論文要旨

システム制御情報学会論文誌, 2 巻, 3 号, pp. 69~79 (1989)

ファジィ数理計画問題の様相的構成

乾口 雅弘・市橋 秀友・久米 靖文

本研究では、機会制約条件計画問題と同様な考え方に基づき、係数のあいまいさと思意思決定者の選好態度のあいまいさの意味の相違を踏まえて、ファジィ数理計画問題を構成する。また、制約条件式および目的関数が線形である場合の等価確定制約条件および等価問題を示す。本研究の方法を通して、従来のファジィ数理計画問題の多くを統一的に解釈することができる。

システム制御情報学会論文誌, 2 巻, 3 号, pp. 80~87 (1989)

入力飽和と外乱を考慮したデジタル学習制御

西田 吉晴・杉江 俊治・小野 敏郎

本論文は、試行の繰り返しによって所期の出力が得られるような入力を獲得するデジタル型の学習制御に関するものである。まず、従来のデジタル学習制御においては、入力飽和や外乱が誤差収束特性や制御精度に重大な影響を及ぼすことを解析と数値例により明らかにする。とくにサンプリング時間が短いとき、これが問題となる。ついで、この問題点を克服する新たなデジタル学習制御法を提案し、シミュレーションおよび実験によって、その有効性を検証する。

システム制御情報学会論文誌, 2 巻, 3 号, pp. 88~96 (1989)

巡回格子法による ARMA モデリング

酒井 英昭

本論文では、巡回格子 (CL) 法の ARMA モデリングへの応用について議論している。最初に、ARMA 過程の共分散の特徴づけ問題に対し、新しい結果を示し、マリスら及びアンダーソンらの結果との関連を指摘している。

次いで、新しい ARMA 格子形フィルタを提案し、係数量子化の影響を他の ARMA 格子形フィルタのものと比較している。最後に、インパルス応答系列から ARMA パラメータを推定する問題に対し、新しい方法を提案し、シミュレーションにより有効性を示す。

システム制御情報学会論文誌, 2 巻, 3 号, pp. 97~107 (1989)

パワースペクトル推定における平滑化帯域幅の自動決定法

佐々木 公男

本論では、観測時系列データに即して適応的に実践可能なパワースペクトル推定法に関する基本的な提案をしている。即ち、従来のペリオドグラム法において未解決であった平滑化窓の帯域幅の系統的決定を推定値のバイアスと分散との相反性に着目し、1 見本データからの当該評価指標の導入によって解決しようとしている。また、提案した手法の特徴と有効性を数値実験並びに実測データへの適用によって例証している。

巡回格子法による ARMA モデリング*

酒 井 英 昭**

ARMA Modeling by the Circular Lattice Method*

Hideaki SAKAI**

In this paper, applications of the circular lattice (CL) method for multichannel signal processing to ARMA modeling are presented. After a review of the CL method, the covariance characterization of an ARMA process is discussed by embedding an ARMA process into a degenerate two-channel AR process. The connections with the method of Mullis-Roberts and the theory of Markov-cover by Anderson and Skelton are pointed out.

Then, a new ARMA lattice filter is proposed and the effect of coefficient quantization on the frequency response of our lattice filter is compared with those of other ARMA lattice filters. Finally, an ARMA parameter estimation problem based on the impulse response data is treated by using the Burg type CL algorithm. Some numerical results are presented to show the effectiveness of the proposed method.

1. ま え が き

近年、格子形フィルタによる信号処理の研究が盛んに行なわれている^{1,2}。従来、AR モデルに対するものが主であったが、最近では ARMA モデルに対して、種々のアプローチによる格子形デジタルフィルタや適応フィルタが多数提案されている^{3~11}。

本論文では、その一つのアプローチとして巡回格子(circular lattice, CL)法¹²に基づいた ARMA モデリングについて述べる。最初に、CL 法に関し必要事項を簡単に説明し、ARMA 過程の共分散列の一般化偏相関(PARCOR)係数による特徴づけについて議論する。そして、Mullis らによる線形離散システムの近似問題¹³や Anderson らによるマルコフ共分散等価実現の理論¹⁴との関連についても述べる。

ついで、上記の特徴づけから自然に導かれる格子形(ラティス)デジタルフィルタを提案し、その係数量子化による周波数応答特性への影響を一つの例について、

他の ARMA 格子形フィルタ^{5,6}との比較をする。さらに、与えられた観測データから上述の一般化 PARCOR 数を推定する問題に対し、高次の AR モデルを最初にあてはめ、インパルス応答の推定値を求めて用いる 2 段階法の特性をシミュレーションにより調べる。そして、インパルス応答波形より有理形伝達関数のパラメータ(以下、ARMA パラメータという)を求める問題も取り扱う。この問題は実現理論やデジタルフィルタの設計の分野で詳しく研究されているが、その中に Claerbout¹⁵と Morf ら¹⁶の方法がある。これはパラメータ推定値をインパルス応答波形の標準共分散などを要素とする特殊な 2 変数 Yule-Walker (Y-W) 方程式を解くことにより求める方法である。しかし、この方法では観測区間外のインパルス応答を 0 と仮定するためバイアスが生じる。

Pusey¹⁷はスペクトル推定の分野で有名な Burg 法を多変数の場合に拡張した Strand 法¹⁸を用いることによりこの仮定を避け、よりよい結果が得られることを示したが、同時に僅かな観測雑音を加えると推定結果がかなり劣化することも述べている。そこで、本論文では、最後に上述の一般化 PARCOR 係数の特殊な性質を考慮に入れた方法を提案し、シミュレーションによりその有効性を示すこととする。

* 原稿受付 1988. 6. 1

** 京都大学 工学部 Faculty of Engineering, Kyoto University ; Sakyo-ku, Yoshida Honmachi, Kyoto 606, JAPAN

Key Words : ARMA model, linear prediction, lattice filter, impulse response, stability.

