FRIT を用いた閉ループ特性と目標応答特性の 向上のための2自由度制御器のパラメータ調整*

坂田 智則[†]・金子 修[†]・藤井 隆雄[‡]

Parameter Tuning of Two-degree of Freedom Controllers Using FRIT for the Tracking Property and the Feedback Properties*

Tomonori SAKATA[†], Osamu KANEKO[†] and Takao FUJII[‡]

In[13], some of the authors of this paper proposed the fictitious reference iterative tuning (which is abbreviated as FRIT in the following) as one of the useful and powerful methods of parameter tuning of an implemented controller in the sense that we require only one-shot experiment for the parameter tuning in order to achieve the minimization of the squared error between the real output and the desired one. However, feedback properties like sensitivity or noise reductionability those are also required for a control system to be more practical have not been addressed yet. On the other hand, it is well known that the two-degree of freedom of control scheme is one of the effective ways those enable us to deal both of tracking property and feedback ones simultaneously. From this reason, in this paper, we expand FRIT into the two-degree of freedom control scheme in order to tune parameters of implemented controllers in this structure for the sake of the achievement of given specifications on not only tracking property but also feedback properties. We consider the correspondence of the minimization between desired cost function and the fictitious ones. We then provide effective procedures of FRIT in the two-degree of freedom of control scheme with two-shot experiments. Finally, we also give illustrative examples in order to show the validity of our proposed methods.

1. はじめに

PID[1,14]などの調整可能なパラメータをもつ制御器[9]を実装した閉ループ系より得られた実験データから、応答が目標応答に近づくように制御器のパラメータを直接に調整する方法としてIterative Feedback Tuning ([4],以降IFTと略する), Virtual Reference Feedback Tuning ([2],以降VRFTと略する), Fictitious Reference Iterative Tuning ([5,13],以降FRITと略する)などが提案されている。これらの手法はシステム同定などのモデリング手法の適用が困難な場合に、実データのみを用いることで最適な制御器パラメータを直接に調整

するという点で非常に有用な手法である。これらの中で、IFTはチューニングの際の非線形演算に必要な勾配などが実験データを必要としており、そのパラメータの更新に多数回の繰り返し実験を行う必要があり、結果として時間や経費などがかかることで実用上の大きな障壁になってしまう。それに対しVRFTやFRITでは、一回の制御実験から得られたデータのみを使うことで制御器のパラメータ調整が可能である。さらに参考文献[5]や[13]で述べられているように、VRFTは初期実験を開ループ系で行う必要があるといった短所があるのに対し、FRITでは初期実験を開/閉ループ問わず可能であるという点で優位である。また、VRFTでは所望の応答を達成する目的にもかかわらず入力を評価している点に対し、FRITでは出力を評価しており、その意味でFRITの方が直感的にわかりやすい手法であるといえよう。

ところで、実システムの制御においては、目標応答特性のみでなくノイズ除去特性や感度特性などのフィードバック特性なども考慮しなければならない場合がほとんどである。さらに、実応用においては、これらの複数の性能を向上しなければならないにもかかわらず、時間やコ

* 原稿受付 2006年12月19日

[†] 大阪大学 大学院 基礎工学研究科 Graduate School of Engineering Science, Osaka University; 1-3 Machikaneyamacho, Toyonaka city, Osaka 560-8531, JAPAN

[‡] 福井工業大学 工学部 経営情報学科 Department of Management Science, Fukui University of Technology; 3-1-6, Gakuen, Fukui city, Fukui 910-8505, JAPAN

Key Words: parameter tuning, fictitious reference iterative tuning (FRIT), iterative feedback tuning (IFT), two degree of freedom control systems, facility.

ストの制約をもつ場合も多く、そのような場合にはなるべく少ない実験回数で簡易的に制御器パラメータを調整できる手法が望ましい。一方で、一般に目標応答特性とフィードバック特性を同時に高める手法として、2自由度制御系が有効であることはよく知られている[1,3,8,12]。実験データを直接用いることによる2自由度制御器のパラメータ調整手法に関しては、IFTでは参考文献[4]で論じられているが、先述したように非線形最適化における繰返し計算にともなう多数の実験を必要とする。VRFTでは参考文献[7]で提案されているが、VRFTでは初期データを開ループ実験で行うことが望ましく不安定系などでは適用が困難であるという欠点がある。2自由度制御系へのFRITの適用に関しては参考文献[6]で提案されているが、そこではフィードフォワード部を用いたシステム同定への応用が主題であり、先に述べたような、異なる仕様を独立に達成しようという2自由度制御系本来の目的に関しては議論されていない。

そこで本論文では、FRITを用いることにより、目標値応答特性と感度特性または雑音除去特性といったフィードバック特性に関する仕様を同時に達成するという2自由度制御系本来の目的のための制御器のパラメータ調整手法を提案し考察する。具体的には目標値応答特性と感度特性を同時に考慮した場合、および雑音が存在した場合の目標値応答特性と雑音除去特性を同時に考慮した場合について考える。目標値応答特性のみを考えたFRIT[13]で重要な役割を演じた擬似参照信号[11]を使用することで、一回の実験で最適なパラメータ調整を可能にした。ここでもこの擬似参照信号および擬似的な外生信号を導入することで、2自由度制御系のパラメータ調整を二回の実験で行う手法を提案する。

本論文の構成は以下のとおりである。まず続く2.では、本論文で必要とする準備的事項および1自由度系におけるFRITについての概略を述べる。3.では、本論文での一番目の主要結果として、FRITを用いることによる目標値応答特性とフィードバック系の感度低減化を同時に向上するような2自由度制御器のパラメータ調整手法について論じる。4.では、本論文での二番目の主要結果として、FRITを用いることによる目標値応答特性とフィードバック系の雑音除去特性を同時に向上するような2自由度制御器のパラメータ調整手法についても論じる。5.では、これらの前二章の内容の妥当性を検証すべく、台車系を用いた実験例を挙げて考察する。そして、最後に6.で結論を述べる。

2. 準備

2.1 表記

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ をそれぞれ実数および整数の集合とする。 $\mathbb{R}^n$ を n 次元実ベクトルの集合とする。 $a \in \mathbb{R}^n$ の i 番目の要素を a_i で表す。 $a \in \mathbb{R}^m$ に対し、 $\|a\|_2$ をユークリッド2ノルムとする。 $(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ を、定義域を $\mathbb{Z}$ 、値域を $\mathbb{R}$ とする離

散時間時系列信号の集合とする。 $w \in (\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ に対し、時刻 $a \in \mathbb{Z}$ から $b \in \mathbb{Z}$ ($a \leq b$) における有限データを $w_{[a,b]}$ で表す。本論文では、 $w_{[a,b]} \in \mathbb{R}^{b-a+1}$ のように $b-a+1$ 次元の実ベクトルとみなす。

$w \in (\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ や $w_{[a,b]}$ に対し、時刻 $t \in \mathbb{Z}$ における値を w_t で表す。 $w \in (\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ に対し、シフトオペレータ q を $(qw)_t := w_{t+1}$ で定義する。 $w_{[a,b]}$ に対しても同様に定義する（ただし終点時刻 b では $(qw_{[a,b]})_b = 0$ とする）。一入出力線形時不変離散時間伝達関数 $G(q)$ に対し、入力信号 $u \in (\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ を印加したときの出力信号は、本来であれば $G(q)$ のインパルス応答を用いて畳み込みの和の形で表現すべきであるが、表記の簡単化のために $G(q)u \in (\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ で表す。また、 $G(q)u_{[1,N]} \in \mathbb{R}^N$ に対して、 $G(q)$ のインパルス応答系列の i 番目の要素（マルコフパラメータ）を G_i で表す。このとき $G(q)u_{[1,N]} \in \mathbb{R}^N$ に対して、

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_1 & G_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ G_{N-1} & \cdots & G_1 & G_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N \quad (1)$$

