プラグフロー反応方程式の可到達性・可観測性について*

佐野 英樹†

On Reachability and Observability of a Plug-Flow Reactor Equation*

Hideki SANO†

This paper is concerned with the problems of reachability and observability of a plug-flow reactor equation. It is shown that the system with boundary inputs is formulated as an well-defined boundary control system, and that it is reachable through a concrete expression of the solution. In addition, the reachable subspace is characterized for the case where only one boundary input is added to the system. Furthermore, the results concerning observability are derived through a concrete expression of the solution to the dual system of the plug-flow reactor equation with the output equation.

1. はじめに

本論文では、化学反応 $C_1 \rightarrow bC_2$ を表す動的モデルの中で、最も基本的なプラグフロー反応方程式を取り上げ、可到達性ならびに可観測性について考察する。ここで、 C_1 は反応物、 C_2 は生成物、 b は反応の化学量論係数である。文献 [5] の中で詳細に記されているように、この化学反応は拡散の影響まで考慮してモデル化すると、二つの移流拡散方程式によって記述される（付録を参照）。特に拡散係数が十分小さく無視できる場合、それはプラグフロー反応モデルとよばれる [5]。本論文では、反応器の長さを 1、流体の空塔速度を 1 と正規化したプラグフロー反応モデルを取り上げる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial t}(t, x) &= -\frac{\partial z_1}{\partial x}(t, x) - a_1 z_1(t, x), \\ \frac{\partial z_2}{\partial t}(t, x) &= -\frac{\partial z_2}{\partial x}(t, x) + a_2 z_1(t, x), \\ (t, x) &\in (0, \infty) \times [0, 1], \\ z_1(t, 0) &= u_1(t), \quad z_2(t, 0) = u_2(t), \quad t \in (0, \infty), \\ z_1(0, x) &= z_{10}(x), \quad z_2(0, x) = z_{20}(x), \quad x \in [0, 1] \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $z_1(t, x), z_2(t, x) \in \mathbf{R}$ はそれぞれ時刻 t , 位置 $x \in [0, 1]$ における物質 C_1, C_2 の濃度を表し、 $u_1(t), u_2(t) \in \mathbf{R}$ は制御入力を表す。また、 a_1, a_2 は反応プロセスに依存した正の定数である（付録を参照）。

文献 [5] では、システム (1) に対する近似システムが $u_2 \equiv 0$ のとき、状態空間の非負錐に関して可到達となることが、状態作用素の随伴作用素によって生成される C_0 -半群を用いて示されている。また、出口での物質 C_1, C_2 の濃度 $z_1(t, 1), z_2(t, 1)$ がともに測定可能ならば可観測であり、 $z_2(t, 1)$ のみが測定可能ならば状態空間の非負錐に関して可観測となることも、近似システムに対して示されている。本論文では、文献 [5] とは対照的に、元のシステムを近似することなしに可到達性ならびに可観測性について議論する。一見、厳密な取り扱いをすることにより、システムの定式化および解析が難しくなるように見えるが、以下のように、近似システムに対するよりも意味深い結果が得られる。

- システム (1) に特性微分方程式の手法を適用することによって解が求まり、それを基にして可到達部分空間が具体的に定まる。
- システム (17), (18) の双対システム (25) に対しても同様に解が求まり、それを基にして不可観測部分空間が具体的に定まる。

本論文の構成は以下のとおりである。2. では、境界入力をもつプラグフロー反応方程式が、Curtain and Zwart[1] の Definition 3.3.2 の意味で well-defined な境界制御系として定式化できることを示す。3. では、そ

* 原稿受付 2007 年 1 月 29 日

† 鹿児島大学 学術情報基盤センター Computing and Communications Center, Kagoshima University; 1-21-35 Korimoto, Kagoshima 890-0065, JAPAN

Key Words: plug-flow reactor equation, reachability, observability, C_0 -semigroup, characteristic differential equation.

の方程式の解の具体的な表現を通して、システムが可到達となることを示す。また、一方の境界入力のみがシステムに加わる場合に対して可到達部分空間を与える。4. では、出口での物質の濃度がともに測定可能ならば可観測となることを示す。さらに、一方の物質の濃度のみが測定可能となすときの不可観測部分空間を与える。5. では、admissible observation operator の概念 (Curtain[2] の Definition 2.2) を取り入れ、可到達性および可観測性に関する結果に対して別証明を与える。最後に、6. で全体をまとめる。

2. 境界制御系

本節では、システム (1) が文献 [1] の Definition 3.3.2 の意味で well-defined な境界制御系

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= \mathfrak{A}z(t), \quad z(0) = z_0 \\ \mathfrak{B}z(t) &= u(t) \end{aligned} \quad (2)$$

を定義することを示す。ここで $z(t) := [z_1(t, \cdot), z_2(t, \cdot)]^T$, $u(t) := [u_1(t), u_2(t)]^T$ である。そのために、はじめに内積

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_X &:= \int_0^1 \{f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)\} dx, \\ f &= [f_1, f_2]^T \in X, g = [g_1, g_2]^T \in X \end{aligned}$$

