競合環境下での A -距離施設配置問題に対する 遺伝的アルゴリズムの応用*

宇野 剛史[†]・坂和 正敏[†]・加藤 浩介[†]・片桐 英樹[†]・長 一孝[†]

An Application of Genetic Algorithm for Facility Location Problem with A -distance in a Competitive Environment*

Takeshi UNO[†], Masatoshi SAKAWA[†], Kosuke KATO[†], Hideki KATAGIRI[†] and Kazutaka CHO[†]

About studies of optimal location problem with competitiveness to other facilities, the distance between facilities and their customers is usually represented as Euclid distance. However, there are often cases that facility location given for facility location model with Euclid distance does not suit the actual condition of facility location in city area. In this paper, we suggest a new location model by introducing A -distance, proposed by Widmayer etc., which is the distance that directions that customers can move is limited. Because the formulated optimal location problem is difficult to solve immediately, we reformulate the problem to combinational problem to find one of the optimal solutions for the problem. The reformulated problem can be solved strictly, but it requires enormous computational time and costs for large scale problems. We construct an efficient solving method by applying genetic algorithm for non-linear 0-1 programming problem. Moreover, we show efficiency of the algorithm by using some numerical examples.

1. はじめに

店舗等の商業施設のように他の施設との競合関係を考慮する必要がある施設配置問題に関する数値的研究は、Hotelling[5]の提案した配置モデルを先駆とする。Hotellingは、線分上に施設を利用する顧客が一樣に分布する市場において、顧客は距離が近い施設を利用するという仮定のもとで、互いに競合する二つの企業ができるだけ多くの需要量を得るようにそれぞれ一つの施設を配置する問題について考察した。Wendellら[17]は、利用者の分布を有限個の需要点上の分布に置き換え、これらの点を結んだネットワーク上での競合配置モデルについて考察した。Hakimi[3]はこのネットワーク上の競合施設配置モデルにおいて、既存施設が点上に配置されている状況において新規施設を点上に配置する問題を考察した。また、Drezner[1]はHakimiの配置モデルにおいて需要点および既存施設が存在する領域を平面上とし、新規施設をこの平面に配置する問題を考察した。Drezner

の配置モデルは平面上における施設配置問題の基礎として多くの研究者により様々な研究がなされた[4,13–15]。

上記の競合配置モデルでは、利用者・施設間の距離が施設を選好する基準として重要な要素と考えられており、主にユークリッド距離の概念が用いられている。しかし、たとえば市街地において施設を配置する場合、一般に利用者は敷設されている道路上を移動すると考えられる。このことは移動可能な方向が限定されていることを意味し、従来のユークリッド距離を用いた配置モデルでは現実的でない状況が想定される[10]。たとえば京都やマンハッタンのように、道路網がほぼ碁盤目状となっている都市内における配置を考察する場合には、直角距離が有効であると考えられている[2,18]。しかし、一般の都市では地形や歴史等の制約により、直交する2方向のみにより移動可能な方向を表すのは困難である。このような場合における利用者の移動を数理的に表現するために、Widmayerら[19]は与えられたいくつかの方向にのみ移動可能な場合における距離の概念として A -距離を定義した。利用者・施設間の距離が A -距離によって表される場合に対して、病院、消防署や救急車デポ等の公共施設に関する配置問題の研究が石井[6]、松富ら[8,9]によって行われた。施設配置問題と用いられている距離との関係については、Martiniら[7]による概説が詳しい。

* 原稿受付 2006年4月13日

[†] 広島大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Hiroshima University; 1-4-1 Kagamiyama, Higashihiroshima city, Hiroshima 739-8527, JAPAN

Key Words: competitiveness, facility location, A -distance, linear programming, genetic algorithm.

本研究では、Widmayer ら [19] によって提案された A-距離を競合施設配置問題に導入することで、新しい競合施設配置モデルを構築する。定式化された問題は非線形計画問題として表されるが、直接解くことは困難であることから、組合せ問題に変換することで求解可能な問題に再定式化する。しかし、この問題の厳密解を導出するために必要な計算に対する複雑さのオーダは需要点の数に対して指数的に増加することから、大規模な問題に対して最適配置を厳密に導出することは困難である。本研究では非線形 0-1 計画問題に対する遺伝的アルゴリズムを用いた解法を競合施設配置問題に特化することで応用することを提案する。さらに、提案された解法を競合施設配置問題の数値例に適用することでその有効性を示す。