2. 巡回格子 (CL) 法

CL 法¹²では、平均 $\mathbf{0}$ の d 変数定常時系列 $\{X(t)\}$ からスカラ過程 $\{Y(t)\}$ を

$$Y(k+d(t-1)) = (X(t))_k \quad (k=1, \dots, d) \quad (1)$$

の関係により生成する。ただし、右辺は $X(t)$ の第 k 要素である。このとき、 $\{Y(t)\}$ は平均 0 で周期 d の周期定常過程となる。すなわち、 $\{Y(t)\}$ の共分散を

$$R(s, t) = E[Y(s)Y(t)] \quad (2)$$

とおくと、次の周期性

$$R(s, t) = R(s+nd, t+nd) \quad (3)$$

が成立する。ただし、 n は任意の整数。実際、 $\{X(t)\}$ の共分散行列を

$$R_k = E[X(t+k)X^T(t)] \quad (4)$$

とおき、(2) 式で s を $i+d(t-1+k)$ 、 t を $j+d(t-1)$ ($1 \leq i, j \leq d$) とおくと、(1) 式より

$$R(i+d(t-1+k), j+d(t-1)) = (R_k)_{ij}$$

の関係が成立する。したがって、(3) 式が成立していることがわかる。特に、

$$R(i, j-kd) = R(j-kd, i) = (R_k)_{ij} \quad (5)$$

の関係に注意する。

さて、この $\{Y(t)\}$ に対し線形予測の手法を適用してみる。つまり、 j 次の前向き予測誤差を

$$\begin{aligned} \varepsilon(j, t) = & Y(t) + \alpha_1(j, 1)Y(t-1) + \dots \\ & + \alpha_j(j, j)Y(t-j) \end{aligned} \quad (6)$$

とおき、予測誤差分散 $\sigma_\varepsilon^2(j) = E[\varepsilon^2(j, t)]$ が最小となるよう予測係数 $\{\alpha_i(j, i)\}$ ($i=1, \dots, j$) を決めることにする。これらの量は 2 次の統計量 $\{R(s, t)\}$ により決まるが、(3) 式の性質から時変ではあるが、周期 d の周期性をもつことになる。そこで t を $k+d(t-1)$ とおき直すと、 $\alpha_{k+d(t-1)}(j, i) = \alpha_k(j, i)$ 、 $\sigma_{k+d(t-1)}^2(j) = \sigma_k^2(j)$ ($k=1, \dots, d$) となるので d 組の予測係数と予測誤差分散を考えればよいことになる。同様に、 j 次の後向き予測誤差を

$$\begin{aligned} \eta(j, t) = & Y(t-j) + \beta_1(j, 1)Y(t-j+1) + \dots \\ & + \beta_j(j, j)Y(t) \end{aligned} \quad (7)$$

とおき、予測誤差分散 $\tau_\eta^2(j) = E[\eta^2(j, t)]$ が最小となるよう予測係数 $\{\beta_i(j, i)\}$ ($i=1, \dots, j$) を決める。これらもまた d 組の $\{\beta_k(j, i)\}$ ($i=1, \dots, j$)、 $\tau_k^2(j)$ ($k=1, \dots, d$) のみを考えればよい。

このとき、各次数 ($j=0, 1, \dots$) に対する予測係数、予測誤差分散はレビンソン算法^{1,2}に類似した次のアル

ゴリズムにより逐次的に効率よく計算できる^{2,12}。

巡回レビンソン算法

(i) 初期化 ($j=0$)

$$\begin{aligned} \sigma_k^2(0) = \tau_k^2(0) = R(k, k), \quad \Delta_k(0) = R(k, k-1) \\ (k=1, \dots, d) \end{aligned} \quad (8)$$

(ii) 次数更新 ($j \rightarrow j+1$)

$$\begin{aligned} \Delta_k(j) = \sum_{m=0}^j R(k-m, k-j-1) \alpha_k(j, m) \\ (\alpha_k(j, 0) = 1) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} = \sum_{m=0}^j R(k-j-1+m, k) \beta_{k-1}(j, m) \\ (\beta_{k-1}(j, 0) = 1) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\alpha_k(j+1, j+1) = -\frac{\Delta_k(j)}{\tau_{k-1}^2(j)}$$

$$\beta_k(j+1, j+1) = -\frac{\Delta_k(j)}{\sigma_k^2(j)} \quad (11)$$

$$\alpha_k(j+1, i) = \alpha_k(j, i) + \alpha_k(j+1, j+1) \beta_{k-1}(j, j+1-i)$$

$$\beta_k(j+1, i) = \beta_{k-1}(j, i) + \beta_k(j+1, j+1) \alpha_k(j, j+1-i)$$

$$(i=1, \dots, j) \quad (12)$$

$$\sigma_k^2(j+1) = \sigma_k^2(j) (1 - \alpha_k(j+1, j+1) \beta_k(j+1, j+1))$$

$$\tau_k^2(j+1) = \tau_{k-1}^2(j) (1 - \alpha_k(j+1, j+1) \beta_k(j+1, j+1)) \quad (13)$$

なお、上記の算法で $k=1$ のとき $\beta_0(j, i)$ 、 $\tau_0^2(j)$ が現われるが、周期性より

$$\beta_0(j, i) = \beta_d(j, i), \quad \tau_0^2(j) = \tau_d^2(j) \quad (14)$$

となるので“巡回”の形容がつけられている。(13) 式より $0 \leq \alpha_k(j+1, j+1) \beta_k(j+1, j+1) \leq 1$ の制約が生じるが、規格化 PARCOR 係数を

$$\rho_k(j+1) = -\frac{\Delta_k(j)}{\sigma_k(j) \tau_{k-1}(j)} \quad (15)$$

で定義すれば、 $|\rho_k(j+1)| \leq 1$ である。この規格化 PARCOR 係数は多変数時系列の共分散行列の特徴づけに用いられている¹⁹。

また、(6)、(7) 式の予測誤差の次数 j に関する漸化式は、 t を $k+td$ におきかえ、(12) 式を使えば

$$\begin{aligned} \varepsilon(j+1, k+td) &= \varepsilon(j, k+td) + \alpha_k(j+1, j+1) \eta(j, k-1+td) \\ \eta(j+1, k+td) &= \eta(j, k-1+td) + \beta_k(j+1, j+1) \varepsilon(j, k+td) \end{aligned} \quad (16)$$

で与えられる。これを図示したのが文献^{2,12}の巡回格子形構造である。

さて、実際のデータ $\{X(1) \dots X(N)\}$ が与えられたとき、上記の予測係数の推定値を求めるには、まず、(1)