を有するヒルベルト空間 $X := [L^2(0, 1)]^2$ を導入する。非有界作用素 $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ を

$$\begin{aligned} (Af)(x) &= \begin{bmatrix} -\frac{d}{dx} - a_1 & 0 \\ a_2 & -\frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}, \\ f &= [f_1, f_2]^T \in D(A) \\ D(A) &= \{f = [f_1, f_2]^T \in [H^1(0, 1)]^2; \\ &\quad f_1(0) = 0, f_2(0) = 0\} \end{aligned} \quad (3)$$

のように定義すると、作用素 A は X において C_0 -半群 e^{tA} を生成する。 e^{tA} の具体的な表現は以下のとおりである [5]。

- $x < t$ の場合

$$(e^{tA} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix})(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

- $x \geq t$ の場合

$$(e^{tA} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix})(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(t)z_1(x-t) \\ \phi_2(t)z_1(x-t) + z_2(x-t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここで

$$\phi_1(t) := e^{-a_1 t}, \quad \phi_2(t) := \frac{a_2}{a_1}(1 - e^{-a_1 t})$$

である。(4), (5) 式から、 C_0 -半群 e^{tA} は性質 $e^{tA} = 0 (t \geq 1)$ をもつことは明らかである。ここで e^{tA} は nilpotent-

半群とよばれている [3]。それゆえに、 e^{tA} の growth bound は $-\infty$ となるので、システム (1) は制御入力を加えることなしに super-stable である。

いま、状態作用素 $\mathfrak{A}: D(\mathfrak{A}) \subset X \rightarrow X$ および境界作用素 $\mathfrak{B}: D(\mathfrak{B}) \subset X \rightarrow \mathbf{R}^2$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}f &= \begin{bmatrix} -\frac{df_1}{dx} - a_1 f_1 \\ a_2 f_1 - \frac{df_2}{dx} \end{bmatrix}, \\ f &= [f_1, f_2]^T \in D(\mathfrak{A}) = [H^1(0, 1)]^2 \\ \mathfrak{B}f &= [f_1(0), f_2(0)]^T, \\ f &= [f_1, f_2]^T \in D(\mathfrak{B}) = D(\mathfrak{A}) \end{aligned}$$

そのとき、作用素 $\mathfrak{A}$ の定義域を $D(\mathfrak{A}) \cap \ker \mathfrak{B}$ に制限すると A に等しくなる。ゆえに、定義域を制限された $\mathfrak{A}$ は C_0 -半群を生成する。ここで、有界作用素 $B \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, X)$ を

$$Bu = \begin{bmatrix} (1-x)u_1 \\ (1-x)u_2 \end{bmatrix}, \quad u = [u_1, u_2]^T \in \mathbf{R}^2$$

のように定義すると、 $Bu \in D(\mathfrak{A}) = D(\mathfrak{B}), \forall u \in \mathbf{R}^2$ および

$$\mathfrak{B}Bu = \mathfrak{B} \begin{bmatrix} (1-x)u_1 \\ (1-x)u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-0)u_1 \\ (1-0)u_2 \end{bmatrix} = u, \quad u \in \mathbf{R}^2$$

が従う。さらに

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}Bu &= \mathfrak{A} \begin{bmatrix} (1-x)u_1 \\ (1-x)u_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1 - a_1(1-x)u_1 \\ u_2 + a_2(1-x)u_1 \end{bmatrix} \in X, \quad u \in \mathbf{R}^2 \end{aligned}$$

に注意すると $\mathfrak{A}B \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, X)$ が従う。このようにして、システム (1) は文献 [1] の Definition 3.3.2 の意味で well-defined な境界制御系を定義することがわかる。

文献 [1] の Chapter 3 より、システム (2) の可到達部分空間は

$$\begin{aligned} R_b &= S^a, \\ S &:= \left\{ f \in X; \exists \tau > 0, \exists u \in H^1(0, \tau; \mathbf{R}^2) \text{ s.t.} \right. \\ &\quad \left. \begin{aligned} u(0) &= 0, \\ f &= Bu(\tau) + \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} \mathfrak{A}Bu(s) ds \\ &\quad - \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B\dot{u}(s) ds \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

のように表される。ここで、 S^a は集合 S の閉包を示す。特に $R_b = X$ のとき、システム (2) (すなわち、システム (1)) は可到達とよばれる。

3. 可到達性

システム (2) の可到達部分空間を、抽象的な表現 (6) に基づいて直接的に求めるのは難しいので、本論文ではシステム (1) の解を特性微分方程式の手法に従って計算し、その後に可到達性に関する結果を述べる。

まずはじめに、システム (1) のつぎの部分に着目しよう。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial z_1}{\partial x}(t, x) &= -a_1 z_1(t, x), \\ (t, x) &\in (0, \infty) \times [0, 1] \\ z_1(t, 0) &= u_1(t), \quad t \in (0, \infty) \end{aligned}$$

このとき、その特性微分方程式は

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{1} = \frac{dz_1}{-a_1 z_1}$$

によって与えられ、これを解くと

$$z_1(t, x) = u_1(t - x)e^{-a_1 x} \quad (7)$$

を得る。つぎに

$$\phi(t, x) := a_2 z_1(t, x) + a_1 z_2(t, x) \quad (8)$$

を定義すると、システム (1) から次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) &= 0, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times [0, 1] \\ \phi(t, 0) &= \alpha(t), \quad t \in (0, \infty) \end{aligned}$$