本論文は次のように構成される。第 2 章では、Widmayer ら [19] によって定義された A-距離の概念について述べる。第 3 章では、利用者の施設に対する選好基準に A-距離の概念を用いた競合施設配置問題の定式化を行う。定式化された問題を直接解くことが困難なことから、第 4 章では求解可能な組合せ問題に再定式化を行う。この組合せ問題は求解可能であるが計算時間が莫大にかかることから、第 5 章では非線形 0-1 計画問題に対する遺伝的アルゴリズムに対して競合施設配置問題の特性を応用した近似解法について述べる。第 6 章では、提案解法を競合施設配置問題の数値例に適用することでその有用性を検証する。最後に、第 7 章では本研究のまとめおよび今後の課題について述べる。

2. A-距離

本章では、Widmayer ら [19] によって定義された A-距離について述べる。平面 $\mathbf{R}^2$ 内の任意の点において移動可能な方向が β 個あるものとする。これらの方向を、直交座標系において x_1 軸となす角度により $\theta_1, \dots, \theta_\beta$ で表す。ここで、 $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_\beta < \pi$ をみたすものとする。移動可能な方向の集合を $A \equiv \{\theta_1, \dots, \theta_\beta\}$ で表す。2 点 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbf{R}^2$ 間の線分を $\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}$ とおく。このとき、 $\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}$ の方向が A に属するとき、この線分は A-方向であるという。

【定義 1】 平面 $\mathbf{R}^2$ 上の任意の 2 点 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 間の A-距離を次式で定義する。ここで、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表す。

$$d_A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \equiv \begin{cases} \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|, & \overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} \text{ が A-方向である場合} \\ \min_{\mathbf{p}_3 \in \mathbf{R}^2} \{d_A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3) + d_A(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2)\}, & \text{その他の場合} \end{cases} \quad (1)$$

A-距離の一例を Fig.1 に示す。A-距離において、任意の二点間の最短経路の一つはただか一点で方向を変換することにより得られることが知られている [19]。

Fig. 1 A-distance

Fig. 2 A-circle ($A = \{\pi/3, \pi/2, 3\pi/4\}$)

移動方向が限定されている距離概念の一つにマンハッタン距離（または、 L_1 -距離）が存在するが、これは $A = \{0, \pi/2\}$ の場合における A-距離と同等であることから、A-距離はマンハッタン距離の概念の一般化といえる。また、ユークリッド距離は $A = [0, \pi)$ の場合における A-距離とみなすことができる。

A-距離の概念を用いて、ユークリッド距離の場合と同様の図形概念を定義することができる。

【定義 2】 点 $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^2$ および $r > 0$ について、 $d_A(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = r$ を満たすすべての点 $\mathbf{p}'$ の軌跡を、中心 $\mathbf{p}$ 、半径 r の A-円という。A-円の一例を Fig. 2 に示す。

A-円の中心を $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ 、半径を $r > 0$ とおくと、A-円内の領域（境界を含まない）は次式で表される。

$$\{(z_1, z_2) \mid a_{l1}z_1 + a_{l2}z_2 < b_l, l = 1, \dots, 2\beta\} \quad (2)$$

ここで、各 $l = 1, \dots, \beta$ に対して、

$$\begin{aligned} a_{l1} &= \sin\theta_{l+1} - \sin\theta_l, \quad a_{l2} = \cos\theta_l - \cos\theta_{l+1}, \\ b_l &= p_1(\sin\theta_{l+1} - \sin\theta_l) + p_2(\cos\theta_l - \cos\theta_{l+1}) \\ &\quad - r(\sin\theta_l \cos\theta_{l+1} - \cos\theta_l \sin\theta_{l+1}), \\ a_{l+\beta,1} &= -a_{l1}, \quad a_{l+\beta,2} = -a_{l2}, \quad b_{l+\beta} = 2\sin\theta_l - b_l \end{aligned}$$

である。

3. A-距離競合施設配置問題の定式化

本研究において、施設の潜在的利用者は平面 $\mathbf{R}^2$ 内に含まれる有限個の点上にのみ存在すると仮定する。以下ではこのような点を需要点という。需要点の総数を自然数 n で表し、各需要点に対して n 以下の自然数を番号として割り振る。需要点 $1, \dots, n$ の位置を $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbf{R}^2$ とおく。潜在的利用者はおのこの購買力を保持し、後述の選好基準により利用する施設を決定し、施設の提供するサービスの対価として購買力を行使する。需要点 $1, \dots, n$ の購買力を各点上に存在する利用者の購買力の総和で表し、おのこの $w_1, \dots, w_n$ とおく。また、 $\mathbf{w} \equiv (w_1, \dots, w_n)^T$ とする。