式の関係よりデータ $\{Y(1) \cdots Y(Nd)\}$ を作る。つぎに、 $R(k, v)$ の推定値として

$$\hat{R}(k, v) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^m Y(k+dj)Y(v+dj) \quad (17)$$

を計算し、巡回レビンソン算法での $R(k, v)$ の代用とすればよい。ただし、(17) 式で $m = [N - \max(k, v)/d]$ ($[x]$ は x を越えない最大の整数) とする。この Yule-Walker (Y-W) 形推定法では

$$Y(t) = 0 \quad (t \leq 0, t > Nd) \quad (18)$$

と仮定していることになるので、 N が小さい場合は推定値の劣化を招くことが多い。スペクトル推定の分野では、(18) 式のような仮定を避けた Burg 法が知られている。多変数時系列に対しては Burg 法を拡張した Strand 法¹⁸ が提案されているが、ここでは (16) 式に基づく Burg 形の推定法を述べる。ただし、以下では (8)~(16) 式の記号と同じものを使うことにするが、それらは推定された量である。

いま、 j 次の予測誤差、予測誤差分散が与えられているとして、次の重みつき 2 乗誤差規準

$$\frac{1}{\sigma_k^2(j)} \sum_{t=L}^{N-1} \varepsilon^2(j+1, k+td) + \frac{1}{\tau_{k-1}^2(j)} \sum_{t=L}^{N-1} \eta^2(j+1, k+td) \quad (19)$$

を考える。和の上限 $t_{\max} = N-1$ 、下限 $t_{\min} = L \triangleq [(j+1-k)/d]+1$ は次のようにして決まったものである。すなわち、 $\varepsilon(j+1, k+td)$ 、 $\eta(j+1, k+td)$ は $Y(k+td-j-1)$ から $Y(k+td)$ により作られており、全サンプルが $Y(1) \cdots Y(Nd)$ であることを考慮すれば、 $k+(t_{\min})d-j-1 > 0$ 、 $k+(t_{\max})d < Nd+1$ より上記の上限、下限となるわけである。(16) 式を (19) 式に代入し、(11) 式を考慮して、 $\Delta_k(j)$ に関し、(19) 式を最小にすれば

$$\Delta_k(j) = \frac{2 \sum_{t=L}^{N-1} \varepsilon(j, k+td)}{\frac{1}{\sigma_k^2(j)} \sum_{t=L}^{N-1} \varepsilon^2(j, k+td) + \frac{1}{\tau_{k-1}^2(j)} \sum_{t=L}^{N-1} \eta^2(j, k-1+td)} \quad (20)$$

が得られる。この $\Delta_k(j)$ を (11) 式に代入して $\alpha_k(j+1)$ 、 $\beta_k(j+1, j+1)$ が計算され、(13) 式から $\sigma_k^2(j+1)$ 、 $\tau_k^2(j+1)$ が求まる。そして、次のステップ $(j+1)$ として、 $\varepsilon(j+1, k+td)$ 、 $\eta(j+1, k+td)$ ($t = [(j+2-k)/d]+1, \dots, N-1$) を (16) 式により計算し、上記の演算をくり返せばよい。なお、初期条件 ($j=0$) は

$$\begin{aligned} \sigma_k^2(0) &= \tau_k^2(0) = \sum_{t=0}^{N-1} Y^2(k+td) \quad (k=1, \dots, d) \\ \varepsilon(0, k+td) &= \eta(0, k+td) = Y(k+td) \\ &\quad (t=0, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (21)$$

である。

3. ARMA 過程への適用

いま、次のスカラ ARMA(n, n) 過程

$$\begin{aligned} x(t) + a_1 x(t-1) + \cdots + a_n x(t-n) \\ = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \cdots + b_n u(t-n) \end{aligned} \quad (22)$$

のパラメータの PARCOR 係数による特徴づけについて考える。ここで、 $\{u(t)\}$ は平均 0、分散 σ^2 の白色雑音とする。AR, MA 部分の多項式

$$\begin{aligned} A(z) &= 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n} \\ B(z) &= b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n} \end{aligned} \quad (23)$$

に対しては、 $A(z)$ の安定性は仮定するが、 $B(z)$ に対しては特に仮定を設けないことにする。さて、通常の PARCOR 係数^{1,2}を用いたのでは、(22) 式の ARMA 過程の共分散列を有限個の係数で特徴づけることはできない。そこで、次の 2 変数定常過程

$$X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \quad (24)$$

に対し、前節で述べた CL 法を適用してみる。(1) 式より

$$Y(2t-1) = u(t), Y(2t) = x(t)$$

となる。このとき、 $\{X(t)\}$ の自己共分散行列は (24) 式より

$$R_k = \begin{pmatrix} \sigma^2 \delta_{k,0} & \sigma^2 h_k \delta_{k,0} \\ \sigma^2 h_k & r_k \end{pmatrix} \quad (25)$$

で与えられる。ここで、 $\{h_k\}$ は伝達関数 $B(z)/A(z)$ のインパルス応答であり、 $\{r_k\}$ は $\{x(t)\}$ の自己共分散列、すなわち、 $r_k = E[x(t+k)x(t)]$ である。(5) 式の関係を用いれば $\{Y(t)\}$ の共分散は

$$\begin{aligned} R(1, 1) &= \sigma^2, R(i, 1) = 0 \quad (i \leq 0) \\ R(1-2k, 2) &= \sigma^2 h_k, R(2-2k, 2) = r_k \quad (k \geq 0) \end{aligned} \quad (26)$$

で与えられる。つまり、 $\{R(s, t)\}$ は (22) 式の ARMA 過程の 1 次、2 次情報から作られていることがわかる。

ここで、 $u(t)$ は $x(t-1)$ 、 $u(t-1)$ 、 $x(t-2)$ 、 $u(t-2)$ 、... とは無相関なので、(6) 式で t を $2t-1$ でおきかえると

$$\varepsilon(j, 2t-1) = u(t) \quad (27)$$

と書ける。つまり、 $u(t)$ の予測誤差は $u(t)$ 自身なので、予測係数は

$$\alpha_1(j, i) = 0 \quad (i=1, \dots, j)$$

となるが、特に $\alpha_1(j, j) = 0$ なので (11) 式より $\Delta_1(j) = 0$ となり、(13)、(15)、(26) 式より

$$\rho_1(j+1) = 0, \sigma_1^2(j) = \sigma^2 \quad (j \geq 0) \quad (28)$$

なる第1チャンネルに対する特徴づけが得られる。また、(12), (14) 式より

$$\beta_1(j+1, i) = \beta_2(j, i) \quad (i = 1, \dots, j), \quad \beta_1(j+1, j+1) = 0 \\ \tau_1^2(j+1) = \tau_2^2(j) \quad (29)$$