のような Toeplitz 行列演算子の値域として得られるとする。さらに、 $G(q)$ の有限のインパルス応答列 $\{G_0, G_1, \dots, G_{N-1}\}$ に対し $[G]_{[0,N-1]} := [G_0 \ G_1 \ \cdots \ G_{N-1}]^T \in \mathbb{R}^N$ なる表記を導入し、一方で有限時間の時系列信号 $w_{[1,N]} \in \mathbb{R}^N$ に対し

$$T_{[1,N]}^w := \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ w_2 & w_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ w_N & \cdots & w_2 & w_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (2)$$

なる Toeplitz 型の行列を導入する。すると(1)式から若干の計算より

$$y_{[1,N]} = G(q)u_{[1,N]} = T_{[1,N]}^u [G]_{[0,N-1]} \quad (3)$$

とも表記できる。

2.2 FRIT について

ここでは、著者らによって提案されたFRIT[13]の基本概念を、Fig. 1 のような2自由度制御系[6]で説明する。

Fig. 1 Two-degree of freedom control system

まず、本論文をとおして、プラント $G(q)$ は、線形、時不変、有限次元、そして1入力1出力システムであると仮定する。さらにプラントの伝達関数については、その相対次数と不安定零点の情報以外は未知であるとする。

なお、これらの既知情報が必要であるという点は、目標値応答に追従することを目的とした制御系設計において一般に言えることであり、FRITに限った制約ではない。

Fig. 1 において、 $C_e(\rho_e, q)$ は $\rho_e \in \mathbb{R}^{n_e}$ でパラメタライズされるフィードバック制御器、 $C_r(\rho_r, q)$ は $\rho_r \in \mathbb{R}^{n_r}$ でパラメタライズされるフィードフォワード制御器とする¹。また、これらをまとめて $\rho := [\rho_e^T \rho_r^T]^T \in \mathbb{R}^{n_e+n_r}$ と表記しておき、 ρ を用いた制御器による閉ループ系の入出力データをおのおの $u(\rho)$, $y(\rho)$ と表記する。とくに、たとえば参照値信号を0にして、閉ループ系の信号が ρ_e のみに依存する場合には $y(\rho_e)$ のように表記する。また ρ はガウスニュートン法などの繰り返し計算で更新するので、 i 番目の更新回数における ρ を ρ^i と表す。

以上の準備のもと、制御系の設計仕様として、所望の応答をもたらす目標値 r から出力 $y(\rho)$ までの伝達関数 $M_d(q)$ が与えられたとする。このとき、評価関数

$$J_{M_d}(\rho) = \sum_{t=1}^N \{y(\rho)_{(t)} - M_d(q)r_{(t)}\}^2 \quad (4)$$

を定義する。そして

$$\rho^* = \operatorname{argmin}_{\rho} \{J_{M_d}(\rho)\} \quad (5)$$

を数式モデルを同定することなく実験データを直接用いて求めることを考える。

まず初期パラメータ ρ^0 による制御器 $C(\rho^0, q)$ がプラントを安定化しているとして、この閉ループ系について一回の実験を行い、参照入力 r に対する入出力データ $y(\rho^0)_{[1,N]}$, $u(\rho^0)_{[1,N]}$ を得る。なお、この r には目標値応答のために実際に用いる参照値信号を用いる。

つぎに、可調整パラメータ ρ を用いて $y(\rho^0)$, $u(\rho^0)$ を発生する擬似参照入力 $\tilde{r}(\rho)$ を

$$\tilde{r}(\rho)_{[1,N]} := \frac{u(\rho^0)_{[1,N]} + C_e(\rho_e, q)y(\rho^0)_{[1,N]}}{C_r(\rho_r, q) + C_e(\rho_e, q)} \quad (6)$$

のように求める。この $\tilde{r}(\rho)$ を用いて、評価関数

$$\tilde{J}_{M_d}(\rho) := \sum_{t=1}^N (y(\rho^0)_{(t)} - M_d(q)\tilde{r}(\rho)_{(t)})^2 \quad (7)$$

を定義し $\tilde{\rho}^* = \operatorname{argmin}_{\rho} \{\tilde{J}_{M_d}(\rho)\}$ を求めることを考える。IFT と同様に、この評価関数にはパラメータが非線形で関わっており、 $\tilde{\rho}^*$ を求めるためにはガウスニュートン法などの非線形最適化を行う必要があるが、一回の実験で得られる既知情報により構成されているので、繰り返し計算における勾配や Hessian などは、新たな実験を必要とせず、すべてオフラインで実行することができる。

そして (7) 式を最小化するパラメータ $\tilde{\rho}^*$ と、本来の目

的である (4) 式を満たす最適パラメータ ρ^* との対応付けについては、参考文献 [6] の定理 1 で示されているように、 $J_{M_d}(\rho) = 0$ なる ρ と $\tilde{J}_{M_d}(\rho) = 0$ なる ρ が等価であることが導かれている。厳密にこれらの評価関数が 0 になることはないが、擬似的に行う (7) 式の最小化により、本来の評価関数が最小化されることの定性的な裏づけになっている。以上が目標応答のみを主眼とした 2 自由度系の FRIT の概略である。

3. 目標値応答特性向上と低感度化

3.1 問題設定

Fig. 1 で表された一般的な 2 自由度制御系について、目標値応答特性および低感度化の向上を目的とした FRIT の適用について考える。なお、ここでは議論を簡単にするため検出雑音は無視できるものとする。

まず、目標値応答特性に関する仕様に関しては、2.2 で述べたように、参照値 r から出力 $y(\rho)$ までの目標値応答伝達関数 $M_d(q)$ を与え、(4) 式で定義される評価関数を最小化することを考える。一方の閉ループの低感度化については、感度関数

$$S(\rho_e, q) = \frac{1}{1 + G(q)C_e(\rho_e, q)} \quad (8)$$

を調整すべく、仕様となる感度関数 $S_d(q)$ を与える。Fig. 1 の 2 自由度系においては $S(\rho_e, q)$ は参照値信号 r から偏差 e の伝達関数と等価であるが、 $r=0$ として入力 $u(\rho)$ の前に既知の信号 v を印加した Fig. 2 を考えると、信号 v から入力 $u(\rho)$ までの伝達関数とも等価であることがわかる。したがって、 v から $u(\rho_e)$ の特性を評価することで $S(\rho_e, q)$ が評価できる。ここで、 v は感度特性を調整するための信号であるので、感度が重要な周波数帯域、すなわち、低周波数帯域で強調された信号を採用する。

Fig. 2 Two-degree of freedom control system with v

そこで、

$$J_{S_d}(\rho_e) = \sum_{t=1}^N \{u(\rho_e)_{(t)} - S_d(q)v_{(t)}\}^2 \quad (9)$$

を最小化することを考える。なお、ここで感度関数に関連する信号はすべて閉ループ制御器 $C_e(\rho_e)$ のみに依存する関数なので、関連するパラメータも ρ_e のみである。以上の準備のもと、2 自由度系に対して目標値応答特性と低感度化に関する独立の仕様を達成させる以下のような問題を考える。

【問題 1】 Fig. 1 において、目標値応答伝達関数として $M_d(q)$ を、フィードバック系の感度関数の仕様として $S_d(q)$ を与える。このとき

¹ $\rho_e \in \mathbb{R}^{n_e}$ の各要素 $\rho_e = [\rho_e(1) \cdots \rho_e(n_e)]$ が制御器 $C_e(\rho_e, q)$ の伝達関数の分母や分子の係数となっている。 $\rho_r \in \mathbb{R}^{n_r}$ も同様である。

$$\rho_{MS}^* := \operatorname{argmin}_{\rho} \{J_{M_d}(\rho) + J_{S_d}(\rho_e)\} \quad (10)$$

を, 同定を行うことなく, 2 回の実験回数で得た入出力データより直接求めよ. □

(10) 式より明らかなように, この最小化問題は, 目標値応答特性を $M_d(q)$ に, そして, 感度特性を $S_d(q)$ におのおの合わせるように, 2 自由度制御器のパラメータ ρ を実験データから直接に求める問題である. なお, 問題設定中で “2 回” としているのは, 閉ループの感度特性に関するデータを取得することと, 目標値応答に関するデータを取得する, ということからである.