ここで $\alpha(t) := a_2 u_1(t) + a_1 u_2(t)$ である。そのとき、上と同様にして

$$\phi(t, x) = \alpha(t - x) \quad (9)$$

を得る。ここで、(7)~(9) 式を組み合わせることにより、システム (1) の解は

$$\begin{aligned} z_1(t, x) &= e^{-a_1 x} u_1(t - x) \\ z_2(t, x) &= \frac{a_2}{a_1} (1 - e^{-a_1 x}) u_1(t - x) + u_2(t - x) \end{aligned} \quad (10)$$

と求まる。そのとき、つぎの定理が成立する。

【定理 1】 システム (2) (すなわち、システム (1)) は可到達である。言い換えれば、 $R_b = X$ が成り立つ。

(証明) はじめに、各 $[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2]^T \in [H^1(0, 1)]^2$ と任意に固定された $\tau > 1$ に対して

$$z_1(\tau, x) = \tilde{z}_1(x), \quad z_2(\tau, x) = \tilde{z}_2(x) \quad (11)$$

なる $u \in H^1(0, \tau; \mathbf{R}^2)$, $u(0) = 0$ が存在することを示す。(11) 式は次式に等価である。

$$\begin{aligned} u_1(\tau - x) &= e^{a_1 x} \tilde{z}_1(x) \\ u_2(\tau - x) &= \frac{a_2}{a_1} (1 - e^{a_1 x}) \tilde{z}_1(x) + \tilde{z}_2(x) \end{aligned}$$

各 $i = 1, 2$ に対して、 $\zeta_i \in H^1(0, \tau)$ を $\tilde{z}_i \in H^1(0, 1)$ の

$$\zeta_i|_{[0, 1]} = \tilde{z}_i, \quad \zeta_i(\tau) = 0$$

なる拡張としよう。ここで、入力を

$$\begin{aligned} u_1(t) &= e^{a_1(\tau-t)} \zeta_1(\tau-t) \\ u_2(t) &= \frac{a_2}{a_1} (1 - e^{a_1(\tau-t)}) \zeta_1(\tau-t) + \zeta_2(\tau-t) \end{aligned} \quad (12)$$

とおくと、 $u_1 \in H^1(0, \tau; \mathbf{R})$, $u_1(0) = 0$ ならびに $u_2 \in H^1(0, \tau; \mathbf{R})$, $u_2(0) = 0$ が従う。さらに、(11) 式が (12) 式で与えられる入力 $u_1(t), u_2(t)$ を選ぶことによって満たされることがわかる。このことは、システム (1) に $u \in H^1(0, \tau; \mathbf{R}^2)$, $u(0) = 0$ なる入力 (ただし $\tau > 1$) を与えることによって、状態 z_1, z_2 が到達可能な範囲が $[H^1(0, 1)]^2$ となることを示している。

つぎに、包含関係 $[H^1(0, 1)]^2 \subset S$ を示そう。各 $[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2]^T \in [H^1(0, 1)]^2$ に対して、(12) 式で与えられる入力を加える。このとき、上で述べたように

$$z_1(\tau, x) = \tilde{z}_1(x), \quad z_2(\tau, x) = \tilde{z}_2(x)$$

が達成され、入力は $u_1 \in H^1(0, \tau; \mathbf{R})$, $u_1(0) = 0$ および $u_2 \in H^1(0, \tau; \mathbf{R})$, $u_2(0) = 0$ を満足する。さらに、集合 S の定義式に含まれる

$$\int_0^\tau e^{(\tau-s)A} \mathfrak{A} B u(s) ds - \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B \dot{u}(s) ds$$

の部分に着目し、計算していくと

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} \mathfrak{A} B u(s) ds - \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B \dot{u}(s) ds \\ &= \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} (\mathfrak{A} B u(s) - B \dot{u}(s)) ds \\ &= \int_0^\tau e^{tA} \left[\frac{e^{a_1 t} \{ \zeta_1(t) + (1-x) \dot{\zeta}_1(t) \}}{\frac{a_2}{a_1} (1 - e^{a_1 t}) \{ \zeta_1(t) + (1-x) \dot{\zeta}_1(t) \} + \{ \zeta_2(t) + (1-x) \dot{\zeta}_2(t) \}} \right] dt \\ &= \int_0^x \left[\frac{\zeta_1(t) + (1-x+t) \dot{\zeta}_1(t)}{\zeta_2(t) + (1-x+t) \dot{\zeta}_2(t)} \right] dt \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{z}_1(x) \\ \tilde{z}_2(x) \end{bmatrix} - B u(\tau) \end{aligned}$$

となる。以上のことから $[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2]^T \in S$ が従う。このようにして、 $[H^1(0, 1)]^2 \subset S$ が成立することがわかるので、両辺の閉包をとることにより、 $X \subset R_b$, すなわち $R_b = X$ が導出できる。□

つぎに、一つの境界入力のみがシステムに加わった場合の可到達部分空間を特徴付けよう。 $u_2 \equiv 0$ の場合は、境界制御系は

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= \hat{\mathfrak{A}} z(t), \quad z(0) = z_0 \\ \hat{\mathfrak{B}} z(t) &= u_1(t) \end{aligned} \quad (13)$$

と定式化できる。ここで $z(t) := [z_1(t, \cdot), z_2(t, \cdot)]^T$ であ

る. このとき, システム (13) の可到達部分空間は以下のように表される.

$$\begin{aligned} \hat{R}_b &= \hat{S}^a, \\ \hat{S} &:= \left\{ f \in X; \exists \tau > 0, \exists u_1 \in H^1(0, \tau; \mathbf{R}) \quad \text{s.t.} \right. \\ &\quad u_1(0) = 0, \\ &\quad \left. f = \hat{B}u_1(\tau) + \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} \hat{\mathfrak{A}} \hat{B}u_1(s) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} \hat{B} \dot{u}_1(s) ds \right\} \end{aligned}$$

ここで, 作用素 A は (3) 式によって定義され, 他の作用素はつぎのように定義されている.