この平面 $\mathbf{R}^2$ 上において、互いに競合する施設が購買力の獲得を目標とする状況について考察する。既存施設の総数を自然数 k で表し、各需要点に対して k 以下の自然数を番号として割り振る。既存施設 $1, \dots, k$ の位置を $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^2$ とおく。同様に、意思決定者が配置する新規施設を m 個とし、おのこの位置を $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbf{R}^2$ とおく。また、 $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \in \mathbf{R}^{2m}$ とし、以下に定式化する競合施設配置問題の決定変数ベクトルとして用いる。

潜在的利用者が配置された複数の施設の中から利用する施設を選択するための選好基準として、本研究では前章で定義した A-距離を用いる。すべての利用者は最も近い施設のみを利用し、距離が等しい場合には既存施設を利用すると仮定する。需要点 i からすべての既存施設またはすべての新規施設までの距離をおのこの次のようにおく。

$$\bar{d}_i^E \equiv \min_{l=1, \dots, k} \{d_A(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_l)\} \quad (3)$$

$$\bar{d}_i(\mathbf{x}) \equiv \min_{j=1, \dots, m} \{d_A(\mathbf{u}_i, \mathbf{x}_j)\} \quad (4)$$

このとき、新規施設は需要点 i に対して $\bar{d}_i(\mathbf{x}) < \bar{d}_i^E$ が成り立つ場合のみ購買力 w_i を獲得可能であると表される。2 値変数 $\varphi_i(\mathbf{x}) \in \{0, 1\}$ について、もし $\bar{d}_i(\mathbf{x}) < \bar{d}_i^E$ ならば $\varphi_i(\mathbf{x}) = 1$ とし、そうでなければ $\varphi_i(\mathbf{x}) = 0$ とする。また、 $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \equiv (\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_n(\mathbf{x})) \in \{0, 1\}^n$ とする。このとき、A-距離競合施設配置問題は次の獲得購買力最大化問題 (P) として定式化される。

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w} \\ & \text{subject to } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2m} \end{aligned} \quad (5)$$

4. 組合せ問題への再定式化

問題 P は最急降下法や Kuhn-Tucker 条件などを用いた一般的な非線形計画問題における解法アルゴリズムによって最適解を直接求めることが困難であることが知られている [14]。本研究では、問題 P を組合せ問題に再定式化することで最適解の一つを求めることを提案する。

中心 $\mathbf{u}_i$ 、半径 $\bar{d}_i^E$ の A-円内の領域（境界を含まない）

を $C_i \subseteq \mathbf{R}^2$ とおく。次の補題は問題 P に対する最適解を導出するのに重要な役割を果たす。

【補題 1】 需要点の部分集合 $\hat{I} \subseteq \{1, \dots, n\}$ について、もし

$$\text{Cir}(\hat{I}) \equiv \bigcap_{i \in \hat{I}} C_i \neq \emptyset \quad (6)$$

ならば、 $\text{Cir}(\hat{I})$ 内の点に新規施設を一つ配置することで、 $\hat{I}$ 内のすべての需要点から購買力を獲得可能である。

(証明) 需要点 $i \in \hat{I}$ から購買力を獲得するためには、その需要点からの距離が $\bar{d}_i^E$ より短い点、すなわち C_i 内に新規施設を配置する必要がある。このことは、 $\hat{I}$ 内のすべての需要点から購買力を獲得するためには、新規施設を一つ $\text{Cir}(\hat{I})$ 内に配置すればよいことを意味する。□

(6) 式をみたす需要点の部分集合族を $\mathcal{I}_C$ とおく。このとき、補題 1 より次の定理が明らかに成り立つ。

【定理 1】 $\hat{I}_1, \dots, \hat{I}_m \in \mathcal{I}_C$ とおく。このとき、新規施設 $1, \dots, m$ をおのこの $\text{Cir}(\hat{I}_1), \dots, \text{Cir}(\hat{I}_m)$ 内に配置すると問題 P の最適解となるような $\hat{I}_1, \dots, \hat{I}_m$ が存在する。

したがって、定理 1 をみたすような問題 P の最適解の一つを求める問題 ($\hat{P}$) は、次のように定式化される。

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \cdot \mathbf{w} \\ & \text{subject to } \mathbf{x}_j \in \text{Cir}(\hat{I}_j), \text{ for } j = 1, \dots, m, \\ & \quad \hat{I}_j \in \mathcal{I}_C, \text{ for } j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (7)$$