なお, 既知の信号 v はループ整形のための信号のほか, プロセス制御系で広く用いられる外乱フィードフォワード制御における測定可能な外乱を除去する問題としてみなすこともできる. この場合には, 実際の制御器からの操作量は Fig. 2 の v が引加される端子の左 (外乱の直前) に加わる信号として, その信号と外乱 v を加え合わせたものを $u(\rho_i)$ とみなせばよい.

3.2 FRIT による制御器パラメータ調整

ここでは, FRIT を用いることで, 問題 1 に取り組むことを考える. まず, Fig. 1 について, 初期パラメータ ρ^0 を設定し, 2.2 で述べたように, 目標値信号 r を印加して, 初期データ $y(\rho^0)_{[1,N]}$ と $u(\rho^0)_{[1,N]}$ を取得する. そして, この初期データを用いて擬似参照信号を (6) 式と同じく導入し, 評価関数を (7) 式と同じように定義する.

つぎに, 感度低減化も制御器パラメータ調整に考慮するために以下の方策を考える. まず, 入力 u の前に既知の信号 v を印加した Fig. 2 を考えよう. そして, この付加信号を $v \neq 0$, 参照信号を $r = 0$ として, 一回目と同一のパラメータ ρ^0 を用いた制御器により, 二回目の実験を行う. ここで得られるデータを添え字 v をつけて $u_v(\rho_e^0)_{[1,N]}$, $y_v(\rho_e^0)_{[1,N]}$ と表記する. そして, 制御器の入出力関係

$$u_v(\rho^0)_{[1,N]} = -C_e(\rho_e^0)y(\rho_e^0)_{[1,N]} + v_{[1,N]} \quad (11)$$

に注意して, 得られた初期データをもとに, 擬似的な付加信号 $\tilde{v}$ を

$$\tilde{v}(\rho_e)_{[1,N]} = u_v(\rho_e^0)_{[1,N]} + C_e(\rho_e)y_v(\rho_e^0)_{[1,N]} \quad (12)$$

のように定義する. ここで, 関係する制御器は閉ループ制御器 $C_e(\rho_e, q)$ のみであるので, 関連するパラメータも ρ_e のみである. この式から, 感度特性の仕様として与えた $S_d(q)$ を用いて, 評価関数を

$$\tilde{J}_{S_d}(\rho_e) := \sum_{t=1}^N (u_v(\rho_e^0)_{(t)} - S_d(q)\tilde{v}(\rho_e)_{(t)})^2 \quad (13)$$

のように定義する.

ここで, 問題 1 の (10) 式で挙げた本来最小化したい

$$J_{MS_d}(\rho) := J_{M_d}(\rho) + J_{S_d}(\rho_e) \quad (14)$$

の代わりに, 以上のように導入した $\tilde{J}_{M_d}(\rho)$ と $\tilde{J}_{S_d}(\rho_e)$ から構成した

$$\tilde{J}_{MS_d}(\rho) := \tilde{J}_{M_d}(\rho) + \tilde{J}_{S_d}(\rho_e) \quad (15)$$

を最小化することを考える. そこで表記の準備として

$$\tilde{\xi}(\rho)_{[1,N]} := y(\rho^0)_{[1,N]} - M_d(q)\tilde{r}(\rho)_{[1,N]} \quad (16)$$

$$\tilde{\xi}_S(\rho_e)_{[1,N]} := u_v(\rho_e^0)_{[1,N]} - S_d(q)\tilde{v}(\rho_e)_{[1,N]} \quad (17)$$

を与える. そして, (15) 式の最小化のためにガウスニュートン法を用いて, 勾配

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{J}_{MS_d}(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho^i} &= \sum_{t=1}^N \tilde{\xi}(\rho)_{(t)} \left(\frac{\partial \tilde{\xi}(\rho)}{\partial \rho} \right)_{(t)} \bigg|_{\rho=\rho^i} \\ &+ \sum_{t=1}^N \tilde{\xi}_S(\rho_e)_{(t)} \left(\frac{\partial \tilde{\xi}_S(\rho_e)}{\partial \rho_e} \right)_{(t)} \bigg|_{\rho_e=\rho_e^i} \end{aligned} \quad (18)$$

を用いた更新式

$$\rho^{i+1} = \rho^i - \gamma R_{MS}(\rho^i)^{-1} \left. \frac{\partial \tilde{J}_{MS_d}(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho^i} \quad (19)$$

により逐次計算していく. ここで, $R_{MS}(\rho)$ は

$$R_{MS}(\rho^i) = \left(\left. \frac{\partial \tilde{J}_{MS_d}(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho^i} \right)^T \left(\left. \frac{\partial \tilde{J}_{MS_d}(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho^i} \right) \quad (20)$$

で計算される Hessian であり, γ は収束速度を調節するパラメータである. そして, 勾配は

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{\xi}(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho^i[1,N]} &= \frac{-M_d(q)}{(C_e(\rho_e, q) + C_r(\rho_r, q))^2} \times \\ &\left\{ \left(C_r(\rho_r, q) \frac{\partial C_e(\rho_e, q)}{\partial \rho_e} - C_e(\rho_e, q) \frac{\partial C_r(\rho_r, q)}{\partial \rho_r} \right) y(\rho^0)_{[1,N]} \right. \\ &\left. - \left(\frac{\partial C_e(\rho_e, q)}{\partial \rho_e} + \frac{\partial C_r(\rho_r, q)}{\partial \rho_r} \right) u(\rho^0)_{[1,N]} \right\} \bigg|_{\rho=\rho^i} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\xi}_S(\rho_e)}{\partial \rho_e} \right|_{\rho_e=\rho_e^i[1,N]} = -S_d(q) \left. \frac{\partial C_e(\rho_e, q)}{\partial \rho_e} \right|_{\rho_e=\rho_e^i} y_v(\rho_e^0)_{[1,N]} \quad (22)$$

を用いることで計算できる.

$\tilde{J}_{MS_d}(\rho)$ に用いる信号は, $v=0$ として参照値信号 r のみを印加した一回目の実験データ $y(\rho^0)_{[1,N]}$ と $u(\rho^0)_{[1,N]}$, そして $r=0$ として付加信号 v のみを印加した二回目の実験データ $y_v(\rho_e^0)_{[1,N]}$ と $u_v(\rho_e^0)_{[1,N]}$ だけであり, パラメータ ρ は制御器のみに関わっている. すなわち, $\tilde{J}_{MS_d}(\rho)$ を最小化するためにガウスニュートンなどの非線形最適化を行う場合には, 更新ごとに勾配や Hessian などを求めるための実験を必要とはせず, 初期の二回の実験のみを用いてオフラインで最適化計算が可能である. そして, オフラインで行う $\tilde{J}_{MS_d}(\rho)$ の最適化と本来の目的

の $J_{MS_d}(\rho)$ の最適化の対応について、以下の定理が導かれる。

【定理 1】 Fig. 2 において、 $C_e(\rho_e, q) + C_r(\rho_r, q)$ は可逆であるとし、この可逆性を保持し $G(q)C_e(\rho_e, q) \neq -1$ を満たすようなパラメータ ρ の集合の元 ρ^0 を用いた閉ループ系より、上述の手順で有限データ $y(\rho^0)_{[1,N]}$, $u(\rho^0)_{[1,N]}$, $y_v(\rho^0)_{[1,N]}$, $u_v(\rho^0)_{[1,N]}$ が得られたとする。このとき、この集合の中にあるパラメータ ρ' について $\tilde{J}_{MS_d}(\rho') = 0$ となるための必要十分条件は $J_{MS_d}(\rho') = 0$ である。

