いなければ表わせないので、 F に含まれない。 $g(t)$ が $F[t]$ で既約であることから、

$$a^2 - 4b \neq 0 \quad (28)$$

という関係があることを暗黙のうちに仮定している。(21) 式から

$$h_1(t) = (t - \gamma_2)^2, \quad h_2(t) = (t - \gamma_1)^2 \quad (29)$$

(22) 式の第 2 式から分かるように、 q_i ($i = 1, 2$) は $1/f$ を部分分数分解したときの分子多項式である。したがって、ともに t に関して 1 次以下の多項式である。そこで、

$$\begin{aligned} q_1(t) &= c_1(t - \gamma_1) + c_2, \\ q_2(t) &= c_3(t - \gamma_2) + c_4 \end{aligned} \quad (30)$$

とおく. (30) 式を (22) 式の第1式に代入して, これが t の恒等式であることから, $c_1, \dots, c_4$ を求めると,

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{-2}{(\gamma_1 - \gamma_2)^3}, \quad c_2 = c_4 = \frac{1}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2}, \\ c_3 &= \frac{2}{(\gamma_1 - \gamma_2)^3} \end{aligned} \quad (31)$$

(29)~(31) 式を (23) 式の第1式に代入すると,

$$\begin{aligned} \phi(t) &= [-2t^3 + 3(\gamma_1 + \gamma_2)t^2 - 6\gamma_1\gamma_2t \\ &\quad + \gamma_1\gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2)]/(\gamma_1 - \gamma_2)^2 \end{aligned} \quad (32)$$

上式の t の係数は F に含まれない固有値の有理式で表わされている. いいかえれば, ϕ は $L[t]$ の要素である.

根と係数の関係 (26) 式は (27) 式から

$$\begin{aligned} R_1 &= \gamma_1 + \gamma_2 + a = 0 \\ R_2 &= \gamma_1\gamma_2 - b = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

(33) 式を用いて, 容易に (32) 式の右辺から γ_1, γ_2 を消去することができる. しかし, ここではより複雑な場合にも適用できるように一般的な方法を採用する. 問題は (32) 式の右辺の分母, 分子多項式を多項式条件 (33) 式のもとで, できるだけ簡約化することである. そのために, 変数 a, b, γ_1, γ_2 からなる多項式環のイデアル (R_1, R_2) の Gröbner 基底を求める. 最初に, R_1, R_2 を Gröbner 基底に加えておく. 変数の順序を γ_1, γ_2, a, b とする. すると, この四つの変数からなる項の間には, 総次数と, 同じ総次数の項では辞書式の方法を用いて順序が決定できる. この順序での多項式 u の最高順位項を $\text{HDT}(u)$, 二つの多項式 u_1, u_2 の最小公倍多項式を $\text{LCM}(u_1, u_2)$ と書く. 二つの多項式 R_1, R_2 からそれぞれの最高順位項を消去してかつ順位を最も低く保つように得られる S -多項式 R_3 は

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{\text{LCM}(\text{HDT}(R_1), \text{HDT}(R_2))}{\text{HDT}(R_1)} R_1 \\ &\quad - \frac{\text{LCM}(\text{HDT}(R_1), \text{HDT}(R_2))}{\text{HDT}(R_2)} R_2 \\ &= \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1}(\gamma_1 + \gamma_2 + a) - \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2}(\gamma_1\gamma_2 - b) \\ &= \gamma_2^2 + \gamma_2 a + b \end{aligned} \quad (34)$$

となる. 一般には根と係数の関係から得られるすべての多項式 (26) の二つずつから得られる S -多項式を計算する. つぎに, 得られた S -多項式をすでに得られた基底 (R_1, R_2) で M -簡約する. すなわち, R_3 に含まれる R_1 の最高順位項 γ_1 を $-\gamma_2 - a$, R_2 の最高順位項 $\gamma_1\gamma_2$ を b で置き換える. いまの場合, R_3 には R_1 と R_2 の最高順位項は含まれないので, M -簡約した結果も R_3 である. 一般には, M -簡約した結果が 0 でないならばそれを基底に加える. 同様の手順を, 新しい基底が