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{A}}f &= \begin{bmatrix} -\frac{df_1}{dx} - a_1 f_1 \\ a_2 f_1 - \frac{df_2}{dx} \end{bmatrix}, \quad f = [f_1, f_2]^T \in D(\hat{\mathfrak{A}}), \\ D(\hat{\mathfrak{A}}) &= \{ f = [f_1, f_2]^T \in [H^1(0, 1)]^2; f_2(0) = 0 \}, \\ \hat{\mathfrak{B}}f &= f_1(0), \quad f = [f_1, f_2]^T \in D(\hat{\mathfrak{B}}) = D(\hat{\mathfrak{A}}), \\ \hat{B}u_1 &= \begin{bmatrix} (1-x)u_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_1 \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

このとき, つぎの定理が成立する.

【定理 2】 システム (13) (すなわち, $u_2 \equiv 0$ としたシステム (1)) を考える. そのとき

$$\hat{R}_b = \left\{ \left[\varphi, \frac{a_2}{a_1} (e^{a_1(\cdot)} - 1) \varphi \right]^T \in X; \varphi \in L^2(0, 1) \right\} \quad (14)$$

が成立する.

(証明) $u_2 \equiv 0$ のとき, システム (1) の解は (10) 式から

$$\begin{aligned} z_1(t, x) &= e^{-a_1 x} u_1(t - x), \\ z_2(t, x) &= \frac{a_2}{a_1} (1 - e^{-a_1 x}) u_1(t - x) \end{aligned} \quad (15)$$

となる. 定理 1 の証明と同様の議論により, 各 $\tilde{z}_1 \in H^1(0, 1)$ と任意に固定された $\tau > 1$ に対して, $z_1(\tau, x) = \tilde{z}_1(x)$ なる $u_1 \in H^1(0, \tau; \mathbf{R})$, $u_1(0) = 0$ が存在することを示せる. 具体的には

$$u_1(t) = e^{a_1(\tau-t)} \zeta_1(\tau - t) \quad (16)$$

とすればよい. ただし, $\zeta_1 \in H^1(0, \tau)$ は $\tilde{z}_1 \in H^1(0, 1)$ の

$$\zeta_1|_{[0, 1]} = \tilde{z}_1, \quad \zeta_1(\tau) = 0$$

なる拡張である. ここで, (15) 式において $t = \tau$ とおき, u_1 を消去すると

$$z_2(\tau, x) = \frac{a_2}{a_1} (e^{a_1 x} - 1) \tilde{z}_1(x)$$

を得る. このことは, $u_2 \equiv 0$ としたシステム (1) に $u_1 \in H^1(0, \tau; \mathbf{R})$, $u_1(0) = 0$ なる入力 (ただし $\tau > 1$) を与えることによって, 状態 z_1, z_2 が到達可能な範囲が

$$\hat{T} = \left\{ \left[\varphi, \frac{a_2}{a_1} (e^{a_1(\cdot)} - 1) \varphi \right]^T \in X; \varphi \in H^1(0, 1) \right\}$$

となることを示している. この $\hat{T}$ が実は $\hat{S}$ に等しくなるが, これを以下のようにして示すことができる.

はじめに, 包含関係 $\hat{T} \subset \hat{S}$ から示そう. 各 $f \in \hat{T}$ は $f = [\tilde{z}_1, \frac{a_2}{a_1} (e^{a_1(\cdot)} - 1) \tilde{z}_1]^T$, $\tilde{z}_1 \in H^1(0, 1)$ と表せるが, これに対して (16) 式で与えられる入力を加えると

$$z_1(\tau, x) = \tilde{z}_1(x), \quad z_2(\tau, x) = \frac{a_2}{a_1} (e^{a_1 x} - 1) \tilde{z}_1(x)$$

が達成される. また, 入力 $u_1 \in H^1(0, \tau; \mathbf{R})$, $u_1(0) = 0$ を満たしている. ここで, 集合 $\hat{S}$ の定義式における

$$\int_0^\tau e^{(\tau-s)A} \hat{\mathfrak{A}} \hat{B}u_1(s) ds - \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} \hat{B} \dot{u}_1(s) ds$$

