観測雑音を含む量子化入出力データに基づく システム同定*

鈴木 宙見[†]・杉江 俊治[†]

System Identification Based on Quantized I/O Data Corrupted with Noises*

Hiromi SUZUKI[†] and Toshiharu SUGIE[†]

This paper proposes an identification method for discrete-time linear systems based on the quantized input-output (I/O) data in the presence of measurement noises. First, the parameter estimation error due to quantization of I/O data is analyzed from the statistical viewpoint when we adopt an instrumental variable (IV) method and the least squares (LS) one. Then, based on the result, an IV method suitably adjusted for quantized data is proposed. The validity of the proposed method is evaluated through a numerical example.

1. はじめに

一般に、入出力情報がAD/DA変換やエンコーダ・デコーダなどのデジタル機器を経由するシステムでは、使用するセンサの解像度や機器間の通信量の制約などにより、情報の量子化が行われる。システム設計の段階において、これらの量子化の影響は考慮されないことも多いが、使用する機器やシステム構成などの都合上、十分な入出力情報を得られない場合にはこの影響を考慮する必要が生じる。このため、量子化された情報に基づいて制御する方法[1,2]や、制御のために適当な量子化を行うための研究[3,4]がなされている。また、システム同定においても、情報量の観点から最適な量子化を行うための研究[5,6]がなされている。

岡尾ら[7]は、ナノオーダーでシステムを扱うことを見据え、十分なセンサ分解能が得られないという状況を想定し、一定の精度で量子化された入出力値が観測されるシステムの同定問題を考えている。そこで彼らは、離散時間線形システムの同定問題を双線形最小二乗問題へと帰着し、パラメータおよび各サンプル時点での量子化誤差を同時に求めるオフライン同定法を提案している。この手法は、入出力情報の不完全な部分を変数とすること

で、最適化問題に帰着させるものであり、他の同定問題へも適用可能な点で注目値する。実際に、この方法は岡田ら[8]により非線形センサを用いた場合の同定問題への応用が考えられている。

しかしながら、岡尾らの方法では入出力データ中の量子化誤差を最適化問題での決定変数としているため、データ数が増えるにしたがい計算量が大幅に増加する傾向がある。また、出力に加わる雑音成分は考慮されておらず、数値最適化問題に帰着されているため、雑音に対する性質の解析も容易でない。一般に、入出力情報に雑音成分が含まれる場合に精度良くパラメータを推定するためには、できるだけ多くの入出力データを用いた方が有利となるが、その場合、彼らの方法では計算量の問題が生じてしまう。

そこで本論文では、雑音と量子化誤差の両方に対し統計的に対処するアプローチをとり、補助変数法を応用したパラメータの推定法を提案する。具体的には、補助変数法を用いた際に得られるパラメータから、量子化誤差によって生じる推定パラメータ上のバイアス成分を近似補正する方法を与える。この近似補正は、量子化誤差の影響を雑音と見なすことにより導かれるものであるが、一定の条件のもとで高精度なものとなる。これにより、雑音の影響を受けにくいという補助変数法の性質を生かしたうえで、量子化誤差の影響を軽減することが可能となる。提案する手法では、岡尾らの方法に比べ、計算量を必要としない点で、より多くの入出力データを用いて同定を行うことができる。

* 原稿受付 2005年12月7日

[†] 京都大学 大学院 情報学研究科 Graduate School of Informatics, Kyoto University; Gokasho, Uji city, Kyoto 611-0011, JAPAN

Key Words: system identification, instrumental variable method, quantized input/output.