(証明) 付録参照。 $\square$

定理 1 は、零になるパラメータのみでの最適性の保証であるが、その近傍でも $\tilde{J}_{MS_d}(\rho)$ を零に近づけることが、本来の目的である $J_{MS_d}(\rho)$ を零に近づけることに間接的に対応することを、以下の補題で与えておこう。

【補題 1】 定理 1 と同じ仮定と表記に加えて参照値信号 r から出力 $y(\rho)$ までの伝達関数を

$$M(\rho, q) := \frac{G(q)(C_e(\rho_e, q) + C_r(\rho_r, q))}{1 + G(q)C_e(\rho_e, q)} \quad (23)$$

と表記し $y(\rho^0)_{(1)} \neq 0$ および $u_v(\rho^0)_{(1)} \neq 0$ を仮定しよう。さらに、 $\tilde{J}_{MS_d}(\rho)$ は ρ' 近傍で連続と仮定する。このとき、 $\lim_{\rho \rightarrow \rho'} \tilde{J}_{MS_d}(\rho) = 0$ ならば任意の $\epsilon > 0$ に対して、 $\left\{ \sum_{i=0}^{N-1} ((1 - M_d M(\rho)^{-1})_i^2 + (1 - S_d S(\rho_e)^{-1})_i^2) < (1/\alpha + 1/\beta)\epsilon \quad \forall \rho \text{ s.t. } \|\rho - \rho'\|_2 < \delta \right\}$ となるような $\delta > 0$ が存在する。ここで α と β は、おのおの $\mathcal{T}_{[1,N]}^{y(\rho^0)T} \mathcal{T}_{[1,N]}^{y(\rho^0)}$ と $\mathcal{T}_{[1,N]}^{u_v(\rho_e^0)T} \mathcal{T}_{[1,N]}^{u_v(\rho_e^0)}$ の最小特異値である。

(証明) 付録参照。 $\square$

なお、 $y(\rho_0)_{(1)} = 0$ のときには、非零の出力をもつ時点からのデータを用いればよい。また、 ρ' 近傍の連続性に関する厳密な検討については今後の課題とし、ここでは仮定としてとどめておく。補題 1 は、零になるパラメータの近傍における最適性の保証であり、その近傍で $\tilde{J}_{MS_d}(\rho)$ を零に近づけることが、 $1 - M_d(q)M(\rho, q)^{-1}$ と $1 - S_d(q)S(\rho_e, q)^{-1}$ の N 個のマロコフパラメータがおのおのの零に収束することを意味している。これは $M_d(q)$ と $M(\rho, q)$ 、および $S_d(q)$ と $S(\rho_e, q)$ がおのおのの近づくことの間接的な近似ともいえよう。そして、これは本来の目的である $J_{MS_d}(\rho)$ を零に近づけることにも対応することがわかる。

本来ならば、非零になるときの最適パラメータに関する性質や、 $\tilde{J}_{MS_d}(\rho)$ と $J_{MS_d}(\rho)$ の最小化における収束性など、まだ解かなければならない課題は多い。しかしながら、定理 1 や補題 1 は、 $\tilde{J}_{MS_d}(\rho)$ の最適化が十分零に近いところまで行える場合には、本来の目的である $J_{MS_d}(\rho)$ も十分に小さくできることの間接的な保証を与えているといえよう。

3.3 アルゴリズム

以上で述べた、低感度化を目的とした FRIT に基づく 2 自由度制御器のパラメータ調整のアルゴリズムを以下にまとめる。

ステップ 1 初期設定：目標応答伝達関数 $M_d(q)$ 、希望の感度関数 $S_d(q)$ 、初期パラメータ $\rho^0 \in \mathbb{R}^{n_e + n_r}$ を与え、制御器 $C_e(\rho_e^0), C_r(\rho_r^0)$ を実装。

ステップ 2 一回目の実験：参照値 $r \neq 0$ を付加入力 $v = 0$ のもとで印加。そして、入出力データ $u(\rho^0)_{[1,N]}$, $y(\rho^0)_{[1,N]}$ を取得。

ステップ 3 二回目の実験：付加入力 $v \neq 0$ を参照値 $r = 0$ のもとで Fig. 2 のように印加。そして入出力データ $u_v(\rho^0)_{[1,N]}$, $y_v(\rho^0)_{[1,N]}$ を取得。

ステップ 4 上記のステップで得られたデータを用いて $\tilde{J}_{MS_d}(\rho)$ を最小化するパラメータをオフラインのガウスニュートン法により求解。

ステップ 5 $\tilde{\rho}_{MS_d}^* := \argmin_{\rho} \tilde{J}_{MS_d}(\rho)$ を実装。

なお、上記のアルゴリズム中で 2 回の実験で印加する低域で強調された既知の信号 v は再現性をもつものとする。この理由は二つある。まず、一つは運用上の簡便性の理由からであるが、本論文で提案する手法の最大の特徴は、現場調整時においてできるだけ時間をかけない制御器調整を可能にする簡便性にある。よって調整後の評価においても、調整時に用いた低域で強調された同じ信号を印加することで効果を確認することを考えれば、 v の再現性は簡便性という立場では十分に意義があるといえる。もう一つは、プロセス制御系において広く用いられる外乱フィードフォワード制御における測定可能な低周波数帯域での外乱という立場からの理由である。ここで、大抵はある工程での階段状の圧力の変化や温度変化などステップ状の外乱が広く仮定されて用いられており、その意味で低周波数帯域の外乱信号が再現性を持って印加される、という状況は実用上の意味がある。

4. 目標値応答特性と雑音除去特性の向上

4.1 問題設定

つぎに、雑音存在下での目標値応答特性の向上を扱う問題を考えよう。ここで Fig. 3 のように検出雑音 n が存在するものとする。なお、雑音は常に混入するものであるので、ここでは出力や入力を $y^n(\rho)$ や $u^n(\rho)$ のように表記しておく。

まず、目標値応答特性に関する仕様に関しては、2.2

Fig. 3 Two-degree of freedom control system with noise

で述べたように、参照値 r から出力 $y^n(\rho)$ までの目標値
応答伝達関数 $M_d(q)$ を与え、(4) 式と同様に

$$J_{M_d}^n(\rho) := \sum_{t=1}^N (y^n(\rho)_{(t)} - M_d(q)r_{(t)})^2 \quad (24)$$

で定義される評価関数を最小化することを考える。一方
の閉ループの雑音除去特性については、Fig. 3 において、
雑音 n が応答 $y^n(\rho)$ に及ぼす影響は相補感度関数

$$T(\rho_e, q) = \frac{G(q)C_e(\rho_e, q)}{1 + G(q)C_e(\rho_e, q)} \quad (25)$$

によって評価できるので、これに関する所望の特性をも
つ相補感度関数 $T_d(q)$ を与え、参照信号 $r = 0$ の状況で
得た信号を $y_{r0}^n(\rho_e)$ や $u_{r0}^n(\rho_e)$ と表記して

$$J_{T_d}^n(\rho_e) = \sum_{t=1}^N (y_{r0}^n(\rho_e)_{(t)} - T_d(q)n_{(t)})^2 \quad (26)$$

を最小化することを考える。以上の準備のもと、2 自由
度系に対して目標値応答特性と雑音除去特性に関する仕
様を達成させる、以下のような問題を考える。

【問題 2】 Fig. 3 において、目標値応答伝達関数とし
て $M_d(q)$ を、フィードバック系の雑音除去特性の指標と
しての相補感度関数 $T_d(q)$ を与える。このとき

$$\rho_{MT}^* := \operatorname{argmin}_{\rho} (J_{M_d}^n(\rho) + J_{T_d}^n(\rho_e)) \quad (27)$$