である。ところで、(6) 式で t を $2t$ でおきかえ、 $j = 2n+1$ としたときの予測誤差

$$\varepsilon(2n+1, 2t) = x(t) + a_2(2n+1, 1)u(t) + \dots \\ + a_2(2n+1, 2n)x(t-n) \\ + a_2(2n+1, 2n+1)u(t-n) \quad (30)$$

は0である。というのは、この予測誤差の分散が最小となるよう予測係数は決められており、(22) 式の関係から、この最小分散は0より大きくないからである。よって、

$$a_i = a_2(2n+1, 2i), \quad b_i = -a_2(2n+1, 2i+1) \\ (i = 0, \dots, n) \quad (31)$$

である。ただし、 $a_0 = a_2(2n+1, 0) = 1$ としている。また、 $\sigma_2^2(2n+1) = 0$ であるから $|\rho_2(2n+1)| = 1$ である。(11), (15) 式より

$$a_2(j+1, j+1) = \frac{\sigma_2(j)}{\tau_1(j)} \rho_2(j+1), \\ \beta_2(j+1, j+1) = \frac{\tau_1(j)}{\sigma_2(j)} \rho_2(j+1) \quad (32)$$

の関係があるので $\rho_2(j+1)$ と $a_2(j+1, j+1)$ は同符号である。よって、(31) 式より

$$\rho_2(2n+1) = -\text{sgn}(b_n) \quad (33)$$

となる。また、 $\varepsilon(0, 2t) = x(t)$, $\eta(0, 2t-1) = u(t)$ より(11), (22) 式から $a_2(1, 1) = -E[x(t)u(t)]/E[u^2(t)] = -b_0$ 。一方、 $\tau_1(0) = \sigma_1(0) = \sigma$ だから、(32) 式より

$$\rho_2(1) = -b_0 \frac{\sigma}{\sigma_2(0)} \quad (\sigma_2(0) = \sqrt{r_0}) \quad (34)$$

であることがわかる。

以上をまとめると、ARMA パラメータ $\{a_1 \dots a_n, b_0 \dots b_n, \sigma^2\}$ から $2n+1$ 個の一般化 PARCOR 係数 $\rho_2(i)$ ($i = 1, \dots, 2n+1$) が生成され、性質 (33), (34) 式を満足し、 $|\rho_2(i)| < 1$ ($i = 1, \dots, 2n$) である。具体的な計算は、前節の巡回レビンソン算法に (26), (28), (29) 式の特殊な性質を適用し、記法簡単化のため添字の“2”を取り除き、 $\rho_i = \rho_2(i)$ とおいた次の算法により実行できる。

ARMA レビンソン算法

$$\alpha(j+1, j+1) = -\frac{\mathcal{A}(j)}{\tau^2(j-1)}, \quad \beta(j+1, j+1) = -\frac{\mathcal{A}(j)}{\sigma^2(j)} \\ \alpha(j+1, i) = \alpha(j, i) + \alpha(j+1, j+1)\beta(j-1, j+1-i) \\ \beta(j+1, i) = \beta(j-1, i) + \beta(j+1, j+1)\alpha(j, j+1-i)$$

$$(i = 1, \dots, j)$$

$$\sigma^2(j+1) = \sigma^2(j) (1 - \alpha(j+1, j+1)\beta(j+1, j+1)) \\ \tau^2(j+1) = \tau^2(j-1) (1 - \alpha(j+1, j+1)\beta(j+1, j+1)) \quad (35)$$

$$\mathcal{A}(j) = R(1-j, 2) + R(2-j, 2)\beta(j-1, 1) + \dots \\ + R(0, 2)\beta(j-1, j-1) \quad (36)$$

ただし、 $\beta(j-1, j) = 0$ であり、初期設定は

$$\tau^2(-1) = \sigma^2, \quad \sigma^2(0) = \tau^2(0) = r_0$$

である。ARMA パラメータから $\{h_k\}$ は容易に計算でき、 $\{r_k\}$ の高速計算法²⁰ もよく知られているので、ここでは省略する。

なお、ARMA モデルが (22) 式ではなく

$$x(t) + a_1x(t-1) + \dots + a_nx(t-n) \\ = b'_1u(t-1) + \dots + b'_nu(t-n) \quad (37)$$

として与えられる場合もある。例えば、連続時間系をサンプリングして得られる離散系は (37) 式の形である。このような場合、直接、前述の議論を (37) 式の系に適用するのは困難である。しかし、明らかに次の系

$$x(t) + a_1x(t-1) + \dots + a_nx(t-n) \\ = b_0u(t) + \dots + b_{n-1}u(t-n+1) \quad (b_{i-1} = b'_i) \quad (38)$$

と (37) 式の系の共分散は同じであり、インパルス応答も後者のを単位ステップ遅らせたのが前者のものになっている。したがって、(38) 式の系を考えれば十分で、前述の議論は、(33) 式が

$$\rho_{2n} = -\text{sgn}(b_{n-1}) \quad (39)$$

と変更になるだけである。

4. 他の理論との関連

さて、いままでとは逆に、 $\{\rho_1, \dots, \rho_{2n}, \rho_{2n+1} = \pm 1; \sigma^2, r_0\}$ (ただし、 $|\rho_i| < 1$) を与えて、(35), (36) 式の ARMA レビンソン算法を用いて、ARMA パラメータと $\{h_k\}, \{r_k\}$ を生成することもできる。すなわち、 j 次までの量が計算されていると、(32) 式より $\alpha(j+1, j+1)$, $\beta(j+1, j+1)$ が計算され、(35) 式より $\alpha(j+1, i)$, $\beta(j+1, i)$ ($i = 1, \dots, j$), $\sigma^2(j+1)$, $\tau^2(j+1)$ が求まる。(15), (36) 式から漸化式

$$R(1-j, 2) = -R(2-j, 2)\beta(j-1, 1) - \dots \\ - R(0, 2)\beta(j-1, j-1) - \rho_{j+1}\sigma(j)\tau(j-1)$$