得られなくなるまで繰り返したときの基底が Gröbner 基底である. この基底は変数に付けた順位や簡単化の順番によって異なる場合もある. 今の場合 R_3 以外に新しい基底は得られないことが確かめられる. γ_1, γ_2 を含む与えられた多項式を条件 (33) 式のもとで簡約化するには, それを Gröbner 基底 (R_1, R_2, R_3) で M -簡約すればよいことが知られている. (32) 式の分母, 分子多項式をこの方法で簡約化すると,

$$\phi(t) = (-2t^3 - 3at^2 - 6bt - ab)/(a^2 - 4b) \quad (35)$$

となる. 上式の t の係数は a, b の有理式なので, $\phi \in F[t] (= L[t])$ であることが確かめられる. 特性多項式が $f(t) = (t^2 + at + b)^2$ となる 4 次の行列の半単純成分は上式の t にその行列を代入したものである (定数項は単位行列を掛ける).

同様な手順で数式処理システム REDUCE 3.2 上で, 部分分数分解¹⁷, S -多項式, M -簡約化, Gröbner 基底を求める関数を作成した. 以下では, 得られた結果のみを記す.

<例 2> $f(t) = (t^2 + at + b)^3$ の場合

$$\begin{aligned} \phi(t) &= [6t^5 + 15at^4 + (10a^2 + 20b)t^3 + 30abt^2 \\ &\quad + 30b^2t - a^3b + 7ab^2]/(a^4 - 8a^2b + 16b^2) \end{aligned} \quad (36)$$

<例 3> $f(t) = (t^3 + at^2 + bt + c)^2$ の場合

$$\begin{aligned} \phi(t) &= [(2a^2 - 6b)t^5 + (4a^3 - 13ab + 9c)t^4 \\ &\quad + (2a^4 - 4a^2b + 12ac - 10b^2)t^3 \\ &\quad + (3a^3b + 5a^2c - 11ab^2 + 3bc)t^2 \\ &\quad + (6a^3c - 22abc + 36c^2)t + a^2bc \\ &\quad + 3ac^2 - 4b^2c]/(4a^3c - a^2b^2 \\ &\quad - 18abc + 4b^3 + 27c^2) \end{aligned} \quad (37)$$

<例 4> $f(t) = (t^3 + at^2 + bt + c)^3$ の場合

$$\begin{aligned} \phi(t) &= [(6a^5 - 45a^3b + 81a^2c + 81ab^2 - 243bc)t^8 \\ &\quad + (18a^6 - 138a^4b + 240a^3c + 264a^2b^2 \\ &\quad - 756abc - 30b^3 + 162c^2)t^7 + (18a^7 \\ &\quad - 126a^5b + 236a^4c + 172a^3b^2 - 576a^2bc \\ &\quad + 146ab^3 + 378ac^2 - 648b^2c)t^6 + (6a^8 \\ &\quad - 18a^6b + 96a^5c - 132a^4b^2 - 12a^3bc \\ &\quad + 438a^2b^3 + 486a^2c^2 - 1080ab^2c - 84b^4 \\ &\quad - 324bc^2)t^5 + (15a^7b + 39a^6c - 111a^5b^2 \\ &\quad - 111a^4bc + 186a^3b^3 + 516a^3c^2 + 60a^2b^2c \\ &\quad + 57ab^4 - 1107abc^2 - 591b^3c + 567c^3)t^4 \\ &\quad + (20a^7c + 10a^6b^2 - 132a^5bc - 82a^4b^3 \\ &\quad + 256a^4c^2 + 256a^3b^2c + 184a^2b^4 - 504a^2bc^2 \\ &\quad - 176ab^3c + 756ac^3 - 70b^5 - 918b^2c^2)t^3 \\ &\quad + (30a^6bc + 24a^5c^2 - 246a^4b^2c + 204a^3bc^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +552a^2b^3c+324a^2c^3-1080ab^2c^2-210b^4c \\
& +162bc^3)t^2+(30a^6c^2-246a^4bc^2+384a^3c^3 \\
& +552a^2b^2c^2-1404abc^3-210b^3c^2 \\
& +1134c^4)t+7a^5bc^2-a^4b^3c+11a^4c^3 \\
& -60a^3b^2c^2+8a^2b^4c+18a^2bc^3+128ab^3c^2 \\
& +135ac^4-16b^5c-270b^2c^3]/(16a^6c^2 \\
& -8a^5b^2c+a^4b^4-144a^4bc^2+68a^3b^3c \\
& +216a^3c^3-8a^2b^5+270a^2b^2c^2-144ab^4c \\
& -972abc^3+16b^6+216b^3c^2+729c^4)
\end{aligned}
\tag{38}$$