を、同定を行うことなく、2 回の実験回数で得た入出力
データより直接求めよ。□

なお、問題設定中で“2 回”としている理由は問題 1 の
ときと同様である。

4.2 FRIT による制御器パラメータ調整

ここでは低感度化と理論的には同様に、FRIT を 2 自
由度に拡張することでその特性を利用し、追従特性と雑
音除去を同時に行うことのできる設計法を提案する。た
だし、雑音 n はこちらで自由に阻止するようなことはで
きず常に混入するものなので、3. における低感度化の
ときに考えた付加的な信号 v とは異なる立場にあることに
注意しておく。

まず一回目の実験として、Fig. 3 について、初期パラ
メータ ρ^0 を設定し、2.2 で述べたように、目標値信号 r
を印加して、初期データ $y^n(\rho^0)_{[1,N]}$ と $u^n(\rho^0)_{[1,N]}$ を取
得する。そして、この初期データを用いて擬似参照信号
を (6) 式と同じく

$$\tilde{r}^n(\rho)_{[1,N]} := \frac{u^n(\rho^0)_{[1,N]} + C_e(\rho_e, q)y^n(\rho^0)_{[1,N]}}{C_r(\rho_r, q) + C_e(\rho_e, q)} \quad (28)$$

のように導入し、評価関数を (7) 式と同様に

$$\tilde{J}_{M_d}^n(\rho) := \sum_{t=1}^N (y^n(\rho^0)_{(t)} - M_d(q)\tilde{r}^n(\rho)_{(t)})^2 \quad (29)$$

のように定義する。

つぎに同一の閉ループ制御器のパラメータ ρ_e^0 を用い、
参照値信号を $r = 0$ として二回目の実験を行い、入力、出
力をそれぞれ $u_{r0}^n(\rho_e^0)_{[1,N]}$, $y_{r0}^n(\rho_e^0)_{[1,N]}$ と表記しておく。
なお、このときは雑音が混入したままなので $n \neq 0$ であ
る。二回目で得られた入出力信号を用いて擬似的な雑音
信号として $\tilde{n}(\rho_e)$ を

$$\tilde{n}(\rho_e)_{[1,N]} = -C_e(\rho_e, q)^{-1}u_{r0}^n(\rho_e^0)_{[1,N]} - y_{r0}^n(\rho_e^0)_{[1,N]} \quad (30)$$

のように計算する。この式から、先ほど与えた $T_d(q)$ を
用いて雑音誤差式を次のように与える。

$$\tilde{\xi}_T(\rho_e)_{[1,N]} = (y_{r0}^n(\rho_e) - T_d(q)\tilde{n}(\rho_e))_{[1,N]} \quad (31)$$

後は低感度化と同様に $T_d(q)$ を用いて評価関数を

$$\tilde{J}_{T_d}(\rho_e) := \sum_{t=1}^N (y_{r0}^n(\rho_e^0)_{(t)} - T_d(q)\tilde{n}(\rho_e)_{(t)})^2 \quad (32)$$

のように定義する。

ここで、問題 2 の (27) 式で挙げた本来最小化したい

$$J_{MT_d}(\rho) := J_{M_d}(\rho) + J_{T_d}(\rho_e) \quad (33)$$

の代わりに、以上のように導入した $\tilde{J}_{M_d}(\rho)$ と $\tilde{J}_{T_d}(\rho_e)$
から構成した

$$\tilde{J}_{MT_d}(\rho) := \tilde{J}_{M_d}(\rho) + \tilde{J}_{T_d}(\rho_e) \quad (34)$$

を最小化することを考える。そこで表記上の準備として

$$\tilde{\xi}^n(\rho)_{[1,N]} := y^n(\rho^0)_{[1,N]} - M_d(q)\tilde{r}^n(\rho)_{[1,N]} \quad (35)$$

$$\tilde{\xi}_T(\rho_e)_{[1,N]} := u_{r0}^n(\rho_e^0)_{[1,N]} - T_d(q)\tilde{n}(\rho_e)_{[1,N]} \quad (36)$$

を与える。そして (34) 式の最小化のために、ガウスニュ
ートン法を用いて、勾配

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{J}_{MT_d}(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho^i} &= \sum_{t=1}^N \tilde{\xi}^n(\rho)_{(t)} \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^n(\rho)}{\partial \rho} \right)_{(t)} \bigg|_{\rho=\rho^i} \\ &+ \sum_{t=1}^N \tilde{\xi}_T(\rho_e)_{(t)} \left(\frac{\partial \tilde{\xi}_T(\rho_e)}{\partial \rho_e} \right)_{(t)} \bigg|_{\rho_e=\rho_e^i} \end{aligned} \quad (37)$$

を用いた更新式

$$\rho^{i+1} = \rho^i - \gamma R_{MT}(\rho^i)^{-1} \left. \frac{\partial \tilde{J}_{MT_d}(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho^i} \quad (38)$$

により逐次計算していく。ここで、 $R_{MT}(\rho)$ は

$$R_{MT}(\rho^i) = \left(\left. \frac{\partial \tilde{J}_{MT_d}(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho^i} \right)^T \left(\left. \frac{\partial \tilde{J}_{MT_d}(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho^i} \right) \quad (39)$$

で計算される Hessian であり、 γ は収束速度を調節する
パラメータである。そして、勾配は

$$\left. \frac{\partial \tilde{\xi}^n(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho^i_{[1,N]}} = \frac{-M_d(q)}{(C_e(\rho_e, q) + C_r(\rho_r, q))^2} \times \left\{ \left(C_r(\rho_r, q) \frac{\partial C_e(\rho_e, q)}{\partial \rho_e} - C_e(\rho_e, q) \frac{\partial C_r(\rho_r, q)}{\partial \rho_r} \right) y^n(\rho^0)_{[1,N]} - \left(\frac{\partial C_e(\rho_e, q)}{\partial \rho_e} + \frac{\partial C_r(\rho_r, q)}{\partial \rho_r} \right) u^n(\rho^0)_{[1,N]} \right\} \Big|_{\rho=\rho^i} \quad (40)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\xi}_T(\rho_e)}{\partial \rho_e} \right|_{\rho_e=\rho_e^i_{[1,N]}} = \frac{-T_d(q)}{C_e(\rho_e, q)^2} \frac{\partial C_e(\rho_e, q)}{\partial \rho_e} \Big|_{\rho_e=\rho_e^i} u_{r0}^n(\rho_e^0)_{[1,N]} \quad (41)$$

を用いることで計算できる。

$\tilde{J}_{MT_d}(\rho)$ に用いる信号は、 $n \neq 0$ として参照値信号 r を印加した一回目の実験データ $y^n(\rho)_{[1,N]}$ と $u^n(\rho)_{[1,N]}$ 、そして $r=0$ として雑音 n のみを考慮した二回目の実験データ $y_{r0}^n(\rho)_{[1,N]}$ と $u_{r0}^n(\rho)_{[1,N]}$ だけであり、パラメータ ρ は制御器のみに関わっている。よって低感度化の場合と同様に、 $\tilde{J}_{MT_d}(\rho)$ を最小化するためにガウスニュートンなどの非線形最適化を行う場合には、更新ごとに勾配や Hessianなどを求めるための実験を必要とはせず、初期の二回の実験のみを用いてオフラインで最適化計算が可能である。そして、オフラインで行う $\tilde{J}_{MT_d}(\rho)$ の最適化と本来の目的の $J_{MT_d}(\rho)$ の最適化の対応について、以下の定理が導かれる。

【定理 2】 Fig. 3 において、 $C_e(\rho_e, q) + C_r(\rho_r, q)$ は可逆であるとし、この可逆性を保持し $G(q)C_e(\rho_e, q) \neq -1$ を満たすようなパラメータ ρ の集合の元 ρ^0 を用いた閉ループ系より、上述の手順で有限データ $y^n(\rho^0)_{[1,N]}$ 、 $u^n(\rho^0)_{[1,N]}$ 、 $y_{r0}^n(\rho^0)_{[1,N]}$ 、 $u_{r0}^n(\rho^0)_{[1,N]}$ が得られたとする。このとき、この集合の中にあるパラメータ ρ' について $\tilde{J}_{MT_d}(\rho')=0$ となるための必要十分条件は $J_{MT_d}(\rho')=0$ である。