の部分に着目すると

$$\begin{aligned} &\int_0^\tau e^{(\tau-s)A} \hat{\mathfrak{A}} \hat{B}u_1(s) ds - \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} \hat{B} \dot{u}_1(s) ds \\ &= \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} (\hat{\mathfrak{A}} \hat{B}u_1(s) - \hat{B} \dot{u}_1(s)) ds \\ &= \int_0^\tau e^{tA} \begin{bmatrix} e^{a_1 t} \{ \zeta_1(t) + (1-x) \dot{\zeta}_1(t) \} \\ a_2 (1-x) e^{a_1 t} \zeta_1(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^x \begin{bmatrix} \zeta_1(t) + (1-x+t) \dot{\zeta}_1(t) \\ \frac{a_2}{a_1} (e^{a_1 t} - 1) \{ \zeta_1(t) + (1-x+t) \dot{\zeta}_1(t) \} \\ + a_2 (1-x+t) e^{a_1 t} \zeta_1(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{z}_1(x) \\ \frac{a_2}{a_1} (e^{a_1 x} - 1) \tilde{z}_1(x) \end{bmatrix} - \hat{B}u_1(\tau) \\ &= f(x) - \hat{B}u_1(\tau) \end{aligned}$$

となる. これらのことから $f \in \hat{S}$ が従う. よって, $\hat{T} \subset \hat{S}$ が成立することがわかる.

つぎに, 逆の包含関係 $\hat{S} \subset \hat{T}$ を示そう. 各 $f \in \hat{S}$ に対して, ある $\tau > 0$ と $u_1 \in H^1(0, \tau; \mathbf{R})$, $u_1(0) = 0$ が存在して

$$\begin{aligned} f &= \hat{B}u_1(\tau) + \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} \hat{\mathfrak{A}} \hat{B}u_1(s) ds \\ &\quad - \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} \hat{B} \dot{u}_1(s) ds \end{aligned}$$

と表せる¹. ここで, 本証明の前半部分と同様に積分項をまとめて計算すると

$$\begin{aligned} &\int_0^\tau e^{(\tau-s)A} \hat{\mathfrak{A}} \hat{B}u_1(s) ds - \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} \hat{B} \dot{u}_1(s) ds \\ &= \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} (\hat{\mathfrak{A}} \hat{B}u_1(s) - \hat{B} \dot{u}_1(s)) ds \end{aligned}$$

¹一般性を失うことなく, $\tau > 1$ とできることに注意されたい.

$$= \begin{bmatrix} e^{-a_1 x} u_1(\tau - x) \\ \frac{a_2}{a_1} (1 - e^{-a_1 x}) u_1(\tau - x) \end{bmatrix} - \hat{B} u_1(\tau)$$

となるので、 f をつぎのように表すことができる。

$$f(x) = \begin{bmatrix} e^{-a_1 x} u_1(\tau - x) \\ \frac{a_2}{a_1} (e^{a_1 x} - 1) \cdot e^{-a_1 x} u_1(\tau - x) \end{bmatrix}$$

とくに $e^{-a_1(\cdot)} u_1(\tau - \cdot) \in H^1(0,1)$ に注意すると、 $f \in \hat{T}$ となることがわかる。したがって、 $\hat{S} \subset \hat{T}$ も成立することになる。

以上より $\hat{S} = \hat{T}$ が従うので、両辺の閉包をとることによって (14) 式が導出できる。□

(注意 1) $u_2 \equiv 0$ としたシステム (1) はつぎのように定式化することもできる。

$$\frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + Du_1(t), \quad z(0) = z_0$$

ここで、 A は (3) 式で定義される作用素であり、 D は

$$Du_1 := \begin{bmatrix} \delta(\cdot) \\ 0 \end{bmatrix} u_1$$

で定義される作用素である。ただし、 $\delta(\cdot)$ は $x=0$ における Dirac のデルタ関数である。文献 [5] ではデルタ関数を L^2 -関数で近似して、システムが状態空間 X の非負錐

$$X_+ := \{f = [f_1, f_2]^T \in X; f_1 \geq 0, f_2 \geq 0 \text{ a.e.}\}$$

に関して可到達となる事実を示している。

(注意 2) ● $u_2 \equiv 0$ としたシステム (1) の、可到達部分空間 $\hat{R}_b$ の X における直交補空間

$$\left\{ \left[\frac{a_2}{a_1} (1 - e^{a_1(\cdot)}) \varphi, \varphi \right]^T \in X; \varphi \in L^2(0,1) \right\}$$

と非負錐 X_+ との共通部分は $\{0\}$ になる。このことは、 $u_2 \equiv 0$ としたシステム (1) は X_+ に関して可到達となることを示している。したがって、本論文の結果は近似システムに対する Winkin らの結果 (注意 1 を参照) と矛盾しない。

● $u_1 \equiv 0$ としたシステム (1) の可到達部分空間は $\{0\} \times L^2(0,1)$ となるので、この場合は X_+ に関して可到達とはならない。

(注意 3) 境界入力をもつ並流型熱交換方程式の可到達性に関して、本節に類似した結果が文献 [4] の中で与えられている。

4. 可観測性

本節では、領域 $[0,1]$ 上で定義された出力方程式を伴うプラグフロー反応方程式を考えよう。

$$\frac{\partial z_1}{\partial t}(t,x) = -\frac{\partial z_1}{\partial x}(t,x) - a_1 z_1(t,x),$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial t}(t,x) = -\frac{\partial z_2}{\partial x}(t,x) + a_2 z_1(t,x), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times [0,1], \quad (17)$$

$$z_1(t,0) = 0, \quad z_2(t,0) = 0, \quad t \in (0,\infty),$$

$$z_1(0,x) = z_{10}(x), \quad z_2(0,x) = z_{20}(x), \quad x \in [0,1],$$

$$y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T = [z_1(t,1), z_2(t,1)]^T, \quad t \in (0,\infty) \quad (18)$$