により、(26) 式の対応関係にある $\{h_k\}, \{r_k\}$ が生成される。ただし、上の式の初期条件は $R(1, 2) = \sigma^2 b_0 = -\sigma \sqrt{r_0} \rho_1$ である。ただ、次の例に示すように“特異”な ARMA モデルが生成される場合がある。

例 1

$$\begin{aligned}
 r_0 &= 1 + \sigma^2, \rho_1 = -\sqrt{\frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2}}, \\
 \rho_2 &= -\sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{1 + \sigma^2}} \operatorname{sgn}(\cos \omega) \\
 \rho_3 &= \sqrt{\frac{\sigma^2 \cos^2 \omega}{1 + \sigma^2 - \cos^2 \omega}} \operatorname{sgn}(\cos \omega), \\
 \rho_4 &= \sqrt{\frac{\sin^2 \omega}{1 + \sigma^2 - \cos^2 \omega}}, \rho_5 = -1 \quad (40)
 \end{aligned}$$

に対しては $|\rho_i| < 1$ ($i = 1, \dots, 4$) (ただし, $\omega \neq 0, \pi$) であり,

$$\begin{aligned}
 h_0 &= \sigma^2, h_1 = 0, h_2 = 0, \dots \\
 r_1 &= \cos \omega, r_2 = \cos 2\omega, r_3 = \cos 3\omega, \dots \quad (41)
 \end{aligned}$$

が生成される。そして, $\alpha(5, i)$ ($i = 1, \dots, 5$) から

$$\begin{aligned}
 x(t) - u(t) - 2(\cos \omega)x(t-1) + 2(\cos \omega)u(t-1) \\
 + x(t-2) - u(t-2) = 0 \quad (42)
 \end{aligned}$$

が得られた ARMA モデルとなる。しかし, $A(z) = B(z) = 1 - 2z^{-1}\cos \omega + z^{-2}$ は単位円周上の $e^{+j\omega}$ に根をもち極零キャンセルが起こっているのので, (42) 式の系は特異な系である。実際, (41) 式の $\{h_k\}, \{r_k\}$ から作られる (25) 式の R_k は

$$\begin{aligned}
 X(t) &= \begin{pmatrix} u(t) \\ \sqrt{2} \sin(\omega t + \phi) + u(t) \end{pmatrix} \\
 (\phi: \text{ランダム位相}) \quad (43)
 \end{aligned}$$

なる系の共分散行列と同じである。

つまり, 上述の一般化 PARCOR 係数による特徴づけでは, (正弦波の和)+(定常 ARMA 過程) のような時系列の共分散が生成される可能性があるということである。 $\{h_k\}, \{r_k\}$ の 1 次, 2 次情報から ARMA パラメータを求めるここでの問題は, Mullis と Roberts の有名な論文¹³ で少し違った形で取り扱われており, これらの情報から作られるある種の行列の半正定性が二つの ARMA モデルの存在を示すとされた。しかし, 井上²¹ は, このためには更に別の条件が必要なことを示しているが, その条件により, 例 1 のような特異なケースは排除されている。実際, 反例の一つとして挙げられたのが例 1 の特別な場合である次の例である。

例 2

部分情報 $\{h_0 = 1, h_1 = 0\}, \{r_0 = 2, r_1 = 1\}$ が与えられたとする。 $\sigma^2 = 1$ として, $\rho_1 = -1/\sqrt{2}, \rho_2 = -1/\sqrt{2}, \rho_3 = 1, x(t) - x(t-1) = u(t) - u(t-1)$ が得られるが, これは (43) 式で $\omega = 0$ の場合に当たる。漸近安定な線形系で上記の部分情報と整合する系はないが, (43) 式の

ような系だと整合するわけである。

また, Anderson ら¹⁴ は (37) 式の形の ARMA ($m, m-1$) モデルが与えられたとき, その部分情報 $\{h_0, \dots, h_{n-1}\}, \{r_0, \dots, r_n\}$ ($m > n$) に整合するより低次の ARMA (n, n) モデルをマルコフ共分散等価実現 (covariance equivalent realization, cover) と呼び, それらすべて (この場合, 2 通り) を求める方法を示しているが, これまで述べてきた一般化 PARCOR 係数による特徴づけによって言い直すこともできる。後の便宜上, ここでは ARMA (m, m) 過程の部分情報 $\{h_0, \dots, h_n\}, \{r_0, \dots, r_n\}$ ($m > n$) と整合する ARMA (n, n) モデルを求める方法を最初に述べる。上記の部分情報 ($\sigma^2 = 1$ としている) から ARMA レビンソン算法により $\rho_1 \dots \rho_{2n+1}$ が生成される。同時に $\alpha(j, i), \beta(j, i)$ ($i = 1, \dots, j; j = 1, \dots, 2n+1$) も求まる。しかし, ARMA (n, n) モデルであるためには $\rho_{2n+1} = \pm 1$ でなければならないので, (32) 式より新しい $\tilde{\alpha}(2n+1, i)$ ($i = 1, \dots, 2n+1$) を次の式により作る。

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}(2n+1, 2n+1) &= \pm \frac{\sigma(2n)}{\tau(2n-1)}, \\
 \tilde{\alpha}(2n+1, i) &= \alpha(2n, i) + \tilde{\alpha}(2n+1, 2n+1) \\
 &\quad \times \beta(2n-1, 2n+1-i) \\
 (i = 1, \dots, 2n) \quad (44)
 \end{aligned}$$

この結果, この $\tilde{\alpha}(2n+1, i)$ に対応する ARMA (n, n) モデルは部分情報 $\{h_0 \dots h_{n-1}\}, \{r_0 \dots r_n\}$ と整合することになる。Anderson らの n -マルコフ cover を作るには, (44) 式で $2n+1$ を単に $2n$ におきかえればよい。しかし, 例 1, 2 でみたように, この手続きで“特異”な ARMA モデルが生成される可能性は残されている。

5. ARMA 格子形フィルタ

ここでは, (16) 式の巡回格子形 (ラティス) 構造から導かれる ARMA 格子形フィルタについて述べる。(16) 式で $d = 2$ とし, t を $t-1$ でおきかえる。すると, $k = 1$ に対しては $\beta_1(j, j) = 0$ より $\eta(j, 2t-1) = \eta(j-1, 2t-2)$ となる。 $k = 2$ に対して, 記法簡単化のため, $\varepsilon_j(t) = \varepsilon(j, 2t), \eta_j(t) = \eta(j, 2t), \alpha_j = \alpha(j, j), \beta_j = \beta(j, j)$ とおけば