(証明) 付録参照。 □

定理 2 も定理 1 と同様、零になるパラメータのみでの最適性の保証であるが、補題 1 同様、その近傍での対応が以下の補題で与えられる。

【補題 2】 定理 2 および補題 1 と同じ仮定と表記に加えて $y^n(\rho^0)_{(1)} \neq 0$ および $y_{r0}^n(\rho^0)_{(1)} \neq 0$ を仮定しよう。さらに、 $\tilde{J}_{MT_d}(\rho)$ は ρ' 近傍で連続と仮定する。このとき、 $\lim_{\rho \rightarrow \rho'} \tilde{J}_{MT_d}(\rho) = 0$ ならば任意の $\epsilon > 0$ に対して、 $\left\{ \sum_{i=0}^{N-1} ((1 - M_d M(\rho)^{-1})_i^2 + ((1 - T_d) - T_d S(\rho_e) T(\rho_e)^{-1})_i^2) < (1/\alpha + 1/\beta)\epsilon \quad \forall \rho \text{ s.t. } \|\rho - \rho'\|_2 < \delta \right\}$ となるような $\delta > 0$ が存在する。ここで α と β は、おのおの $\mathcal{T}_{[1,N]}^{y^n(\rho^0)} \mathcal{T}_{[1,N]}^{y^n(\rho^0)}$ と $\mathcal{T}_{[1,N]}^{y_{r0}^n(\rho^0)} \mathcal{T}_{[1,N]}^{y_{r0}^n(\rho^0)}$ の最小特異値である。

この補題の証明や関連事項は補題 1 のときと同じなのでここでは省略する。補題 2 も補題 1 と同様に、零になるパラメータの近傍における最適性の保証であり、その近傍で $\tilde{J}_{MT_d}(\rho)$ を零に近づけることが、 $1 - M_d(q)M(\rho, q)^{-1}$

と $(1 - T_d) - T_d(q)S(\rho_e, q)T(\rho_e, q)^{-1}$ の N 個のマルコフパラメータがおのおのの零に収束することを意味し、 $M_d(q)$ と $M(\rho, q)$ 、および $T_d(q)$ と $T(\rho_e, q)$ がおのおの近づくことの間接的な近似ともいえる。そして、これは本来の目的である $J_{MT_d}(\rho)$ を零に近づけることにも対応することがわかる。

なお、ここでも低感度化と同様に、最適化に関して解かなければならない課題は多いが、一方で、定理 2 や補題 2 は $\tilde{J}_{MT_d}(\rho)$ の最適化が十分零に近いところまで行える場合には、本来の目的である $J_{MT_d}(\rho)$ も十分に小さくできることの間接的な保証を与えているといえよう。

4.3 アルゴリズム

以上で述べた、雑音除去を目的とした FRIT に基づく 2 自由度制御器のパラメータ調整のアルゴリズムを以下にまとめる。

ステップ 1 初期設定：目標応答伝達関数 $M_d(q)$ 、所望の相補感度関数 $T_d(q)$ 、初期パラメータ $\rho^0 \in \mathbb{R}^{n_e+n_r}$ を与え、制御器 $C_e(\rho_e^0), C_r(\rho_r^0)$ を実装。

ステップ 2 一回目の実験：参照値 $r \neq 0$ を雑音 $n \neq 0$ のもとで印加。そして、入出力データ $u^n(\rho^0)_{[1,N]}$ 、 $y^n(\rho^0)_{[1,N]}$ を取得。

ステップ 3 二回目の実験：参照値 $r=0$ のもとで入出力データ $u_{r0}^n(\rho_e^0)_{[1,N]}$ 、 $y_{r0}^n(\rho_e^0)_{[1,N]}$ を取得。

ステップ 4 上記二ステップで得られたデータを用いて $\tilde{J}_{MT_d}(\rho)$ を最小化するパラメータをオフラインのガウスニュートン法により求解。

ステップ 5 $\hat{\rho}_{MT_d}^* := \argmin_{\rho} \tilde{J}_{MT_d}(\rho)$ を実装。

ここで、高周波成分を多く含むとしている雑音 n に関しては、たとえば、絶えず電源ノイズが混入する、またセンサの特性上ある帯域でピークをもつようなノイズが混入する、という意味での実用上の再現性を想定している。

5. 実験による検証

本論文で提案手法の有効性を台車の位置決め実験を通して検証する。ここで扱う実験装置は Fig. 4 のような台車の位置決め制御系（サーボテクノ(株)製）である。台車はゴムベルト上に固定され取り付けられており、ゴムベルトは片方はサーボモータ、もう片方はプーリに取り付けられていて、モータの回転運動により台車が直線運動を行う。さらに、プーリ内にポテンショメータが取り付けられており、プーリの回転により台車の移動距離が計測できるようになっている。パーソナルコンピュータはポテンショメータからの信号を読み取り、モータに電圧を入力する。サンプリングタイムは 0.01[s] である。ここでは制御器を $\rho^i = [\rho(1)^i \ \rho(2)^i \ \rho(3)^i \ \rho(4)^i]^T$ でパラメータライズされる 2 自由度制御器を使用するものとし、それを Fig. 2 のような形式に変形した次式の制御器を採用

Fig. 7 The one-degree of freedom control system

Fig. 8 The two-degree of freedom control system

6. おわりに

本論文では、FRIT を2自由度系に拡張し、追従特性と低感度化を同時に満たすもの、また追従特性と雑音除去を同時に満たす二つの手法を提案した。さらに、その手法の有効性を示すために、台車を用いて実験的に検証を行った。これまでのFRITで考慮していなかった低感度特性、雑音除去特性という指標を考慮し、その影響と目標値応答特性を双方ともに向上させるような制御器調整をわずか二回の実験で数式モデルを用いることなく実現できるという点で、時間やコストなどの面から非常に有効な手法を提案したといえる。当然、システム同定実験を経て数式モデル構築に基づいた制御器パラメータ調整手法によっても所望のパラメータが得られるであろう。しかしながら、本論文での手法は、現場においてある程度のパラメータが得られているようなときに、それをさらにファインチューニングすることでさらに最適なパラメータを、通常の操業時に扱えるような信号を用いた二回の実験という、可能な限り簡潔な作業により得るという点に優位性をもつことを強調したい。

今後の課題は、最適化の対応が0でしか保証されていないので、参考文献[5]で一自由度系の場合にはデータにプレフィルタを施すことにより非零の場合の対応を保証したことと同様に、2自由度系においても非零の場合

も対応付けるようなプレフィルタの議論を展開していく。また、初期データやパラメータの定量的な選定指針、そして与える実験信号の性質と調整結果の定量的関連性なども検討したい。さらに、実用上の大きな問題である安定性の保証、入力過大現象の抑制、閉ループ系内における感度関数と相補感度関数のトレードオフを図るような調整なども今後の重要な課題として取り組んでいきたい。なお、多入出力系への拡張も、多くの実システムが多入出力系であることを考えると、重要な主題の一つであるので今後の課題として取り組んでいく。一方で、不確かさや物理パラメータ変動に対応することも実用上は避けては通れないであろう。不確かさや変動の大きさの見積もり方および調整の定量的評価や、一般のLFT表現された不確かさなどに対する対処可能性なども今後の重要な課題である。そして、実用例を増やし、応用におけるいくつかの諸問題を明確にし、それらを克服することで、実用性の向上を目指す。