ここで、 $y_1(t), y_2(t) \in \mathbf{R}$ は観測出力を表す。このシステムはつぎのように定式化できる。

$$\frac{dz(t)}{dt} = Az(t), \quad z(0) = z_0 \quad (19)$$

$$y(t) = Cz(t) \quad (20)$$

ここで $z(t) := [z_1(t, \cdot), z_2(t, \cdot)]^T$ であり、作用素 A は (3) 式によって、また作用素 C は

$$Cf := \begin{bmatrix} \int_0^1 \delta(x-1) f_1(x) dx \\ \int_0^1 \delta(x-1) f_2(x) dx \end{bmatrix}, \quad f = [f_1, f_2]^T$$

によって定義されている。ただし、 $\delta(\cdot-1)$ は $x=1$ における Dirac のデルタ関数を表す。このとき、システム (19), (20) の双対システムはつぎようになる。

$$\frac{dz(t)}{dt} = A^* z(t) + C^* y(t), \quad z(0) = z_0 \quad (21)$$

ここで、ヒルベルト空間 X の内積および作用素 A の定義より、随伴作用素 A^* はつぎのように求まる。

$$(A^* f)(x) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} - a_1 & a_2 \\ 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}, \quad f = [f_1, f_2]^T \in D(A^*) \quad (22)$$

$$D(A^*) = \{f = [f_1, f_2]^T \in [H^1(0,1)]^2; f_1(1) = 0, f_2(1) = 0\}$$

したがって、作用素 A^* は X において C_0 -半群 e^{tA^*} を生成する。この e^{tA^*} を具体的に表現するとつぎようになる。

● $1-x < t$ の場合

$$(e^{tA^*} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix})(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

● $1-x \geq t$ の場合

$$(e^{tA^*} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix})(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) z_1(x+t) + \phi_2(t) z_2(x+t) \\ z_2(x+t) \end{bmatrix} \quad (24)$$

ここで

$$\phi_1(t) = e^{-a_1 t}, \quad \phi_2(t) = \frac{a_2}{a_1}(1 - e^{-a_1 t})$$

である. また, 随伴作用素 C^* はつぎようになる.

$$C^* y = \begin{bmatrix} \delta(\cdot - 1) & 0 \\ 0 & \delta(\cdot - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad y = [y_1, y_2]^T$$

したがって, システム (17), (18) の双対システム (21) は, 以下のように $x=1$ において境界入力加わるシステムと等価になる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial t}(t, x) &= \frac{\partial z_1}{\partial x}(t, x) - a_1 z_1(t, x) + a_2 z_2(t, x), \\ \frac{\partial z_2}{\partial t}(t, x) &= \frac{\partial z_2}{\partial x}(t, x), \\ (t, x) &\in (0, \infty) \times [0, 1], \\ z_1(t, 1) &= y_1(t), \quad z_2(t, 1) = y_2(t), \quad t \in (0, \infty), \\ z_1(0, x) &= z_{10}(x), \quad z_2(0, x) = z_{20}(x), \quad x \in [0, 1] \end{aligned} \quad (25)$$

よって **2.** と同様にして, システム (25) は文献 [1] の Definition 3.3.2 の意味で well-defined な境界制御系を定義することが示せる. なお, システム (25) の可到達部分空間の X における直交補空間が, システム (17), (18) の不可観測部分空間になっていることに注意する. とくに, システム (17), (18) の不可観測部分空間が $\{0\}$ のとき, システム (17), (18) は可観測であるとよばれる. 以後, **3.** と同様にシステム (25) の解を特性微分方程式の手法に従って直接計算し, それからシステム (17), (18) の可観測性に関する結果を述べよう.

まずはじめに, システム (25) のつぎの部分に着目する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_2}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial z_2}{\partial x}(t, x) &= 0, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times [0, 1] \\ z_2(t, 1) &= y_2(t), \quad t \in (0, \infty) \end{aligned}$$

これより

$$z_2(t, x) = y_2(t + x - 1) \quad (26)$$

を得る.

つぎに

$$\psi(t, x) := a_1 z_1(t, x) - a_2 z_2(t, x) \quad (27)$$

を導入すると, システム (25) から次式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x) &= -a_1 \psi(t, x), \\ (t, x) &\in (0, \infty) \times [0, 1] \\ \psi(t, 1) &= \beta(t), \quad t \in (0, \infty) \end{aligned}$$

ここで $\beta(t) := a_1 y_1(t) - a_2 y_2(t)$ である. このとき, その特性微分方程式は

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-1} = \frac{d\psi}{-a_1 \psi}$$

によって与えられ, これを解くと

$$\psi(t, x) = \beta(t + x - 1) e^{-a_1(1-x)} \quad (28)$$

を得る. 以上, (26)~(28) 式により, システム (25) の解は

$$\begin{aligned} z_1(t, x) &= e^{-a_1(1-x)} y_1(t + x - 1) \\ &\quad + \frac{a_2}{a_1} (1 - e^{-a_1(1-x)}) y_2(t + x - 1) \\ z_2(t, x) &= y_2(t + x - 1) \end{aligned} \quad (29)$$

と求まる. そのとき, つぎの定理が成立する.