需要点 i について、 C_i を (2) 式のように表したときの b_l の値を b_l^i とおく。このとき、新規施設 j について部分集合 $\hat{I}_j$ が $\mathcal{I}_C$ に属するか否かの判定、および、もし属するならば $\text{Cir}(\hat{I}_j)$ 内の点の導出は、二段階シンプレックス法の第一段階、すなわち次の線形計画問題 ($LP(\hat{I}_j)$) を解くことにより可能である。

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \tau_1 + \dots + \tau_{2\beta} \\ & \text{subject to } a_{l1}z_1^j + a_{l2}z_2^j + \varepsilon + \tau_l \leq \min_{i \in \hat{I}} \{b_l^i\}, \\ & \quad \text{for } l = 1, \dots, 2\beta, \\ & \quad \tau_1, \dots, \tau_{2\beta} \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 ε は十分小さい正数である。問題 $LP(\hat{I}_j)$ の最適値が 0 であれば、 $\text{Cir}(\hat{I}_j)$ は空でなく、最適解 (z_1^{j*}, z_2^{j*}) が $\hat{I}_j$ 内のすべての需要点から購買力を獲得可能な配置である。したがって、部分集合の数だけ二段階シンプレックス法の第一段階を用いて解を導出し、得られたすべての配置の中から新規施設の数だけ選び出すことにより、問題 $\hat{P}$ の厳密解の導出が可能であることを意味する。

問題 $LP(\hat{I}_j)$ の計算時間のオーダーは、制約式の数より経験的に 8β から 12β になることが知られている [12]。部分集合の数は $2^n - 1$ であり、配置を選び出すときの計算量のオーダーはたかだか $2^{n-1}C_m$ である。よって、問題 $\hat{P}$ に対する上記の厳密解法のオーダーは $O(\beta e^{mn})$ となり、

厳密解を導出することはNP-困難である。次節では、問題 $\hat{P}$ の近似解を効率的に導出するための解法アルゴリズムについて述べる。

5. 遺伝的アルゴリズムの適用

問題 $\hat{P}$ において、需要点の部分集合を与えれば、それに対応する施設配置が存在するかが求められる。よって、需要点の部分集合を各需要点が集合内に含まれるか否かの2値変数として表すことにより、問題 $\hat{P}$ を非線形0-1計画問題の一つとみなすことができる。非線形0-1計画問題に対する効率的な近似解法の一つとして、遺伝的アルゴリズム [11,16] が知られている。本研究では、遺伝的アルゴリズムに競合施設配置問題の特性を応用することで、問題 $\hat{P}$ に対して効率的な近似解法を提案する。

5.1 遺伝的アルゴリズムの一般的な手順

本節では、遺伝的アルゴリズムの一般的手順について述べる [11]。

- 手順1 (初期化) ランダムな染色体をもつ個体を生成して、初期世代の個体群を設定する。
- 手順2 (再生) 各個体の適合度を計算して、適合度に依存した一定の規則で個体の再生を行う。ここで、適合度の低いいくつかの個体は淘汰され、その個数だけ適合度の高い個体が増殖することになる。
- 手順3 (交叉) 設定された交叉確率や交叉の方法により交叉を行い、新しい個体を生成する。
- 手順4 (突然変異) 設定された突然変異確率や突然変異の方法により突然変異を行い、新しい個体を生成する。この結果、新しい世代の個体群が生成される。
- 手順5 (終了判定) 終了条件を満たせば、そのときに得られている最良の個体を問題の準最適解とする。そうでなければ、手順2へ戻る。

本研究で用いる遺伝的アルゴリズムでは、坂和ら [11] の研究に基づき、再生としてエリート期待値選択を採用する。また、交叉として一様交叉、突然変異としてビット反転型突然変異を用いる。次節以降では、競合施設配置問題に遺伝的アルゴリズムを適用するうえで改良した箇所について述べる。

5.2 コード化

新規施設 $j, j=1, \dots, m$ に対応する需要点の部分集合を $\hat{I}_j$ とおき、 $\hat{\mathbf{I}} = (\hat{I}_1, \dots, \hat{I}_m)$ とする。需要点 $i, i=1, \dots, n$ および新規施設 j について、もし $i \in \hat{I}_j$ ならば $y_i^j = 1$ とし、そうでなければ $y_i^j = 0$ とする。このとき、 $\hat{\mathbf{I}}$ に対応する個体を次のように表現する。

$$\mathbf{s} \equiv \{y_1^1, \dots, y_n^1, \dots, y_1^m, \dots, y_n^m\} \in \{0,1\}^{mn} \quad (9)$$

5.3 初期個体群の生成

初期個体群の生成は、施設配置をランダムに決定することで行う。得られた配置に対して、そのとき各施設が各需要点から購買力を獲得可能か否かで個体の各要素を与える。上記の生成ルールにより、 $\mathbf{s}$ 内の各成分をランダムに選ぶよりも様々な施設配置のパターンが得られる。