参考文献

- [1] 荒木：2自由度制御系—PID・微分先行型・I-PD制御系の統一的見方などについて；システムと制御，Vol. 29，No. 10，pp. 649–656 (1985)
- [2] M. C. Campi, A. Lecchini and S. M. Savaresi: Virtual Reference Feedback Tuning(VRFT): A direct method for the design of feedback controllers; *Automatica*, Vol. 38, pp. 1337–1346 (2002)
- [3] 広井：2自由度PID制御方式とその応用；計装，Vol. 29，No. 7，pp. 39–43 (1986)
- [4] H. Hjalmarsson, M. Gevers, S. Gunnarsson and O. Lequin: Iterative feedback tuning:Theory and applications; *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 18, pp. 26–41 (1998)
- [5] 金子，吉田，松本，藤井：一回の閉ループ実験データを用いた最小二乗法に基づく制御器パラメータチューニング—FRITの拡張；システム制御情報学会論文誌，Vol. 18，No. 11，pp. 400–409 (2005)
- [6] O. Kaneko, S. Souma and T. Fujii: Fictitious reference iterative tuning in the two-degree of freedom control scheme and its application to a facile closed loop system identification; 計測自動制御学会論文集，Vol. 42，No. 1，pp. 1–9 (2006)
- [7] A. Lecchini, M. Campi and S.M. Savaresi: Virtual Reference Feedback Tuning for two-degree of freedom controllers; *International Journal on Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 16, pp. 355–371 (2002)
- [8] 前田，杉江：アドバンスド制御のためのシステム制御理論，システム制御情報ライブラリー 3，朝倉書店 (1990)
- [9] 大松，山本 編：セルフチューニングコントロール，計測自動制御学会学術図書 (1996)
- [10] 大嶋：プロセス制御システム，コロナ社 (2003)
- [11] M. G. Safonov and T. C. Tsao: The unfalsified control concept and learning; *IEEE Transaction on Au-*

tomatatic Control, Vol. 42, No. 6, pp. 843–847 (1997)

- [12] 重政, 飯野, 神田: 2自由度PIDオートチューニングコントローラ; 計測と制御, Vol. 24, pp. 305–311 (1988)
- [13] 相馬, 金子, 藤井: 一回の実験データに基づく制御器パラメータチューニングの新しいアプローチ—FRITの提案; システム制御情報学会論文誌, Vol. 17, No. 12, pp. 528–536 (2004)
- [14] 須田: PID制御, システム制御情報ライブラリー6, 朝倉書店 (2006)

付 録

付録 1. 定理 1 の証明

まず, $\xi(\rho)_{[1,N]} := y(\rho)_{[1,N]} - M_d(q)r_{[1,N]}$ と表記すると, 参考文献 [6] の定理 1 の証明より,

$$\tilde{\xi}(\rho)_{[1,N]} = \frac{S(\rho_e^0, q) C_r(\rho_r^0, q) + C_e(\rho_e^0, q)}{S(\rho_e, q) C_r(\rho_r, q) + C_e(\rho_e, q)} \xi(\rho)_{[1,N]} \quad (A1)$$

なる関係が成立する. つぎに, $\xi_S(\rho_e)_{[1,N]} := u(\rho_e)_{[1,N]} - S_d(q)v_{[1,N]}$ と表記すると

$$\begin{aligned} \xi_S(\rho_e)_{[1,N]} &= u(\rho_e)_{[1,N]} - S_d(q)v_{[1,N]} \\ &= \left(\frac{1}{1 + G(q)C_e(\rho_e, q)} v - S_d(q)v \right)_{[1,N]} \\ &= \frac{1 - S_d(q) - G(q)C_e(\rho_e, q)S_d(q)}{1 + G(q)C_e(\rho_e, q)} v_{[1,N]} \\ &= S(\rho_e, q) \{1 - S_d(q)S(\rho_e, q)^{-1}\} v_{[1,N]} \quad (A2) \end{aligned}$$

を得る. $\tilde{\xi}_S(\rho_e)$ については以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_S(\rho_e)_{[1,N]} &= u_v(\rho_e^0)_{[1,N]} - S_d(q)\tilde{v}(\rho_e)_{[1,N]} \\ &= \frac{1}{1 + C_e(\rho_e^0)G(q)} v_{[1,N]} \\ &\quad - S_d(q)(u_v(\rho_e^0) + C_e(\rho_e, q)y_v(\rho_e^0))_{[1,N]} \\ &= \left(\frac{1}{1 + C_e(\rho_e^0, q)G(q)} v - \frac{S_d}{1 + C_e(\rho_e^0)G(q)} v \right. \\ &\quad \left. - \frac{G(q)C_e(\rho_e, q)S_d(q)}{1 + C_e(\rho_e^0, q)G(q)} v \right)_{[1,N]} \\ &= S(\rho_e^0, q)(1 - S_d(q)S(\rho_e, q)^{-1})v_{[1,N]} \quad (A3) \end{aligned}$$

(A3) 式に (A2) 式の結果を代入すれば

$$\tilde{\xi}_S(\rho_e)_{[1,N]} = \frac{S(\rho_e^0, q)}{S(\rho_e, q)} \xi_S(\rho_e)_{[1,N]} \quad (A4)$$

を得る. (A1) 式と (A4) 式の関係を用いれば次を得る.

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{MS_d}(\rho') &= 0 \Leftrightarrow \tilde{J}_{M_d}(\rho') + \tilde{J}_{S_d}(\rho'_e) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{t=1}^N (\tilde{\xi}(\rho')_{(t)})^2 = 0 \text{ かつ } \sum_{t=1}^N (\tilde{\xi}_S(\rho'_e)_{(t)})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{t=1}^N (\xi(\rho')_{(t)})^2 = 0 \text{ かつ } \sum_{t=1}^N (\xi_S(\rho'_e)_{(t)})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow J_{M_d}(\rho') + J_{S_d}(\rho'_e) = 0 \Leftrightarrow J_{MS_d}(\rho') = 0 \end{aligned}$$

付録 2. 補題 1 の証明

定理 1 の証明中の最後の関係を ρ' 近傍で考えると

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho'} \tilde{J}_{MS_d}(\rho) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \lim_{\rho \rightarrow \rho'} \sum_{t=1}^N (\tilde{\xi}(\rho)_{(t)})^2 = 0 \text{ かつ } \lim_{\rho \rightarrow \rho'} \sum_{t=1}^N (\tilde{\xi}_S(\rho_e)_{(t)})^2 = 0 \right\} \quad (A5)$$

を得る. まず (A5) 式の右辺の前半 $\lim_{\rho \rightarrow \rho'} \sum_{t=1}^N (\tilde{\xi}(\rho)_{(t)})^2 = 0$ について考える. これは

$$\left\{ \sum_{t=1}^N (\tilde{\xi}(\rho)_{(t)})^2 < \epsilon_M \quad \forall \rho \text{ s.t. } \|\rho - \rho'\|_2 < \delta_M \right\} \quad (A6)$$

を意味することに注意する. $y(\rho^0)_{[1,N]} = G(q)u(\rho^0)_{[1,N]}$ などに注意して, 式変形を施すと,

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(\rho)_{[1,N]} &= \left(y(\rho^0) - M_d(q) \frac{(u(\rho^0) + C_e(\rho_e, q)y(\rho^0))}{(C_e(\rho_e, q) + C_r(\rho_r, q))} \right)_{[1,N]} \\ &= \left(y(\rho^0) - M_d(q) \frac{(u(\rho^0) + C_e(\rho_e, q)G(q)u(\rho^0))}{(C_e(\rho_e, q) + C_r(\rho_r, q))} \right)_{[1,N]} \\ &= \left(1 - M_d(q) \frac{(1 + C_e(\rho_e, q)G(q))}{G(q)(C_e(\rho_e, q) + C_r(\rho_r, q))} \right) y(\rho^0)_{[1,N]} \\ &= (1 - M_d(q)M(\rho, q)^{-1}) y(\rho^0)_{[1,N]} \quad (A7) \end{aligned}$$