本論文の構成は以下の通りである．まず，2章において，対象とする同定問題の設定および記号の定義を与える．3章では，対象とする同定問題に対し量子化誤差を統計的に評価することで，通常の補助変数法を用いた場合に推定されるパラメータがバイアス成分を含むことを示す．そして，近似を用いることでバイアスを取り除くようなパラメータ推定法を与える．また，このときに行う近似が妥当となる条件について考察を加える．4章では，提案するパラメータ補正を含んだ同定法の有効性を，数値例により検証する．

2. 問題設定

Fig. 1 System with I/O quantizer

本論文で考察する同定対象を Fig. 1 に示す．同定対象のダイナミクスは多項式

$$A(q) = \sum_{i=0}^{n_a} a_i \cdot q^{-i}, \quad B(q) = \sum_{i=1}^{n_b} b_i \cdot q^{-i} \quad (1)$$

で与えられるものとする，ただし $a_0 = 1$ である． q はシフトオペレータで， $q^{-1} \cdot x(k) = x(k-1)$ という関係が成り立つとする．各多項式の次数 n_a および n_b の値は既知であると仮定する．この同定対象の直接の入出力値は離散時間の連続値信号 $u(k), y(k) \in \mathbf{R}$ である．出力 $y(k)$ には雑音 $w(k)$ が加わるとし， $u(k)$ と $w(k)$ は定常過程であると仮定する．雑音 $w(k)$ が，白色雑音 $v(k)$ を用いて $w(k) = 1/A(q) \cdot v(k)$ となるとき， a_i, b_i を求める問題は，ARX モデルの同定問題に相当する．また， $A(q) = 1$ ならば FIR モデルの同定問題に相当する． Q_1, Q_2 はそれぞれ入力値，出力値に対する量子化器であり，次式のように一定の量子化精度 M_i, M_o で量子化が行われるものとする．

$$\bar{u}(k) = \lfloor u(k)/M_i + 1/2 \rfloor M_i \quad (2)$$

$$\bar{y}_w(k) = \lfloor y_w(k)/M_o + 1/2 \rfloor M_o \quad (3)$$

ただし， $\lfloor x \rfloor$ は x を越えない最大の整数を表す．本論文では，この量子化された入出力値 $\bar{u}(k), \bar{y}_w(k)$ の時系列から同定対象のパラメータベクトル

$$\theta = [a_1 \cdots a_{n_a} \ b_1 \cdots b_{n_b}]^T \quad (4)$$

を推定する問題を考える．

以下にその他の記号の定義を与える．入出力変数の左側に δ をつけることで，量子化誤差を表すものとする，すなわち，

$$\delta u(k) = u(k) - \bar{u}(k) \quad (5)$$

$$\delta y_w(k) = y_w(k) - \bar{y}_w(k) \quad (6)$$

である．また，回帰ベクトル $\phi(k)$ と雑音を並べたベクトル $\psi_w(k)$ を以下のように定義する．

$$\phi(k) = \begin{bmatrix} -y(k-1) & \cdots & -y(k-n_a) \\ u(k-1) & \cdots & u(k-n_b) \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

$$\psi_w(k) = \begin{bmatrix} -w(k-1) & \cdots & -w(k-n_a) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

回帰ベクトル ϕ の右下に w を付すことで， ϕ に含まれる要素 y を y_w に置き換えたものを表す，すなわち

$$\phi_w(k) = \phi(k) + \psi_w(k) \quad (9)$$

であるとする．また， ϕ および ϕ_w に上線や δ を付したものを，それぞれ量子化された入出力および，入出力量子化誤差を並べたベクトルとして定義する．パラメータベクトル θ に関し， θ_0 がパラメータ真値を， $\hat{\theta}$ が同定により得られる推定値を表すとする．また，変数 $x(k)$ の期待値を $E[x(k)]$ のように記述する．

本論文では，同定で用いる時系列データは 1 から N までの N ステップであるとする．よって n 次モデルの場合，同定に用いることのできる入出力データは，ステップ $n+1$ から N までとなる ($n = \max\{n_a, n_b\}$ である)．