5.4 個体の評価

各個体に対する適合度関数は問題の目的関数で定義するのが一般的である。個体 $\mathbf{s} \in \{0,1\}^{mn}$ に対して少なくとも一つの新規施設 j が $Cir(\hat{I}_j) = \emptyset$ をみたすならば、この個体は施設 j に対して適切な配置をもたない。このような個体は問題 $\hat{P}$ において多く存在し、次の2通りの評価が考えられる。

- 致死遺伝子とみなして探索から除外する。
- $Cir(\hat{I}_j) = \emptyset$ となる施設 j の獲得購買力を0とみなし、それ以外の施設からの獲得購買力を適合度とする。

しかし、前者ではこのような個体が発生することが探索に無益であり、後者においても他の施設で良い配置が得られていたとしても全体の適合度が低くなることから探索効率が悪い。よって、本研究では $Cir(\hat{I}_j) = \emptyset$ をみたす新規施設 j に対しても妥当な配置を与えることで探索の効率化を目指す。

二段階シンプレックス法の第一段階から、問題 $LP(\hat{I}_j)$ における目的関数は制約条件をみたしていない度合の和とみなすことができる。よって、問題 $LP(\hat{I}_j)$ の最適解は最適値が0でなかったとしても制約条件をみたしていない度合を最小にする。このことは、得られた最適解を用いて施設を配置した場合、いくつかの需要点に対しては購買力を獲得できないが、それ以外の多数の需要点から購買力を獲得しやすいことを意味する。したがって、個体の適合度は、各 $\hat{I}_j$ に対して問題 $LP(\hat{I}_j)$ を解き、得られた最適解 (z_1^{j*}, z_2^{j*}) に施設 j を配置することで得られた獲得購買力により与える。

また、問題 $LP(\hat{I}_j)$ は左辺の定数係数についてすべての個体で共通である。よって、一度個体内のある施設に対して問題 $LP(\hat{I}_j)$ を解けば、それ以降の施設およびその他の個体については感度解析 [12] を用いることで効率的に最適解を求めることが可能である。

5.5 突然変異

非線形0-1計画問題に対する二重構造文字列遺伝的アルゴリズム [11] では、遺伝的操作として主に交叉・突然変異が用いられる。しかし、以下に述べる理由により、これらの遺伝的操作だけでは問題 P_I に対して良い解を見つけることは困難である。本研究で提案するアルゴリズムでは、上記の遺伝的操作に加えて競合施設配置問題の性質を利用した新しい突然変異を提案する。

個体 $\mathbf{s} \in \{0,1\}^{mn}$ 、および、個体をデコード化した $\hat{I}_1, \dots, \hat{I}_m$ に対して問題 $LP(\hat{I}_1), \dots, LP(\hat{I}_m)$ を解くことで得られる新規施設の配置に対応する施設利用状況は、

Fig. 3 Individual before our proposed mutation

一般に次の二つの理由により異なる．

- もし問題 $LP(\hat{I}_j)$ の最適値が 0 より大きいならば， $\hat{I}_j$ で示される購買力の獲得状況とは一致しない．
- 仮に問題 $LP(\hat{I}_j)$ の最適値が 0 であったとしても， $\hat{I}_j$ 内の需要点が他の新規施設を利用する可能性がある．

遺伝的アルゴリズムでは，親世代の個体の特徴を受け継ぎつつ交叉や突然変異などの遺伝的操作により新しい個体を生成する．しかし，上記のように与えられた施設利用状況と実際に配置したときの施設利用状況が異なる個体は，各成分の数値により施設利用状況や施設配置などのデータを表現しているとは言いがたい．このことは，与えられた施設利用状況と実際に配置したときの施設利用状況が異なる個体に対しては，従来の遺伝的操作を行っても効果が見込めないことを意味する．さらに，定理 1 より，次の定理が明らかに成り立つ．

【定理 2】 問題 $\bar{P}$ において任意の新規施設 j に対して次の二つが一致する最適解が存在する．

- 最適解に対応する各 x_j に新規施設 j を配置したときに購買力を獲得可能な需要点の集合
- 最適解に対応する各 $\hat{I}_j$

以上より，与えられた施設利用状況と実際に配置したときの施設利用状況が一致するような個体を探すことは有効であり，これを次の手順による突然変異として遺伝的アルゴリズムに取り入れる．

手順 1 個体 s に対して，問題 $LP(\hat{I}_1), \dots, LP(\hat{I}_m)$ を解くことで得られる新規施設の配置に対応する施設利用状況を求め，5.2 節で述べたコード化により新しい個体 s' に変異させる．