【定理 3】 システム (17), (18) は可観測 (すなわち, システム (25) は可到達) である.

(証明) システム (25) が可到達であることを示す. そのために, $[H^1(0, 1)]^2$ が X で稠密であることに注意すると, 各 $[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2]^T \in [H^1(0, 1)]^2$ と任意に固定された $\tau > 1$ に対して

$$z_1(\tau, x) = \tilde{z}_1(x), \quad z_2(\tau, x) = \tilde{z}_2(x) \quad (30)$$

なる $y \in H^1(0, \tau; \mathbf{R}^2)$, $y(0) = 0$ が存在することを示せばよい. (30) 式は次式に等価である.

$$\begin{aligned} y_1(\tau + x - 1) &= e^{a_1(1-x)} \tilde{z}_1(x) \\ &\quad - \frac{a_2}{a_1} (e^{a_1(1-x)} - 1) \tilde{z}_2(x) \\ y_2(\tau + x - 1) &= \tilde{z}_2(x) \end{aligned}$$

各 $i = 1, 2$ に対して, $\zeta_i \in H^1(1 - \tau, 1)$ を $\tilde{z}_i \in H^1(0, 1)$ の

$$\zeta_i|_{[0, 1]} = \tilde{z}_i, \quad \zeta_i(1 - \tau) = 0$$

なる拡張としよう. ここで, 入力を

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{a_1(\tau-t)} \zeta_1(t - \tau + 1) \\ &\quad - \frac{a_2}{a_1} (e^{a_1(\tau-t)} - 1) \zeta_2(t - \tau + 1) \\ y_2(t) &= \zeta_2(t - \tau + 1) \end{aligned} \quad (31)$$

と選ぶと, $y_1 \in H^1(0, \tau; \mathbf{R})$, $y_1(0) = 0$ と $y_2 \in H^1(0, \tau; \mathbf{R})$, $y_2(0) = 0$ が従う. さらに, (30) 式が (31) 式の入力 $y_1(t), y_2(t)$ を与えることによって満たされることがわかる. $\square$

つぎに, 出力方程式 (18) の一方の出力成分のみを観測した場合の不可観測部分空間を特徴付けよう. まず, システムの出力方程式 (18) を

$$y(t) = y_2(t) = z_2(t, 1), \quad t \in (0, \infty) \quad (32)$$

で置き換えた場合を考える. このときは, 対応する双対システムは (25) 式において $y_1 \equiv 0$ とおいたシステムになる. システムの不可観測部分空間は以下の定理によって与えられる.

【定理 4】 システム (17), (32) を考える. このとき, システムの不可観測部分空間は

$$\left\{ \left[\varphi, \frac{a_2}{a_1} (e^{-a_1(1-\cdot)} - 1) \varphi \right]^T \in X; \varphi \in L^2(0,1) \right\} \quad (33)$$

で与えられる.

(証明) $y_1 \equiv 0$ のとき, システム (25) の解は (29) 式から

$$\begin{aligned} z_1(t, x) &= \frac{a_2}{a_1} (1 - e^{-a_1(1-x)}) y_2(t+x-1) \\ z_2(t, x) &= y_2(t+x-1) \end{aligned} \quad (34)$$

となる. 定理 3 の証明と同様の議論により, 各 $\tilde{z}_2 \in H^1(0,1)$ と任意に固定された $\tau > 1$ に対して, $z_2(\tau, x) = \tilde{z}_2(x)$ なる $y_2 \in H^1(0, \tau; \mathbf{R})$, $y_2(0) = 0$ が存在することがわかる. ここで, (34) 式において $t = \tau$ とおき, y_2 を消去すると

$$z_1(\tau, x) = \frac{a_2}{a_1} (1 - e^{-a_1(1-x)}) \tilde{z}_2(x)$$

を得る. 最後に, $H^1(0,1)$ が $L^2(0,1)$ で稠密であることに注意すると, $y_1 \equiv 0$ としたシステム (25) の可到達部分空間は

$$\left\{ \left[\frac{a_2}{a_1} (1 - e^{-a_1(1-\cdot)}) \varphi, \varphi \right]^T \in X; \varphi \in L^2(0,1) \right\}$$

となることがわかる. この部分空間の X における直交補空間が (33) 式そのものである. $\square$

(注意 4) 文献 [5] では, 出力方程式 (20) をもつシステムに対して, 作用素 C に含まれるデルタ関数を L^2 -関数で近似してシステムが可観測となることを示している. また, 出力方程式 (32) をもつシステムに対しても同様の考えに基づき, システムが状態空間 X の非負錐 X_+ に関して可観測となることを示している.

(注意 5) ● システム (17), (32) の不可観測部分空間 (33) と非負錐 X_+ との共通部分は $\{0\}$ になる. したがって, システム (17), (32) は X_+ に関して可観測となるので, 近似システムに対する Winkin らの結果 (注意 4 を参照) と矛盾しない.

● システムの出力方程式 (18) を

$$y(t) = y_1(t) = z_1(t, 1), \quad t \in (0, \infty) \quad (35)$$

で置き換えた場合を考える. このときは, 対応する双対システムは (25) 式において $y_2 \equiv 0$ とおいたシステムになる. この結果, システムの不可観測部分空間は $\{0\} \times L^2(0,1)$ となるので, システム (17), (35) は X_+ に関して可観測とはならない.