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{j+1}(t) &= \varepsilon_j(t) + \alpha_{j+1}\eta_{j-1}(t-1) \\
 \eta_{j+1}(t) &= \eta_{j-1}(t-1) + \beta_{j+1}\varepsilon_j(t) \quad (45)
 \end{aligned}$$

なる関係を得る。初期条件は

$$\begin{aligned}
 \eta_{-1}(t-1) &= \eta(0, 2t-1) = u(t) \\
 \varepsilon_0(t) &= \eta_0(t) = x(t) \quad (46)
 \end{aligned}$$

である。形式的には通常の AR ラティスでは (45) 式の右辺の $\eta(t-1)$ の添字は j であるが, この ARMA ラティ

スでは $j-1$ になっている点は興味深い。(45) 式の第 1 式を $\varepsilon_j(t) = \varepsilon_{j+1}(t) - \alpha_{j+1}\eta_{j-1}(t-1)$ と書いて、(46) 式を考慮に入れ、この ARMA ラティスのブロック図を書くと Fig. 1 (a) のようになる。規格化 ARMA ラティスは $\varepsilon_j(t) = \sigma(j)\tilde{\varepsilon}_j(t)$, $\eta_j(t) = \tau(j)\tilde{\eta}_j(t)$ とおき、(35) 式の関係を用いれば

$$\begin{pmatrix} \tilde{\eta}_{j+1}(t) \\ \tilde{\varepsilon}_j(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{j+1} & \sin \theta_{j+1} \\ -\sin \theta_{j+1} & \cos \theta_{j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_{j-1}(t-1) \\ \tilde{\varepsilon}_{j+1}(t) \end{pmatrix} \quad (47)$$

として求まる。ただし、 $\rho_j = \sin \theta_j (|\theta_j| < \frac{\pi}{2})$ といった。これを図示したのが Fig. 1 (b) である。(47) 式右辺の行列 $\Sigma(\theta_{j+1})$ は直交回転行列であり、この規格化 ARMA ラティスは一種の直交フィルタである。このフィルタは $2n$ 個の基本ラティス区間から成っており、 $2n$ 個の遅延素子を含んでいる。しかし、Fig. 1 (c) に示すように、遅延素子のおく位置をかえることにより、 n 個ですますことができる。これらのフィルタ構造はパイプライン処理に適したものとなっている。また、ARMA パラメータからラティスパラメータ ρ_j を計算することも容易にできる。これに反し、遅延素子が n 個の最小実現で

Fig. 1 The Block diagrams of new ARMA lattice filters

あり、最も優れた ARMA ラティスといわれている Rao らの方法⁷では、最初に $C(z)C(z^{-1}) = A(z)A(z^{-1}) - B(z)B(z^{-1})$ を満足する多項式 $C(z)$ を求める必要があ

る。これは一種のスペクトル因数分解で計算が複雑であるうへ、右辺が“正”の量の差となっているので数値計算上からも問題がある。また、このフィルタ (Fig. 1 (a) の方) の係数量子化による周波数応答特性への影響を他のラティスフィルタ (Lim⁵, 宮永⁶) のものと一つの例について比較してみた。用いた伝達関数は Lim らの文献⁵にある ARMA (10, 10) 系の低域通過フィルタ (カットオフ周波数 0.14) のものである。最初に、各フィルタのラティスパラメータを求め、次にこれらを 8 ビット量子化してできたフィルタの周波数応答を再計算し、量子化前のものと比をとってみたのが Fig. 2 である。この図より、0~0.15 の周波数帯域で Fig. 1 (a) のフィルタの感度が低く安定していることがわかる。

Fig. 2 A comparison of the effects of coefficient quantization on the frequency response for three ARMA lattice filters

6. パラメータの推定

これまでは、1 次、2 次情報 $\{h_k\}, \{r_k\}$ が共に与えられているとしていたが、片方のみの場合も多い。いま、データ $\{x(1) \cdots x(N)\}$ が与えられているとする。自己共分散の推定値 $\hat{r}_k$ のみを利用する場合は (22) 式で $b_0 = 1$ とした最小位相系のパラメータが推定される。 ρ_k の推定値 $\hat{\rho}_k$ を得るには、 h_k の推定値 $\hat{h}_k$ が必要である。時系列解析の分野では、このような場合、最初に次数の高い AR モデルを当てはめ、得られた AR 形伝達関数を展開して $\hat{h}_k$ を求める手法がよく用いられている。Table 1 に $\sigma^2 = 1$ として ARMA (2, 2) 過程

$$\begin{aligned} x(t) &= 1.5x(t-1) + 0.7x(t-2) \\ &= u(t) + 0.5u(t-1) - 0.3u(t-2) \end{aligned}$$

から $N = 1000$ 個のデータを発生させ、AIC 法によって AR (14) モデルを選び (このとき、 $\hat{\sigma}^2 = 0.979$), ρ_k

Table 1 The true and estimated ARMA partial autocorrelation coefficients

j	ρ_j	$\hat{\rho}_j$
1	-0.267	-0.275
2	-0.911	-0.913
3	-0.783	-0.775
4	0.981	0.941
5	1.000	0.904
6		-0.480
7		-0.408
8		0.100
9		0.194
10		0.090

を推定した結果を示す。 $\rho_1 \sim \rho_4$ はかなりの精度で推定されているが、 $\rho_5 = 1$ の推定誤差 (約 0.1) は若干大きい。これは、 $\hat{h}_k$ を求める際、AR モデルを用いたが、このためのバイアスが集約的に $\hat{\rho}_5$ に現われたためと思われる。この ρ_{2n+1} の推定誤差が大きいという現象は bootstrap 形の適応 ARMA 格子形フィルタ⁹を用いた際にも起こっている。Table 1 には参考のため $\hat{\rho}_6 \sim \hat{\rho}_{10}$ の値も示した。対応する真値 $\rho_6 \sim \rho_{10}$ は定義されないが、 ± 1 に近い $\hat{\rho}_6 \sim \hat{\rho}_{10}$ はないので、 $\hat{\rho}_k$ のパターンから次数 n を推測することも可能であると思われる。