＜例5＞ $f(t) = t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d$ の場合

$$\phi(t) = t \tag{39}$$

この場合、特性多項式は既約で、定理2からすべての固有値 $\in L$ は異なる。すなわち、代数的拡大体 L 上では行列 $A_L (= A)$ は対角化可能で半単純行列である。このようなもとの行列 A も半単純であることが知られているので (39) 式は当然の結果である。

6. 数式処理システムによるプログラム

上で述べた方法で、数式処理システムにより与えられた記号行列の有理式 Jordan 分解を行なうプログラムを作成する場合には、まず記号行列の行列式を求めなければならない。このための数式処理による方法はよく研究されており、多くのシステムではその関数を持っている。また、整係数多項式の既約因子分解の機能もあらかじめ持っていることを仮定してきた。つぎに、固有値を含む多項式の簡約化が必要とされる。このための、多項式の部分分数分解、 S -多項式、 M -簡約化、Gröbner 基底を求める方法（あるいは代数的拡大体上の演算）はよく知られている。さらに、3. で述べた一般固有空間を求めるためには、記号行列を線形変換とみなしたときの変数に依存する核やその基底の選択、行列の基底変換が必要となる。そして、 F に含まれる固有値に対する小行列や、 F に含まれない固有値に対する小行列のベキ零成分は通常の Jordan 標準形に変換することができる。この場合には、変数に依存する線形部分空間の和空間・直交補空間なども求める必要がある。筆者らが開発した REDUCE による線形部分空間の演算パッケージ LINALG を用いれば、これらの演算を数式どおりに行なうことができる。

記号行列からその有理式 Jordan 分解を求める手順をまとめると以下ようになる。

- S1 A の特性多項式 $f \in F[t]$ を求める。
 S2 f を定理1の方法で $F[t]$ における既約因子に分解する。

- S3 定理5から、各既約因子を (6) 式のようにならべ、 F に含まれる固有値 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ とその重複度 $m_1, \dots, m_r$ を求める。代数的固有値 $\beta_1, \dots, \beta_s$ に対しては、その定義多項式 $g_1, \dots, g_s$ と重複度 $k_1, \dots, k_s$ を求める。
 S4 (7), (8) 式から各一般固有空間 $V_0(\alpha_i), U_0(\beta_i)$ を求める。
 S5 各一般固有空間の基底を適当に定め、その基底を順にならべた基底行列 S を求める。このとき、基底変換した行列 $A' = SAS^{-1}$ は対角線に $m_1, \dots, m_r, k_1p_1, \dots, k_sp_s$ 次元の正方小行列 $A_1, \dots, A_{r+s}$ が並ぶ形となる。
 S6 最初の r 個の小行列 A_i に対して、通常の方法で Jordan 標準形に変換する。（この方法については省略する）。
 S7 残りの s 個の小行列 A_i に対して、4. の方法で半単純変換 S_i とベキ零変換 N_i に分解する。必要ならば、 N_i を通常の Jordan 標準形に変換する。
 S8 各小行列を（有理式）Jordan 分解したときの、全体の行列の有理式 Jordan 分解を求める。

7. あとがき

数式処理で可能な多変数有理式の演算をもとに、変数に依存する行列の固有値問題を扱うために必要な定理を証明し、その手順 S1~S8 を示した。そのために必要となる特別な形 (19) 式の特性多項式を持つ行列に注目して、その有理式 Jordan 分解を与える多項式を導く方法を考えた。いくつかの簡単な場合に、その多項式を計算した、(35)~(39) 式。

ここで考えた有理式 Jordan 分解の半単純成分、ベキ零成分は、もとの行列に含まれる変数の有理式で表わされる。例として制御系のモード分解を考えると、直和分解 (16) 式に対応する部分システム（小行列 A_i ）とその Jordan 標準形あるいは有理式 Jordan 分解が得られる。システムが電気回路とすると、各々の部分システムは最初の回路定数の有理式で与えられるので物理的に意味がある（あるいは実現が容易な）表現となっている。このことは数値行列の場合と類似している。すなわち、複素数を用いればすべての数値行列を Jordan 標準形に変換できるが、あまり物理的に意味のある情報は得られない。そこで、実数の範囲で表現可能な実 Jordan 標準形を求める方法が考えられている。

