離散時間 $\mathcal{H}_2$ 最適制御問題に対する精度保証付き計算*

管野 政明[†]・内山 裕貴[‡]・原 辰次[‡]

Guaranteed Accuracy Computation for Discrete-time $\mathcal{H}_2$ Optimal Control*

Masaaki KANNO[†], Yuki UCHIYAMA[‡] and Shinji HARA[‡]

1. はじめに

著者らは、数式処理と区間演算を適切に組み合わせて構成されるハイブリッド精度保証付き計算アルゴリズムが、ある種の制御問題の精度保証付き計算に対して有効であることを示している [1–3]。しかし、これらはすべて連続時間系に対するもので、離散時間系に対して同様のアプローチが有効であるかは明らかではない。

連続時間の結果が得られている場合、離散時間の結果を得るアプローチの一つとして、与えられた離散時間系を双一次変換を用いて連続時間系に変換し、連続時間に対するアルゴリズムを用いて解を求め、それを再び双一次変換で離散時間領域へ戻すという手法が考えられる。しかしながら、 $\mathcal{H}_2$ ノルムは双一次変換で保存されないため、このアプローチを離散時間 $\mathcal{H}_2$ 制御問題に直接適用することはできない。また、離散時間領域内での計算のみで精度保証付き計算を実現することは原理的には可能であるが、実用的な精度保証付きアルゴリズムの構築が容易でない。その理由は、連続時間系の場合に成功していた、通常の数値計算と精度保証付き計算を組み合わせる高速計算アプローチ [5] を、離散時間系に対して実現することが難しいからである。

そこで本速報では、双一次変換が有効に機能する部分に対してはそれを適用することにより、連続時間の効率的な精度保証付き多項式スペクトル分解（正規化既約分解）アルゴリズムを利用し、それ以外の部分は離散時間領域で計算を行うという、離散・連続『ハイブリッド』な精度保証アプローチを提案する（Fig. 1 参照）。

Fig. 1 Hybrid approach to discrete-time guaranteed accuracy computation

Fig. 2 Unity feedback tracking system

なお、本速報では以下、離散時間に対応する伝達関数・多項式等には添え字 $_d$ をつけ、連続時間のものには $_c$ をつけて表記する。

2. 離散時間 $\mathcal{H}_2$ 最適追従性能: 問題設定

本速報では、離散時間 $\mathcal{H}_2$ 制御問題の一つとして、[1] で考慮した $\mathcal{H}_2$ 最適追従制御問題の離散時間系版を取り上げ、その最適性能値の精度保証付き計算を考える。なお、さまざまな $\mathcal{H}_2$ 最適制御問題も、正規化既約分解を用いることにより解くことが可能であり、本速報の手法の適用範囲は広いと考えられる。

Fig. 2 において、 $P_d(z)$ は一入力一出力の線形な離散時間制御対象で、 $K_d(z)$ は設計される制御器とする。 $r[k]$,

* 原稿受付 2007 年 6 月 15 日

[†] CREST, 科学技術振興機構 CREST, Japan Science and Technology Agency; 4-1-8, Honcho, Kawaguchi-shi, Saitama 332-0012, JAPAN

[‡] 東京大学 大学院 情報理工学系研究科 Graduate School of Information Science and Technology, The University of Tokyo; 7-3-1, Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656, JAPAN

Key Words: discrete time $\mathcal{H}_2$ control, guaranteed accuracy computation, bilinear-transformation.

$u[k], y[k], e[k] := r[k] - y[k]$ はそれぞれ参照信号, 制御入力, プラント出力, 偏差信号である. また, 参照信号は単位ステップ信号とする. 初期状態零の仮定のもと,

$$J_d := \sum_{k=0}^{\infty} (|e[k]|^2 + |u[k]|^2)$$

で表わされる 2 次形式評価関数を用いる. このとき,

$$J_d^* = \inf_{K_d \text{ stabilizing}} J_d$$

を求める問題を考える. ここで, 連続時間の場合 [1] と同様, $P_d(z)$ に対して以下の仮定をおく. (1) 積分器が P_d に一つ含まれていて, それを除くと P_d は安定である. (2) P_d は $z=1$ に零点をもたない. このとき, J_d^* は以下のように表現できる. なお, 証明は連続時間系の場合とはほぼ同様であるので, 紙面の都合上省略する.

【定理 1】 $P_d(z) = N_d(z)/M_d(z)$ を P_d の正規化既約分解とする¹. このとき, 以下が成立する.

$$J_d^* = \left\| \begin{bmatrix} N_d(z) - N_d(1) M_d(z) \\ M_d(z) \end{bmatrix} \frac{1}{z-1} \right\|_2^2 \quad (1)$$

この結果は, J_d^* を求めるためには以下の二つの手続きを行えばよいことを示している.