3. 量子化誤差を考慮した補助変数法

補助変数 (instrumental variable) 法とは，出力に加わる雑音の影響を無効化するために，雑音に無相関な補助変数を導入する方法である [9]．以下では，入出力が一樣量子化される際に，補助変数法により推定されるパラメータの性質を明らかにする．また，そのときに受ける量子化誤差の影響を考慮し，その影響を打ち消すような近似補正を加えたパラメータ推定法を導出する．また，その際の近似が妥当となる条件について考察を加える．

3.1 補助変数法での推定パラメータ

本論文で対象とするシステムで，同定に用いることのできる情報は量子化された入出力 $\bar{u}(k)$ と $\bar{y}_w(k)$ である．したがって，観測した入出力値をフィルタリングせずに補助変数法を用いた場合，得られる推定パラメータはつぎの式の解となる．

$$\sum_{i=n+1}^N \zeta(i) (\bar{y}_w(i) - \bar{\phi}_w(i)^T \theta) = 0 \quad (10)$$

ここで， $\zeta(k) \in \mathbf{R}^{n_a+n_b}$ は，後述する関係を満たす補助変数であるとする．この補助変数と回帰ベクトル $\bar{\phi}_w(k)^T$

の積の総和に逆行列が存在すれば、これを θ について解くことで得られる値

$$\hat{\theta}^{\text{IV}} = \left[\sum_{i=n+1}^N \zeta(i) \bar{\phi}_w(i)^T \right]^{-1} \sum_{i=n+1}^N \zeta(i) \bar{y}_w(i) \quad (11)$$

が得られるパラメータとなる。以下、この推定パラメータがどのような値をとるかについて解析していく。

量子化された出力に関して次の関係が成り立つ。

$$\bar{y}_w(k) = \phi(k)^T \theta_0 + w(k) - \delta y_w(k) \quad (12)$$

これより、(10) 式を変形するとつぎのようになる。

$$\sum_{i=n+1}^N \zeta(i) \left(\bar{\phi}_w(i)^T (\theta_0 - \theta) + (\delta \phi_w(i) - \psi_w(i))^T \theta_0 - \delta y_w(i) + w(i) \right) = 0 \quad (13)$$

したがって、(11) 式のパラメータ推定値は、

$$\hat{\theta}^{\text{IV}} = \theta_0 + \left[\sum_{i=n+1}^N \zeta(i) \bar{\phi}_w(i)^T \right]^{-1} \times \sum_{i=n+1}^N \zeta(i) \left\{ (\delta \phi_w(i) - \psi_w(i))^T \theta_0 - \delta y_w(i) + w(i) \right\} \quad (14)$$

となる。また、(14) 式より、 $\zeta(k) \in \mathbf{R}^{n_a+n_b}$ がつぎの(15)、(16) 式を満たすベクトルであれば、 $N \rightarrow \infty$ のとき、パラメータ $\hat{\theta}^{\text{IV}}$ は真値 θ_0 に収束することがわかる。

$$\det E \left[\zeta(k) \bar{\phi}_w(k)^T \right] \neq 0 \quad (15)$$

$$E \left[\zeta(k) \left\{ (\delta \phi_w(k) - \psi_w(k))^T \theta_0 - \delta y_w(k) + w(k) \right\} \right] = 0 \quad (16)$$

したがって、(15)、(16) 式が成立するならば、補助変数法の適用が妥当であるといえる。

補助変数法では通常、最小二乗 (least squares) 法によって得られた推定プラントにおいて、観測された入力を用いたシミュレーションを行うことで、補助変数 $\zeta(k)$ を得る。すなわち、

$$x(k) = \zeta(k)^T \hat{\theta}^{\text{LS}} \quad (17)$$

$$\zeta(k) = [-x(k-1) \cdots -x(k-n_a) \bar{u}(k-1) \cdots \bar{u}(k-n_b)]^T \quad (18)$$

$$\hat{\theta}^{\text{LS}} = \left[\sum_{i=n+1}^N \bar{\phi}_w(i) \bar{\phi}_w(i)^T \right]^{-1} \sum_{i=n+1}^N \bar{\phi}_w(i) \bar{y}_w(i) \quad (19)$$