本稿で考えた有理式 Jordan 分解も、行列の次数が増えたり、含まれる数式が複雑となると数式処理システムでも演算が不可能となる。特に、5. から分かるように m 次の行列の Jordan 分解を求めるためには行列の

$m-1$ 次までのべきを計算しなければならないので、次数が増えるに従って急激に複雑な数式計算が必要となる。大きな次元の記号行列を扱うためにはこのような数式計算の効率化が必要となる。また、有理式 Jordan 分解の半単純成分は一般には対角型では表わせないが、その簡単な標準形を定めることも今後の課題である。

また、応用する場合には、固有値の具体的表現が必要とされる場合もある。固有値が、2~4 次の簡単な記号係数の代数方程式の根の場合には、それをべき根を用いて解析的に表現する、いかえれば L 上の Jordan 標準形を求めることも考えられる。より複雑な場合には具体的な数値を代入した数値的方法と組み合わせる方法も重要である。

参 考 文 献

- 1) H. Naitoh : Control System Design Oriented CAD System on a Personal Computer ; Proceedings of IECON '85, Vol.1, pp. 41~46 (1985)
- 2) 斎藤, 阿部, 高橋 : 計算機援用による制御工学—制御工学と数式処理の周辺— ; システムと制御, 29 巻, 12 号, pp. 785~794 (1985)
- 3) 斎藤, 高橋, 阿部 : 数式処理システム REDUCE を用いた制御系の CAD ; 計測自動制御学会論文集, 21 巻, 11 号, pp. 1239~1246 (1985)
- 4) 赤堀, 原 : オブジェクト指向に基づく制御系の解析・設計支援システム ; 計測自動制御学会論文集, 24 巻, 5 号, pp. 506~513 (1988)
- 5) F. J. Mattes, B. A. Mutafelija & A. H. Stock : Symbolic Matrix Operation Program SYMOP, Proceedings of the 1978 Summer Computer Simulation Conference, pp. 100~104 (1978)
- 6) T. Sasaki & H. Murao : Efficient Gaussian Elimination Method for Symbolic Determinants and Linear Systems ; ACM Trans. Math. Software, Vol. 8, No. 3, pp. 277~289 (1982)
- 7) E. -H. Horneber : Symbolic Solution of Linear Equations on a Linear Multiprocessor System ; Elektron. Rechenanlagen, Vol. 25, No. 1, pp. 20~27 (1983)
- 8) A. D. Rich & D. R. Stoutemyer : Capabilities of the MUMATH-79 Computer Algebra System for the Intel-8080 Microprocessor ; Symbolic and Algebraic Computation, Springer-Verlag, pp. 241~248 (1979)
- 9) N. J. Castellan, Jr. : The Use of Matrix Manipulation Programs in Teaching Statistical Methods ; Behav. Res. Methods & Instrum., Vol. 12, No. 2, pp. 172~177 (1980)
- 10) A. George & J. W. H. Liu : An Optimal Algorithm for Symbolic Factorization of Symmetric Matrices ; SIAM J. Comput., Vol. 9, No. 3, pp. 583~593 (1980)
- 11) A. George & H. Rashwan : On Symbolic Factorization of Partitioned Sparse Symmetric Matrices ; Linear Algebra & Appl., Vol. 34, pp. 145~157 (1980)
- 12) D. R. Stoutemyer : Symbolic Computer Vector Analysis ; Comput. & Math. With Appl., Vol. 5, No. 1, pp. 1~9 (1979)
- 13) J. Ish-Shalom : On Symbolic Solution of the Matrix Algebraic and Differential Riccati Equations ; Proceedings of the 1985 American Control Conference, Vol. 3, pp. 1663~1671 (1985)
- 14) 松本, 井上 : 数式処理による線形代数と制御系の正準分解への応用 ; 計測自動制御学会論文集, 24 巻, 4 号, pp. 370~376 (1988)
- 15) 杉浦 : Jordan 標準形と単因子論 I, 岩波講座基礎数学, 岩波 (1976)
- 16) 佐々木, 元吉, 渡辺 : 数式処理システム, 昭晃堂 (1986)
- 17) 佐々木 : 数式処理, 情報処理学会, オーム社 (1981)