- $P_d(z)$ の正規化既約分解を求める.
- $N_d(z), M_d(z)$ の状態空間表現を用いて, Lyapunov 方程式を解いて, (1) 式の $\mathcal{H}_2$ ノルムを計算する.

次節にて, 上記の二つのことが精度保証付きで計算可能であることを示す.

3. 最適性能値の精度保証付き計算

3.1 連続時間多項式スペクトル分解を用いた離散時間の正規化既約分解

一入力一出力離散時間系の正規化既約分解は, 原理的には以下のように多項式スペクトル分解を行うことによって可能である. n 次の系が既約な伝達関数

$$P_d(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0} =: \frac{P_{dN}(z)}{P_{dD}(z)}$$

で与えられたとし, $M_{dD}(z)$ を以下の多項式スペクトル因子とする.

$$\begin{aligned} M_{dD}(z) M_{dD}(1/z) \\ = P_{dN}(z) P_{dN}(1/z) + P_{dD}(z) P_{dD}(1/z) \end{aligned} \quad (2)$$

ℓ を適切な非負の整数とすると, $z^\ell M_{dD}(z)$ は n 次の多項式となり, これを改めて $M_{dD}(z)$ とおくことにより,

$$M_{dD}(z) = m_n z^n + m_{n-1} z^{n-1} + \cdots + m_0 \quad (m_n \neq 0) \quad (3)$$

と書け, これを用いると, $P_d(z)$ の正規化既約因子は,

¹ $N_d(z), M_d(z)$ は $\mathcal{RH}_\infty$ に属し, かつ, $N_d(z)N_d(1/z) + M_d(z)M_d(1/z) = 1$.

$N_d(z) = P_{dN}(z)/M_{dD}(z), M_d(z) = P_{dD}(z)/M_{dD}(z)$ となる. よって, (2) 式 of 多項式スペクトル分解を精度保証付きで行えれば, 正規化既約分解が精度保証付きで得られる.

連続時間系の正規化既約分解を求める際にも今述べたように, 多項式スペクトル分解に帰着させ, 多項式スペクトル分解を精度保証付きで行うことにより, 正規化既約因子を精度保証付きで計算可能であった. さらに, 平均的な計算コストを低減させつつ, 精度を保証するという目的のために, 通常の数値計算を併用するアプローチが提案されている [2]. そこでは, まず計算コストの低い, 通常の数値計算を用いて計算を行い, その結果の精度を Kharitonov の定理 [4] および Krawczyk-Moore 法 [7] を用いて厳密に精度保証付きで評価し, 十分な精度があると判断されたときには, 通常の数値計算の結果を以降の計算に使用する. そうでない場合には, 最初から時間をかけて精度保証付き計算を行う.

離散時間系の場合は, Kharitonov の定理に対応する結果も得られてはいるが (たとえば, [6]), 限定的で以下のような問題点がある.

- 調べるべき端点多項式の数が, 区間多項式の次数が増えるに従って増える (計算時間の増大).
- 区間多項式の係数の範囲そのものではなく, それらを組み合わせたものの範囲に関し, 条件が述べられている (保守性の増大により, 厳密計算の頻度の増加).
- 調べるべき多項式の係数に三角関数が現れる (精度保証が困難になる).

すなわち, 通常の数値計算アルゴリズムと精度保証付き計算を組み合わせたアルゴリズムの構築は, 連続時間系と比較すると難しくなっている.

そこで, 本速報では, 連続時間の多項式スペクトル分解アルゴリズムを採用する, 「離散時間の精度保証付き正規化既約分解アルゴリズム」を提案する. これは, 離散時間系 $P_d(z)$ の正規化既約因子が, $P_d(z)$ を双一次変換して得られる連続時間系 $P_c(s) := P_d\left(\frac{1+s}{1-s}\right)$ の正規化既約因子 $N_c(s), M_c(s)$ を双一次変換したもの

$$N_d(z) := N_c\left(\frac{z-1}{z+1}\right), \quad M_d(z) := M_c\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

と一致するという結果を利用している (Fig. 1 参照). これにより, 効率的な連続時間のアルゴリズムを利用することが可能となる.

ここで, 以下のことに留意する.