を得る. したがって, (A6) 式は,

$$\left\{ \sum_{t=1}^N ((1 - M_d(q)M(\rho, q)^{-1}) y(\rho^0)_{(t)})^2 < \epsilon_M \quad \forall \rho \text{ s.t. } \|\rho - \rho'\|_2 < \delta_M \right\} \quad (A8)$$

とも表される. $\hat{M}(\rho, q) := 1 - M_d(q)M(\rho, q)^{-1}$ とすると, (A8) 式中の $\sum_{t=1}^N ((1 - M_d(q)M(\rho, q)^{-1}) y(\rho^0)_{(t)})^2 < \epsilon_M$ は, 2.2 で述べた Toeplitz 行列の性質を用いることで

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^N \left(\hat{M}(\rho, q) y(\rho^0)_{(t)} \right)^2 \\ &= \left(\hat{M}(\rho, q) y(\rho^0)_{[1,N]} \right)^T \left(\hat{M}(\rho, q) y(\rho^0)_{[1,N]} \right) \\ &= \left(\mathcal{T}_{[1,N]}^{y(\rho^0)} [\hat{M}(\rho)]_{[0, N-1]} \right)^T \left(\mathcal{T}_{[1,N]}^{y(\rho^0)} [\hat{M}(\rho)]_{[0, N-1]} \right) \\ &= \left([\hat{M}(\rho)]_{[0, N-1]}^T \mathcal{T}_{[1,N]}^{y(\rho^0)T} \mathcal{T}_{[1,N]}^{y(\rho^0)} [\hat{M}(\rho)]_{[0, N-1]} \right) < \epsilon_M \quad (A9) \end{aligned}$$

となる. ここで仮定 $y(\rho^0)_{(1)} \neq 0$ から Toeplitz 行列 $\mathcal{T}_{[1,N]}^{y(\rho^0)}$ の対角成分は非零なので正則になり, $\mathcal{T}_{[1,N]}^{y(\rho^0)T} \mathcal{T}_{[1,N]}^{y(\rho^0)}$ も正定になる. この行列の最小特異値 α を用いると, (A9) 式から $\left([\hat{M}(\rho)]_{[0, N-1]}^T [\hat{M}(\rho)]_{[0, N-1]} \right) < \epsilon_M / \alpha$ が成立し, (A8) 式, すなわち (A6) 式は

$$\left\{ \sum_{i=0}^{N-1} (1 - M_d M(\rho)^{-1})_i^2 < \frac{\epsilon_M}{\alpha} \quad \forall \rho \text{ s.t. } \|\rho - \rho'\|_2 < \delta_M \right\} \quad (A10)$$

となる．つぎに (A5) 式の右辺の後半について考える．これも

$$\forall \epsilon_S > 0 \quad \exists \delta_S > 0 \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \sum_{t=1}^N (\tilde{\xi}_S(\rho)_{(t)})^2 < \epsilon_S \quad \forall \rho \text{ s.t. } \|\rho - \rho'\|_2 < \delta_S \right\} \quad (\text{A11})$$

を意味することに注意しよう．同じく，若干の計算より

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_S(\rho_e)_{[1,N]} &= (u_v(\rho_e^0) - S_d(q)\tilde{v}(\rho))_{[1,N]} \\ &= (u_v(\rho_e^0) - S_d(q)(u_v(\rho_e^0) + C_e(\rho_e, q)y_v(\rho_e)))_{[1,N]} \\ &= (u_v(\rho_e^0) - S_d(q)(u_v(\rho_e^0) + C_e(\rho_e, q)P(q)u_v(\rho_e)))_{[1,N]} \\ &= (1 - S_d(q)S(\rho_e, q)^{-1})u_v(\rho_e)_{[1,N]} \end{aligned}$$

を得る．以降は先と全く同様に Toeplitz 行列の性質などを用いることで，(A11) 式は

$$\forall \epsilon_S > 0 \quad \exists \delta_S > 0 \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} (1 - S_d S(\rho_e)^{-1})_i^2 < \frac{\epsilon_S}{\beta} \quad \forall \rho \text{ s.t. } \|\rho - \rho'\|_2 < \delta_S \right\} \quad (\text{A12})$$

となる．(A10) 式と (A12) 式について， ϵ_M と ϵ_S は任意であるので， $\epsilon_M = \epsilon_S = \epsilon$ のように同じ任意の正数をおき，それにより決まる δ_S と δ_M のうち小さい方を δ とおけば，(A10) 式と (A12) 式を加え合わせることで補題の関係を得る．

付録 3. 定理 2 の証明

(A1) 式が定理 1 と同様に成立する．つぎに， $\xi_T(\rho_e)_{[1,N]}$ $= y_{r0}(\rho_e)_{[1,N]} - T_d(q)n_{[1,N]}$ と表記すると

$$\begin{aligned} \xi_T(\rho_e)_{[1,N]} &= (y_{r0}(\rho_e) - T_d(q)n)_{[1,N]} \\ &= \left(-\frac{G(q)C_e(\rho_e, q)}{1 + G(q)C_e(\rho_e, q)}n - T_d(q)n \right)_{[1,N]} \\ &= \left(-\frac{G(q)C_e(\rho_e, q)}{1 + G(q)C_e(\rho_e, q)}n - \frac{T_d(q)}{1 + G(q)C_e(\rho_e, q)}n \right. \\ &\quad \left. - \frac{G(q)C_e(\rho_e, q)T_d(q)}{1 + G(q)C_e(\rho_e, q)}n \right)_{[1,N]} \\ &= -S(\rho_e, q) \times \\ &\quad (G(q)C_e(\rho_e, q) + T_d(q)(1 + G(q)C_e(\rho_e, q)))n_{[1,N]} \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

つぎに， $\tilde{\xi}_T(\rho_e)$ については以下のように計算できる．

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_T(\rho_e)_{[1,N]} &= (y_{r0}(\rho_e^0) - T_d(q)\tilde{n}(\rho_e))_{[1,N]} \\ &= \left(-\frac{G(q)C_e(\rho_e^0, q)}{1 + G(q)C_e(\rho_e^0, q)}n - \frac{C_e(\rho_e^0, q)T_d}{1 + G(q)C_e(\rho_e^0, q)}\frac{1}{C_e(\rho_e, q)}n \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_e(\rho_e^0, q)C_e(\rho_e, q)T_d G(q)}{1 + G(q)C_e(\rho_e^0, q)}\frac{1}{C_e(\rho_e, q)}n \right)_{[1,N]} \\ &= -\frac{C_e(\rho_e^0, q)}{C_e(\rho_e, q)}S(\rho_e^0, q) \times \\ &\quad (G(q)C_e(\rho_e, q) + T_d(q)(1 + G(q)C_e(\rho_e, q)))n_{[1,N]} \quad (\text{A14}) \end{aligned}$$

(A14) 式に (A13) 式の結果を代入すれば

$$\tilde{\xi}_T(\rho_e)_{[1,N]} = \frac{S(\rho_e^0, q)C_e(\rho_e^0, q)}{S(\rho_e, q)C_e(\rho_e, q)}\xi_T(\rho_e)_{[1,N]} \quad (\text{A15})$$

を得る．よって $\tilde{\xi}_T(\rho_e)_{[1,N]}$ も $\xi_T(\rho_e)_{[1,N]}$ で表されることがわかる．(A1) 式と (A14) 式の関係を用いれば次を得る．

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{MT_d}(\rho') &= 0 \Leftrightarrow \tilde{J}_{M_d}(\rho') + \tilde{J}_{T_d}(\rho'_e) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{t=1}^N (\tilde{\xi}(\rho')_{(t)})^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad \sum_{t=1}^N (\tilde{\xi}_T(\rho'_e)_{(t)})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{t=1}^N (\xi(\rho')_{(t)})^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad \sum_{t=1}^N (\xi_T(\rho'_e)_{(t)})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow J_{M_d}(\rho') + J_{T_d}(\rho'_e) = 0 \Leftrightarrow J_{MT_d}(\rho') = 0 \end{aligned}$$