である。 $\hat{\theta}^{\text{LS}}$ は最小二乗法による推定パラメータである。変数 $x(k)$ は、観測された入力を推定したプラントに通して得られる疑似の出力値であるから、(15) 式の成立

は妥当である¹。一方、(16) 式に関しては、量子化誤差の性質も含め、詳しく見る必要がある。雑音のある場合とない場合とに分け、続く 3.2 でこの条件について議論する。

3.2 近似補正によるパラメータ推定法の提案

3.2.1 雑音のない場合

まず雑音のない場合について考察するため、 $w(k) \equiv 0$ の理想的な状態を考える。このとき、量子化される前の出力は

$$y_w(k) = y(k) \left(= \phi(k)^T \theta_0 \right) \quad (20)$$

であるので、(16) 式は次のように簡略化される。

$$E \left[\zeta(k) \delta \phi(k)^T \right] \theta_0 - E [\zeta(k) \delta y(k)] = 0 \quad (21)$$

この式が成り立つための自明な条件の一つは、 $\zeta(k) \delta \phi(k)^T$ と $\zeta(k) \delta y(k)$ の期待値が 0 となることであるが、これは通常成り立たない。なぜなら、

$$\zeta(k) \delta \phi(k)^T = \begin{bmatrix} -x(k-1) \\ \vdots \\ -x(k-n_a) \\ u(k-1) - \delta u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-n_b) - \delta u(k-n_b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\delta y(k-1) \\ \cdots \\ -\delta y(k-n_a) \\ \delta u(k-1) \\ \vdots \\ \delta u(k-n_b) \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

であり、この行列の対角要素に注目すると、 n_a+1 番目以降の対角要素に入力の量子化誤差の二乗項 $\delta u(k-i) \delta u(k-i)$ が含まれており、一般に $E[\delta u(k) \delta u(k)] \neq 0$ が成立するためである。また、(21) 式の成否を議論するためには、他の変数同士の積の期待値も必要であり、量子化誤差の統計的性質を考慮する必要がある。そこで、量子化誤差に関してつぎの仮定をおく。

(仮定 1) $\delta u(k)$ は白色で、 $[-M_i/2, M_i/2]$ の間で一様に分布する。

(仮定 2) つぎの関係が成り立つ。

$$E[x(k-i_1) \delta y(k-i_3)] = 0, \quad (23)$$

$$E[u(k-i_2) \delta y(k-i_3)] = 0, \quad (24)$$

$$E[u(k-i_2) \delta u(k-i_4)] = 0, \quad (25)$$

$$E[\delta u(k-i_2) \delta y(k-i_3)] = 0, \quad (26)$$

$$E[x(k-i_1) \delta u(k-i_4)] = -\frac{M_i^2}{12} \cdot H_{\hat{\theta}^{\text{LS}}}(i_4-i_1) \quad (27)$$

$$\forall (i_1, i_2, i_3, i_4) \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} i_1 = 1, \dots, n_a, & i_2 = 1, \dots, n_b, \\ i_3 = 0, \dots, n_a, & i_4 = 1, \dots, n_b \end{cases}$$

ただし、 $H_{\hat{\theta}^{\text{LS}}}(k)$ は、最小二乗法 (19) により推定され

¹ただし、量子化の影響があるため、量子化された入出力がある程度プラントダイナミクスの情報をもつことが必要となる。

たプラントのインパルス応答を表すとし、また、 $k \leq 0$ について $H_{\hat{\theta}_{LS}}(k) = 0$ である。

これらの仮定は量子化誤差の影響を雑音と扱うことに相当する。これらの成立条件や妥当性については 3.2.3 で議論する。

仮定 1 が成り立つとき、

$$E[\delta u(k_1)\delta u(k_2)] = \begin{cases} \frac{M_i^2}{12}, & k_1 = k_2 \\ 0, & k_1 \neq k_2 \end{cases} \quad (28)$$