手順 2 個体 s' に対して，問題 $LP(\hat{I}_1), \dots, LP(\hat{I}_m)$ を解くことにより，新規施設の配置および個体 s' の適合度を求める．

以下にこの突然変異の例を挙げて説明する．Fig.3 で表される A-距離競合施設配置問題の例において， $A = \{0, \pi/2\}$ ，需要点および施設の数 $(n, k, m) = (6, 3, 1)$ とし，需要点および既存施設の位置を，図中のおのおの $\times$ ，■によって表す．このとき，個体 $s = \{101001\}$ に対応する新規施設の配置は，問題 $LP(\hat{I}_j)$ を解いた結果として

Fig. 4 Individual after our proposed mutation

Fig.3 中の●で表される．しかし，得られた施設配置で獲得できる需要点は $\{2, 4, 5\}$ であり，この個体の表す需要点の獲得状況 $\{1, 3, 6\}$ とは大きく異なる．そこで，提案する突然変異により，個体を $\{101001\}$ から $\{010110\}$ に変異させ，変異した個体に対する新規施設の配置を求めた結果を Fig.4 中の●で示す．この個体から得られる施設配置で獲得できる需要点は $\{2, 4, 5\}$ であり，個体の表す需要点の獲得状況と一致していることがわかる．

5.6 探索の終端時

遺伝的アルゴリズムにおいて得られる解は局所最適性を保障しない．このことは，個体をわずかに変えるだけでより良い個体得られる可能性があることを意味する．よって，探索の終端時に得られた解において，購買力を獲得できない需要点 i に対してその他の要素を固定しておいて各新規施設 j について $y_i^j = 0 \rightarrow 1$ と変えてみることで，その需要点が獲得可能か否か調べる．上記の探索をすべての購買力を獲得できない需要点 i に行うことで，得られた解を局所最適解に近づけるを試みる．

6. 数値実験

本章では前章で述べた解法アルゴリズムを数値例に適用することでその有効性を検証する．A-距離について， $A = \{0, \pi/4, \pi/2\}$ とする．各需要点の位置 u_i は $[0, 10]^2$ 内でランダムに決定され，おのおのの購買力 w_i は $\{1, \dots, 10\}$ 内からランダムに与えられているものとする．また，既存施設の数 $k = 3$ とし，これらの位置 v_l は需要点と同様に $[0, 10]^2$ でランダムに与えられているものとする．

前章で述べた遺伝的アルゴリズムのパラメータ [11] について，個体群サイズを 150，世代数を 2000，世代ギャップを 0.9，スケーリング定数を 1.8 とする．従来の交叉率，突然変異率，および逆位率をおのおの 0.9, 0.01, 0.03 とし，5.4 節で述べた突然変異の発生率について 0.03 とする．

さらに，比較手法として分枝限定法による厳密解法を用いる．ただし，第 4 章における問題 $\bar{P}$ の計算量の議論より，需要点および新規施設の数が多い場合には莫大な計算時間がかかるため，5000 秒で計算を打ち切ったと

Table 1 Computational results by genetic algorithm ($m=1$)

n	20	40	60	80	100
Best	50	91	138	175	214
Mean	50.0	91.0	137.1	175.0	214.0
Worst	50	91	136	175	214
CPU times	7.131	14.27	19.57	28.35	35.26

Table 2 Computational results by branch and bound method ($m=1$)

n	20	40	60	80	100
Optimal	50	91	138	175	202
CPU times	0.121	1.839	123.5	1529	5000

きの最良値を結果として用いている。

以上の設定のもとで、需要点および新規施設の数を経々においた場合において、前章で述べた解法アルゴリズムを適用する。なお、以下の計算時間は DELL PRECISION 370 (CPU: 2.79G, RAM: 1.00GB) を使用して 20 回試行したときの結果で、単位は秒である。

まず、新規施設の数 $m=1$ で固定した場合において提案解法を実行した結果を Table 1 に示す。また、分枝限定法を用いた際の結果を Table 2 に示す。

遺伝的アルゴリズムによって得られた最良値を分枝限定法の結果と比較すると、 $n=20, 40, 60, 80$ の場合では最適値と同等の値が得られ、 $n=100$ の場合では計算時間を打ち切った分枝限定法による結果よりも良い解を得ることができた。また、需要点数 n の増加に対して遺伝的アルゴリズムでは計算時間が急激に増加しないことから、大規模な施設配置問題に対しても遺伝的アルゴリズムにより効率的に求解可能であることが示された。