5. Admissible observation operator に基づいた解釈

注意 2 の中で, $u_2 \equiv 0$ としたシステム (1) は状態空間の非負錐 X_+ に関して可到達となることを述べたが, これを以下のように admissible observation operator の概念 (Curtain[2] の Definition 2.2) を取り入れて, 別

証明を与えることができる. 注意 1 の作用素 A および D に着目したとき, D の随伴作用素 D^* は, A の随伴作用素 A^* が生成する C_0 -半群 e^{tA^*} に対して admissible observation operator になる. このとき, 任意の $z \in X_+$ に対して $D^* e^{tA^*} z = 0$ ($\forall t \geq 0$) から $z = 0$ が従うので, システム (D^*, A^*) は状態空間の非負錐 X_+ に関して可観測となる. 言い換えれば, システム (A, D) は X_+ に関して可到達となる.

定理 3 の証明に対しても同様である. システム (19), (20) の作用素 A および C を考えたとき, C は A が生成する C_0 -半群 e^{tA} に対して admissible observation operator になる. このとき, 任意の $z \in X$ に対して $C e^{tA} z = 0$ ($\forall t \geq 0$) から $z = 0$ が従うので, システム (C, A) が可観測となる.

以上のように, 作用素 D や C に含まれる Dirac のデルタ関数を L^2 -関数で近似することなしに直接的に扱うことができるが, $[L^2(0,1)]^2$ 空間の枠内で議論する場合には, Winkin らの手法または本論文の手法に基づく必要がある. 本論文の手法ではデルタ関数を L^2 -関数で近似していないが, それにもかかわらず, 可到達部分空間や不可観測部分空間が具体的に定まるという利点がある.

6. おわりに

本論文では, プラグフロー反応方程式の可到達性および可観測性について, Dirac のデルタ関数を L^2 -関数で近似することなしに厳密な考察を行った. 可到達性については, 境界入力をもつプラグフロー反応方程式が Curtain and Zwart の意味で well-defined な境界制御系として定式化できることを示し, システムの解の具体的な表現を通して可到達となることを示した. また, 一方の境界入力のみがシステムに加えられる場合に対して可到達部分空間を特徴付けることができた. これとは双対な概念である可観測性についても, 出口での物質の濃度がともに測定可能ならば可観測となることを示すことができ, さらに, 一方のみが測定可能なときの不可観測部分空間を特徴付けることができた.

移流拡散方程式で記述される化学反応モデル (付録を参照) に対し, 可到達性および可観測性について, Dirac のデルタ関数を L^2 -関数で近似することなしに厳密に考察することが, 今後の課題として残されている.

参考文献

- [1] R. F. Curtain and H. J. Zwart: *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, Texts in Applied Mathematics, Vol. 21, Springer-Verlag (1995)
- [2] R. F. Curtain: The Salamon-Weiss class of well-posed infinite-dimensional linear systems: a survey; *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Vol. 14, pp. 207–223 (1997)
- [3] K. J. Engel and R. Nagel: *One-Parameter Semigroups*

for *Linear Evolution Equations*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 194, Springer-Verlag (2000)

- [4] H. Sano: On reachability of parallel-flow heat exchanger equations with boundary inputs; *Proceedings of the Japan Academy*, Vol. 83, Ser. A, No. 1, pp. 1–4 (2007)
- [5] J. J. Winkin, D. Dochain and P. Ligarius: Dynamical analysis of distributed parameter tubular reactors; *Automatica*, Vol. 36, pp. 349–361 (2000)

付 録

拡散の影響まで考慮した化学反応モデルは、つぎのように入れられる [5]. (ただし文献 [5] では、はじめから $u_2 \equiv 0$ とおいている.)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_1}{\partial t}(t, x) &= D_a \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}(t, x) - v \frac{\partial z_1}{\partial x}(t, x) - k_0 z_1(t, x) \\ \frac{\partial z_2}{\partial t}(t, x) &= D_a \frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}(t, x) - v \frac{\partial z_2}{\partial x}(t, x) + b k_0 z_1(t, x), \\ &\quad (t, x) \in (0, \infty) \times [0, L] \\ D_a \frac{\partial z_1}{\partial x}(t, 0) - v z_1(t, 0) &= -v u_1(t) \\ D_a \frac{\partial z_2}{\partial x}(t, 0) - v z_2(t, 0) &= -v u_2(t) \\ D_a \frac{\partial z_1}{\partial x}(t, L) = 0, D_a \frac{\partial z_2}{\partial x}(t, L) &= 0, t \in (0, \infty)\end{aligned}$$

$$z_1(0, x) = z_{10}(x), z_2(0, x) = z_{20}(x), x \in [0, L]$$

ここで, $z_1(t, x), z_2(t, x) \in \mathbf{R}$ はそれぞれ時刻 t , 位置 $x \in [0, L]$ における物質 C_1, C_2 の濃度を表し, $u_1(t), u_2(t) \in \mathbf{R}$ は制御入力を表す. L は反応器の長さを表し, 他の定数は反応プロセスに依存した正の定数である.

上の式で, 拡散係数を $D_a = 0$, 反応器の長さを $L = 1$, 流体の空塔速度を $v = 1$ とし, さらに $a_1 = k_0$, $a_2 = b k_0$ とおくと (1) 式が得られる.