であることが計算より得られる。これと仮定 2 とを合わせ (21) 式の左辺を計算すると、

$$E[\zeta(k)\delta\phi(k)^T\theta_0] - E[\zeta(k)\delta y(k)] = -\Delta_1\theta_0 \quad (29)$$

となる。ただし、

$$\Delta_1 = \frac{M_i^2}{12} \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{n_a \times n_a} & \Delta_{11} \\ \hline \mathbf{0}_{n_b \times n_a} & \mathbf{I}_{n_b \times n_b} \end{array} \right], \quad (30)$$

$$\Delta_{11} = \begin{bmatrix} H_{\hat{\theta}_{LS}}(0) & H_{\hat{\theta}_{LS}}(1) & \cdots & H_{\hat{\theta}_{LS}}(n_b-1) \\ 0 & H_{\hat{\theta}_{LS}}(0) & \cdots & H_{\hat{\theta}_{LS}}(n_b-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & H_{\hat{\theta}_{LS}}(n_b-n_a) \end{bmatrix} \quad (31)$$

であるとする。このため (21) 式は成立せず、推定パラメータはバイアス成分を含むことがわかる。しかしながら、このバイアス成分を補正する操作を行うことで、精度の高い推定を行うことができると考えられる。補正した推定パラメータは、(14) 式に (29) 式に基づいた近似を行い、(11) 式と連立させ θ_0 について解くことでつぎの式により与えられる。

$$\hat{\theta}_{\text{adj}}^{\text{IV}} = \left[\sum_{i=n+1}^N \left(\zeta(k)\bar{\phi}(k)^T - \Delta_1 \right) \right]^{-1} \sum_{i=n+1}^N \zeta(k)\bar{y}(k) \quad (32)$$

また、仮定 1 に加え、 $\delta y(k)$ が白色かつ一様分布をなすとし、仮定 2 の (24), (25) 式はそのまま、(23), (26) 式を $E[y(k-i_1)\delta y(k-i_3)] = 0$, $E[\delta u(k-i_2)\delta y(k-i_3)] = 0$ で置き換えた条件の成立を仮定すると、最小二乗法に近似補正を施した推定パラメータがつぎの式で与えられる。

$$\hat{\theta}_{\text{adj}}^{\text{LS}} = \left[\sum_{i=n+1}^N \left(\bar{\phi}(k)\bar{\phi}(k)^T - \Delta_2 \right) \right]^{-1} \sum_{i=n+1}^N \bar{\phi}(k)\bar{y}(k) \quad (33)$$

$$\Delta_2 = \text{diag} \left(\frac{M_o^2}{12}, \dots, \frac{M_o^2}{12}, \frac{M_i^2}{12}, \dots, \frac{M_i^2}{12} \right)$$

この補正を行うことで、より精度の高い推定パラメータを得ることができると考えられる。また、入力値が量子化されずに得られる場合には、上の近似解中 $M_i = 0$ とすればよい。補正変数法を用いた場合には補正の必要がないことがわかる。

3.2.2 雑音の加わる場合

続いて雑音を加わる場合について考える。(16) 式はつぎの式に変形できる。

$$E \left[\zeta(k) \left(\delta\phi_w(k)^T \theta_0 - \delta y_w(k) \right) \right] + \sum_{i=0}^{n_a} a_i \cdot E[\zeta(k)w(k-i)] = 0 \quad (34)$$

この式は (21) 式の $\delta y(k)$ を $\delta y_w(k)$ で置き換え、さらに雑音と補助変数の相関項の期待値を加えたものと解釈できる。この式の左辺の評価を与えるために、つぎに仮定を与える。