最後に、(22) 式のインパルス応答系列 $\{h_0 h_1 \cdots h_{N-1}\}$ のみが与えられたとき、ARMA パラメータを復元する問題を考える。この問題はデジタルフィルタの設計や実現理論の分野で詳しく研究されているが、重要な点は復元された ARMA モデルが安定でなければならないということである。Claerbout¹⁵ と Morf¹⁶ は基準

$$F = \sum_{i=0}^{\infty} (h_i * a_i - b_i)^2 \quad (48)$$

を $a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ に関し最小化することにより、安定なモデルが得られることを示している。ただし、 $h_i * a_i$ は $\{h_k\}$ と $\{1 a_1 \cdots a_n\}$ の畳み込みを表わし、 $h_i = 0 (i < 0)$ とする。さらに、次の仮定をおく。

$$h_i = 0 \quad (i \geq N) \quad (49)$$

いま、2変数データを

$$X(j) = \begin{pmatrix} \delta_{j-1,0} \\ h_{j-1} \end{pmatrix} \quad (j = 1, \dots, N) \quad (50)$$

とし、その共分散行列の推定値 $\hat{R}_k$ と行列 $F_{n,i}$ を

$$\hat{R}_k = \sum_{j=1}^{N-k} X(j+k) X^T(j), \quad F_{n,i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b_i & a_i \end{pmatrix} \quad (51)$$

とおくと、(48) 式の最小化により

$$\hat{R}_k + \sum_{i=1}^n F_{n,i} \hat{R}_{k-i} = \delta_{k,0} P_n \quad (52)$$

なる 2 変数 Y-W 方程式が得られる。ここで、 P_n は

$\{h_0 \cdots h_{N-1}\}$ から決まる正定行列である。 $I + F_{n,1} z^{-1} + \cdots + F_{n,n} z^{-n}$ は安定行列なので、 $A(z)$ は安定である。(50), (51) 式から

$$\hat{R}_k = \begin{pmatrix} \delta_{k,0} & h_k \delta_{k,0} \\ h_k & \hat{r}_k \end{pmatrix}, \quad \hat{r}_k = \sum_{j=0}^{N-1-k} h_{j+k} h_j$$

となるが、これを (25) 式と比較すれば、上述の方法は r_k を $\hat{r}_k$ で置き換え、ARMA パラメータを求める方法と同じであるといえる。

さて、(49) 式の仮定は本来望ましいものではない。特に、減衰の緩やかな系に対しては問題が生じる。このような仮定を避ける方法として、スペクトル推定の分野では Burg 法がよく用いられる。Pusey¹⁷ は Burg 法を多変数の場合に拡張した Strand 法を (50) 式のデータにそのまま適用することを提案している。そして、シミュレーションにより、(52) 式の Y-W 方程式を用いた方法に比べ大幅に復元精度が向上することを示した。しかし、同時に僅かな観測雑音によって、結果がかなり劣化することも述べている。

ここでは、Pusey の方法を更に改善するために、2. で述べた Burg 形 CL 法 ($d=2$ とする) を使うことにする。(50) 式のデータを (11), (13), (16), (20), (21) 式に用いると、容易に

$$\Delta_1(j) = 0 \quad (j \geq 0)$$

であることがわかる。したがって、3., 5. での ARMA ラティスの関係 (35), (45) 式がそのまま使える。 j 次の量が与えられたとき、(20) 式の $\Delta_2(j)$ は

$$\Delta(j) = \frac{2 \sum_{t=L(j)}^{N-1} \varepsilon_j(t+1) \eta_{j-1}(t)}{\frac{1}{\sigma^2(j)} \sum_{t=L(j)}^{N-1} \varepsilon_j^2(t+1) + \frac{1}{\tau^2(j-1)} \sum_{t=L(j)}^{N-1} \eta_{j-1}^2(t)}$$

により計算する。ただし、 $L(j) = [(j+1)/2]$ である。そして、 $\alpha(j+1, j+1)$, $\beta(j+1, j+1)$ を求め、 $\sigma(j+1)$, $\tau(j+1)$ を計算する。さらに、 $\varepsilon_{j+1}(t+1)$, $\eta_{j+1}(t+1)$ ($t = L(j+1), \dots, N-1$) は (45) 式の関係から計算され、次の $(j+1)$ 次の計算へと進むことになる。また、初期条件は

$$\varepsilon_0(t+1) = h_t, \quad \eta_{-1}(t) = \delta_{t,0} \quad (t = 0, \dots, N-1)$$

$$\sigma^2(0) = \tau^2(0) = \sum_{t=0}^{N-1} h_t^2, \quad \tau^2(-1) = \sum_{t=0}^{N-1} \delta_{t,0}^2 = 1$$

である。3., 4. での議論から、元のシステムが ARMA (n, n) であるとする、(33) 式が成立するので、この性質を推定アルゴリズムに取り入れた方がよい。そこで、上記の方法により、 $\sigma(j)$, $\alpha(j, i)$ ($i = 1, \dots, j$), $\tau(j-2)$, $\beta(j-2, i)$ ($i = 1, \dots, j-2$) ($j = 1, \dots, 2n+1$) を求め、(44) 式と同じく

$$\bar{\alpha}(2n+1, 2n+1) = \frac{\sigma(2n)}{\tau(2n-1)} \text{sgn}(\alpha(2n+1, 2n+1))$$

$$\bar{\alpha}(2n+1, i) = \alpha(2n, i) + \bar{\alpha}(2n+1, 2n+1)\beta(2n-1, 2n+1-i) \quad (i=1, \dots, 2n) \quad (53)$$

により新しく ARMA パラメータを求め直すことが考えられる。直観的には、この方がデータ $\{h_0, \dots, h_{N-1}\}$ への整合性は高くなると考えられる。Pusey¹⁷では(33)式の性質は言及されていない。