- 離散時間系のプラント $P_d(z)$ の係数が有理数として与えられたとき, Maple などの数式処理システムを用いれば, 双一次変換により得られる連続時間系のプラント $P_c(s)$ の係数は有理数として厳密に求まる.
- 双一次変換により, 連続時間系の正規化既約因子 $N_c(s), M_c(s)$ の係数と離散時間系の正規化既約因

子 $N_d(z)$, $M_d(z)$ のそれとは簡単な一次変換の関係付けがされる．とくに, $N_c(s)$ (または $M_c(s)$) の分母の係数が区間として求まっている場合, 区間演算を用いることにより $M_{dD}(z)$ の係数も区間として簡単に求まる．

- 以上のことおよび, $N_c(s)$ (または $M_c(s)$) の分母の係数が精度保証付きで求められることより, $M_{dD}(z)$ の係数も精度保証付きで求められることがいえる．

3.2 最適追従性能の表現

前項で $M_{dD}(z)$ の係数 m_k の値が精度保証付きで計算できることがわかった．本項では, J_d^* が m_k の有理式として表現でき, その結果, J_d^* も精度保証付きで計算することが可能であることを述べる．まず, $M_{dD}(z)$ を (3) 式で表わした場合, 以下のような表現が得られる．

【定理 2】 $\mathcal{H}_2$ 追従制御問題の評価関数の最適値は,

$$J_d^* = \text{tr}\{B_{n1}^* L_o B_{n1}\} + \text{tr}\{B_{n2}^* L_o B_{n2}\} \quad (4)$$

と書くことができる．ただし,

$$A_n = \begin{bmatrix} -m_{n-1}/m_n & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -m_{n-2}/m_n & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ -m_1/m_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -m_0/m_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{n1} = \begin{bmatrix} b_n - m_n b_{\text{sum}}/m_{\text{sum}} \\ b_n + b_{n-1} - (m_n + m_{n-1})b_{\text{sum}}/m_{\text{sum}} \\ \vdots \\ \sum_{j=2}^n b_j - (\sum_{k=2}^n m_k)b_{\text{sum}}/m_{\text{sum}} \\ \sum_{j=1}^n b_j - (\sum_{k=1}^n m_k)b_{\text{sum}}/m_{\text{sum}} \end{bmatrix},$$

$$B_{n2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + a_{n-1} \\ \vdots \\ 1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i \\ 1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \end{bmatrix}, \quad C_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_{\text{sum}} = \sum_{j=0}^n b_j, \quad m_{\text{sum}} = \sum_{k=0}^n m_k$$

であり, L_o は Lyapunov 方程式

$$A_n^* L_o A_n - L_o + C_n^* C_n = 0 \quad (5)$$

の唯一解で, $[\ell_1 \ \ell_2 \ \cdots \ \ell_n]$ を第 1 行要素とする対称な Toeplitz 行列の形をしている．

紙面の都合上, 証明は省略するが, 上記の結果は, A_n 等の表現が a_i, b_j, m_k によって陽に表わされることを示している．すなわち, A_n 等の計算に時間がかからず, 計算時間の短縮が達成される．

J_d^* が精度保証付きで計算可能であることは, 以下のことよりわかる．(5) 式は, 係数が A_n, C_n の要素の多項式である, ℓ_i に関する連立一次多項式と等価であり, したがって, 数式処理を用いて (5) 式を厳密に解くことにより, ℓ_i は m_k の有理式で表わされる．さらに, (4) 式より, J_d^* も m_k に関する有理式で書けることが示せる．

3.1 で示した通り, m_k は精度保証付きで計算可能であるので, J_d^* も精度保証付きで計算できる．

4. おわりに

本速報では, 離散時間 $\mathcal{H}_2$ 最適制御問題に対する精度保証付き計算アプローチを提案した．離散時間の場合も原理的には, 連続時間の場合同様のアルゴリズムの構築は可能ではあるが, 連続時間の場合に達成されていた高速化を用いることは難しい．本速報では, 双一次変換が有効に機能する部分に関してそれを利用し, 連続時間の高速アルゴリズムを有効に活用することにより効率化を図るアプローチを提案した．

参考文献

- [1] 管野, 原: $\mathcal{H}_2$ 最適追従制御設計問題の精度保証付き計算アルゴリズム; 計測自動制御学会論文集, Vol. 43, No. 2, pp. 102–109 (2007)
- [2] M. Kanno and M. C. Smith: Guaranteed accuracy computations in systems and control; *Proceedings of ECC 2003* (2003)
- [3] M. Kanno and M. C. Smith: Validated numerical computation of the $\mathcal{L}_\infty$ -norm for linear dynamical systems; *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 41, No. 6, pp. 697–707 (2006)
- [4] 木村, 藤井, 森: ロバスト制御, コロナ社 (1994)
- [5] W. Krandick and S. Rump: Special issue on validated numerical methods and computer algebra: Foreword of the guest editors; *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 24, No. 6, pp. 625–626 (1997)
- [6] M. Mansour, F. Kraus and B. D. O. Anderson: Strong Kharitonov theorem for discrete systems; *Proceedings of the 27th IEEE CDC*, pp. 106–111 (1988)
- [7] 大石: 精度保証付き数値計算, コロナ社 (2000)