つぎに、需要点の数を $n=50$ で固定した場合において提案解法を実行した結果を Table 3 に示す。また、分枝限定法を用いた際の結果を Table 4 に示す。

問題 P の計算量が需要点および新規施設の数に対して指数関数的に増加することから、分枝限定法ではある程度新規施設の数が増加すると計算を打ち切らざるを得ず、その結果 Table 4 において十分な解が得られていない。一方、遺伝的アルゴリズムによって得られた解は分枝限定法の結果よりも平均的に良い結果が得られており、計算時間を大幅に抑えることが可能となっている。

さらに、他の A-距離競合施設配置問題に対しても提案手法を適用してみることで、問題および提案解法の性能を検証する。

まず、5.5 節で述べた探索の終端時における操作の有効性について検証する。この検証のために、上記の数値例において需要点および新規施設の数 $(n, m) = (50, 2)$ とし、需要点の位置および購買力と既存施設の位置をランダムに与えた七つの数値例を用いた。これらの数値例に対して上記と同様に提案解法をおのおの 20 回試行し、

Table 3 Computational results by genetic algorithm ($n=50$)

m	1	2	3	4	5
Best	124	172	218	229	243
Mean	124.0	171.5	214.1	225.0	241.4
Worst	124	164	205	213	232
CPU times	21.13	39.16	66.12	103.3	155.8

Table 4 Computational results by branch and bound method ($n=50$)

m	1	2	3	4	5
Optimal	124	172	218	221	228
CPU times	15.07	229.2	3467	5000	5000

Table 5 Improvement at the terminal generation

Problem	Frequency in improved solutions	Frequency in best solutions
1	0/20	20/20
2	0/20	19/20
3	0/20	20/20
4	1/20	20/20
5	7/20	18/20
6	0/20	19/20
7	0/20	20/20

5.5 節で述べた探索の終端時における操作による改善結果を Table 5 に示す。

Table 5 より、5.5 節で述べた探索の終端時における操作によって改善されたのは 7 例中 2 例であり、多くの問題においてはこの操作を行う必要はないと考えられる。しかし、数値例 5 においては効果を十分に発揮しており、特定の問題においては有効であることがわかる。この操作がどのような特徴を持つ問題に対して有効か現状では不明だが、この操作に費やした計算時間がいずれの場合でも 1 秒未満であり需要点数 n に対して比例的に増加する程度であると推定されることから、この操作を探索の終端時に常に実行することは有効であると考えられる。

つぎに、移動可能な方向と問題および提案解法との関係について検証する。この検証のために、数値例において方向の数 β に対して $A = \{0, \pi/\beta, \dots, \pi(\beta-1)/\beta\}$ と与える。また、需要点および新規施設の数 $(n, m) = (50, 2)$ とし、需要点の位置および購買力と既存施設の位置をランダムに与える。 $\beta = 2, 4, 8, 16, 32$ とおいたこれらの数値例に対して、上記と同様に提案解法をおのおの 20 回試行した結果を Table 6 に示す。

はじめに、方向と計算時間との関連について述べる。提案解法の計算時間は需要点および新規施設の数 n が固定であれば、問題 $LP(\hat{I}_j)$ を解くための計算時間に依存すると考えられる。この問題は第 4 章で挙げたように線形計画問題であり、シンプレックス法によって解く場合には、反復回数が主として制約式の数 2β に依存して 4β か

Table 6 Computational results about increase of number of directions

β	2	4	8	16	32
Best	172	172	175	175	175
Mean	172.0	171.2	172.8	172.4	173.2
Worst	172	164	172	164	172
CPU times	21.69	51.57	133.5	360.3	907.7

ら 6β となることが経験的に知られている [12]. Table 6 ではおよそ上記の推測通りの結果が得られており、ほとんどの場合において計算時間は移動可能な方向の増加によって多項式的に増加すると考えられる.

つぎに、方向と得られた解との関連について述べる. Table 6 より、方向の増加に対しても提案解法は安定して最良値を与える解を得ることができている. また、 $\beta=8, 16, 32$ において獲得購買力が 175 となる施設配置が得られているが、このときの獲得状況を $\hat{I}_1, \hat{I}_2$ で表し、 $\beta=2, 4$ の場合において問題 $LP(\hat{I}_1), LP(\hat{I}_2)$ を解いた結果、 $\beta=2, 4$ の場合では $\hat{I}_1, \hat{I}_2$ を獲得可能な施設配置が存在しないことがわかった. また、獲得購買力が 172 となる施設配置に対して 5.5 節で述べた探索の終端時における操作を行ってみたが、獲得購買力が 172 より大きくなるような配置を得ることはできなかった. このことは、獲得購買力が 172 となる施設配置が局所最適解となっていることを意味する. ユークリッド距離の場合、すなわち移動可能な方向を $A=[0, \pi)$ としたときの施設配置問題を宇野ら [14] によって提案された解法で解いてみたところ最良値が 175 であったことから、提案解法で得られた最良値はいずれも最適値であると考えられる. さらに、Table 6 中の $\beta=2, 4$ の場合における最適配置は、ユークリッド距離の場合における最適配置と異なる状況を示しており、道路状況等が A-距離で表される場合において本論文で提示したモデルが有力であると考えられる.