この方法の有効性を示すシミュレーション結果を以下に述べる。対象としたのは Pusey¹⁷で用いられた

$$A(z) = 1 + 1.8z^{-1} - 1.458z^{-3} - 0.6561z^{-4}$$

$$B(z) = 2 + z^{-1} - z^{-2} + 0.5z^{-3} + 1.5z^{-4}$$

なる ARMA (4, 4) 系である。この系のインパルス応答を Fig. 3 (a) に示す。Fig. 3 (b) に (53) 式の修正を行なわない方法 ($\alpha(2n+1, i)$ ($i=1, \dots, 2n+1$) をそのまま用いる方法) による復元結果を、Fig. 3 (c) に (53) 式の修正を加えた方法による結果をそれぞれ示す。ここで、データ長は $N=100$ とし、 $\{h_0, \dots, h_{N-1}\}$ には弱い

(a) The true impulse response

(b) The reconstructed one by the algorithm without (53)

(c) The reconstructed one by the algorithm with (53)

Fig. 3

白色雑音系列 $\{w_0 \dots w_{N-1}\}$ ($E[w_t] = 0$, $E[w_t^2] = \sigma_w^2$) を加え、信号対雑音比

$$SNR = 10 \left(\log \sum_{t=0}^{N-1} h_t^2 - \log \sum_{t=0}^{N-1} w_t^2 \right)$$

が 40 dB となるよう σ_w^2 を調節した。これらの図から明らかなように、(53) 式による修正を加えた方が良好な結果が得られている。復元されたインパルス応答 $\{\hat{h}_k\}$ の良さを見るために、信号対復元誤差比を

$$SER = 10 \left(\log \sum_{t=0}^{N-1} h_t^2 - \log \sum_{t=0}^{N-1} (h_t - \hat{h}_t)^2 \right)$$

とくと、理想的には $SNR = SER$ であるが、雑音をいろいろ変えて求めた SER の平均値は 20 dB であった。一方、(53) 式の修正を加えない方法や Pusey の方法では 10 dB 程度にとどまっている。以上から、本論文で提案した (53) 式による方法の有効性は明らかである。

7. あとがき

本論文では、巡回格子法を ARMA モデルの一般化 PARCOR 係数による特徴づけ問題に適用し、その結果を基に新しい ARMA ラティスフィルタを提案した。そして、インパルス応答系列からのパラメータ推定法に関しても、新しい方法を提案し、その有効性を示した。多変数 ARMA モデルへの拡張は重要な問題であり、今後の課題である。

終りにあたり、本論文での数値計算に関し御協力いただいた牧野将哉、安森稔久、中路義晴の諸氏に感謝いたします。また、Fig. 1 (c) のフィルタ構造に関し、貴重な示唆をいただいた北海道大学応用電気研究所鈴木正清氏に感謝いたします。

参考文献

- 1) B. Friedlander : Lattice Filters for Adaptive Processing ; Proc. IEEE, Vol. 70, No. 8, pp. 829~867, Aug. (1982)
- 2) 酒井：ラティス形フィルタによる信号処理；システムと制御，26 巻，12 号，pp. 747~755 (1982)
- 3) D. T. L. Lee, B. Friedlander & M. Morf : Recursive Ladder Algorithm for ARMA Modeling ; IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-27, pp. 753~764 (1982)
- 4) D. Henrot & C. T. Mullis : A Modular and Orthogonal Digital Filter Structure for Parallel Processing ; Proc. ICASSP, Boston, MA, pp. 623~626 (1983)
- 5) Y. C. Lim & S. R. Parker : On the Synthesis of Lattice Parameter Digital Filters ; IEEE Trans. Circuit Syst., Vol. CAS-31, pp. 593~601 (1984)
- 6) 宮永，永井，三木：白色ガウス過程を入力とする ARMA デジタルラティスフィルタ；電子情報通信学会論文集，J 67-A 巻，12 号，pp. 1270~1277 (1984)
- 7) S. K. Rao & T. Kailath : Orthogonal Digital Filters for VLSI Implementation ; IEEE Trans. Circuit Syst., Vol. CAS-31, pp. 933~945 (1984)
- 8) M. Suzuki, N. Nagai & N. Miki : Synthesis on Digital

- Lattice Filters Realizing Stable Rational Transfer Functions ; Proc. ISCAS, Kyoto, Japan, pp. 499~502 (1985)
- 9) H. Sakai, H. Tokumaru & A. Futamura : ARMA Modelling Using Circular Lattice Filter ; Proc. IFAC 9th World Congress, Budapest, Hungary, pp. 671~675 (1984)
 - 10) Dewilde & H. Dym : Lossless Inverse Scattering, Digital Filters, and Estimation Theory ; IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. IT-30, No. 4, pp. 644~662 (1984)
 - 11) E. Karlsson & M. H. Hayes : Least Squares ARMA Modeling of Linear Time-Varying Systems : Lattice Filters Structure and Fast RLS Algorithms ; IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-35, pp. 994~1014, June (1987)
 - 12) H. Sakai : Circular Lattice Filtering Using Pagano's Method ; IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-30, pp. 279~287, Apr. (1982)
 - 13) C. T. Mullis & R. A. Roberts : The Use of Second-Order Information in the Approximation of Discrete-time Linear Systems ; IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-24, pp. 226~238, June (1976)
 - 14) B. D. O. Anderson & R. Skelton : The Generation of All q -Markov Covers ; IEEE Trans. Circuit Syst., Vol. CAS-35, No. 4, pp. 375~384, Apr. (1988)
 - 15) J. F. Claerbout : Fundamentals of Geophysical Data Processing, New York, McGraw-Hill (1976)
 - 16) M. Morf, D. T. Lee, J. R. Nickolis & A. Vieira : A Classification of Algorithms for ARMA Models and Ladder Realization, Proc. ICASSP, Hartford, C. T. (1977)
 - 17) L. C. Pusey : Application of Two-Channel Prediction Filtering to the Recursive Filter Design Problem ; IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-31, pp. 1169~1177, Oct. (1983)
 - 18) O. N. Strand : Multichannel Complex Maximum Entropy (Autoregressive) Spectral Analysis ; IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-22, pp. 634~640 (1977)
 - 19) H. Sakai : Covariance Matrices Characterization by a Set of Scalar Partial Autocorrelation Coefficients ; Ann. Statist., Vol. 11, No. 1, pp. 337~340 (1983)
 - 20) 川嶋, 酒井 : 現代スペクトル解析 ; 森北出版 (1989)
 - 21) Y. Inouye : Some Notes on the Second-Order Interpolation Problem of Digital Filters ; IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-31, pp. 209~212, Jan. (1983)