7. おわりに

本研究では従来ユークリッド距離を用いて考えられていた競合施設配置問題に対して、A-距離を用いることで新しい競合施設配置問題を提案した. 定式化した最適配置問題に対する解を導出するために組合せ問題に変換することで厳密解を導出する手法を提案した. この組合せ問題は計算時間が指数関数的に増加することから、効率的な求解手法として遺伝的アルゴリズムに基づく近似解法を提案した. さらに、数値例に適用することで提案解法の有効性を示した. ユークリッド距離を用いた競合施設配置問題では多くの計算時間が必要であることが知られている [4] が、A-距離を用いた競合施設配置問題では比較的短時間で解が求まる. よって、方向の数 β を増やすことでユークリッド距離の場合における問題の近似として用いられることが期待できる.

今後の課題として、政党間における政策決定問題 [4]

等に応用するために、A-距離競合施設配置問題を多次元に拡張することが挙げられる. 多次元配置問題においては計算時間が次元数に対して指数関数的に増加することから、本研究で提案した解法をより高速かつ高精度に改良する必要がある. また、タブー探索法 [15] 等のヒューリスティックな手法を A-距離競合配置問題に適用することも有力であり、これらを比較検証することは将来研究の一つである.

参考文献

- [1] Z. Drezner: Competitive location strategies for two facilities; *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 12, pp. 485–493 (1982)
- [2] R. L. Francis: A geometrical solution procedure for a rectilinear minimax location problem; *AIIE TRANS.*, Vol. 4, pp. 328–332 (1972)
- [3] S. L. Hakimi: On locating new facilities in a competitive environment; *EJOR*, Vol. 12, pp. 29–35 (1983)
- [4] 花岡: 多次元競合施設配置問題に対する発見的解法; 平成 16 年度広島大学工学部卒業論文 (2005)
- [5] H. Hotelling: Stability in competition; *The Economic Journal*, Vol. 30, pp. 41–57 (1929)
- [6] 石井: 配置問題における新しい距離の展開; BASIC 数学 7 月号, pp. 33–40 (1991)
- [7] H. Martini and A. Schöbel: Median hyperplanes in normed spaces - A survey; *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 89, pp. 181–195 (1998)
- [8] T. Matsutomi and H. Ishii: Minimax location problem with A-distance; *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 41, pp. 181–195 (1998)
- [9] 松富: 緊急施設配置問題の数理的研究; 平成 10 年度広島大学大学院工学研究科学学位論文 (1999)
- [10] 岡部, 鈴木: 最適配置の数理, 朝倉書店 (1992)
- [11] 坂和: 遺伝的アルゴリズム, 朝倉書店 (1995)
- [12] 坂和: 数理計画法の基礎, 森北出版 (1999)
- [13] 塩出: 競合する施設の配置について; BASIC 数学 7 月号, pp. 41–44 (1991)
- [14] 宇野: 競合環境下での施設配置問題に関する数理的研究; 平成 13 年度大阪大学大学院工学研究科学学位論文 (2002)
- [15] 宇野, 坂和: 競合施設配置モデルに対するタブー探索の応用; 電子情報通信学会論文誌, Vol. J87-A, No. 11, pp. 1403–1410 (2004)
- [16] 渡邊: 多目的非線形整数計画問題に対する遺伝的アルゴリズムによる対話型ファジィ満足化手法; 平成 13 年度広島大学大学院工学研究科学修士論文 (2002)
- [17] R. E. Wendell and R. D. McKelvey: New perspectives in competitive location theory; *EJOR*, Vol. 6, pp. 174–182 (1981)
- [18] G. O. Wesolowsky: Rectangular distance location under the minimax optimality criterion; *TRANS.SCI.*, Vol. 6, pp. 103–113 (1972)
- [19] P. Widmayer, Y. F. Wu and C. K. Wong: On some distance problems in fixed orientations; *SIAM J. COMPUT.*, Vol. 16, pp. 728–746 (1987)