(仮定 3) (25), (27) 式および以下の式が成り立つ。

$$E[x(k-i_1)\delta y_w(k-i_3)] = 0, \quad (35)$$

$$E[u(k-i_2)\delta y_w(k-i_3)] = 0, \quad (36)$$

$$E[\delta u(k-i_2)\delta y_w(k-i_3)] = 0, \quad (37)$$

$$\forall (i_1, i_2, i_3) \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} i_1 = 1, \dots, n_a, & i_2 = 1, \dots, n_b, \\ i_3 = 0, \dots, n_a, & i_4 = 1, \dots, n_b \end{cases}$$

(仮定 4) つぎの関係が成り立つ。

$$E[\zeta(k)w(k-i)] = 0 \quad \forall i = 0, \dots, n_a \quad (38)$$

これらの仮定の妥当性についても 3.2.3 で議論する。

仮定 1, 3, 4, が成り立つならば、前節と同様に、量子化誤差項の補正を行うことで補助変数法での近似推定解をつぎのように得られる。

$$\hat{\theta}_{\text{adj}}^{\text{IV}} = \left[\sum_{i=n+1}^N \left(\zeta(k)\bar{\phi}_w(k)^T - \Delta_1 \right) \right]^{-1} \sum_{i=n+1}^N \zeta(k)\bar{y}_w(k) \quad (39)$$

また、量子化誤差に関して提案法と同種の仮定を追加することで、最小二乗法により推定されるパラメータ値は

$$\hat{\theta}_{\text{adj}}^{\text{LS}} = \theta_0 + \left[\sum_{i=n+1}^N \bar{\phi}_w(k)\bar{\phi}_w(k)^T \right]^{-1} \times \sum_{i=n+1}^N (-\delta\phi_w(k)\delta\phi_w(k)^T - \psi_w(k)\psi_w(k)^T)\theta_0 \quad (40)$$

と計算される。この値には雑音の二乗項 $\psi_w(k)\psi_w(k)^T$ が現れるため、雑音の影響を直接受けることがわかる。(33) 式と同様に量子化の補正を行うことはできるが、雑音に対してバイアスを生じない推定を行うには、雑音の自己相関に関する情報を得る必要がある。

(注意 1) 本論文で対象としている問題において、量子化誤差を雑音とみなすことは、変数誤差モデル [10] の同定問題に置き換えているととらえることもできる。変数誤差モデルの同定でバイアスのない推定を行うためには、雑音の性質を考慮に入れる必要がある。とくに、この雑音が白色である場合の分散を推定する問題などが考えられている [11,12]。しかし、量子化誤差の場合には、

量子化器への入力 of の性質次第で、量子化精度に特徴付けられた量として分散値のよい近似値を得ることができる。

岡尾ら [7] により提案されている方法は、雑音の影響を考慮した手法ではなく、最適化問題の評価関数が二乗誤差に基づくものであるため、最小二乗法と同様に雑音の影響を受けやすいと考えられる (少なくとも量子化精度が限りなく 0 に近づいたとき、この方法は最小二乗法と一致するため、雑音の影響を受けることになる)。また、雑音のある場合に精度良くパラメータを推定するためには入出力情報をできるだけ多く用いた方が有利である。ここで提案した方法は、多くの入出力情報を用いた場合にも大きな計算量を必要としないため、実用性が高いと考えられる。

3.2.3 仮定の妥当性

前述した量子化誤差に関する仮定に関して考察を加える。仮定 2 は仮定 3 の特別な場合とみなせるため、仮定 1, 3, 4 が成立するための条件について考察する。

(a) 仮定 1 について

一定の精度をもつ量子化器により量子化される場合に、量子化誤差が一様分布を成す条件とその白色性について、それぞれの必要十分条件が Spirad ら [13] により与えられている。この条件は、量子化器への入力の確率密度関数を Fourier 変換することで得られる特徴関数を用いて与えられる [14]。このため、個々の確率密度関数についてこの条件を考察する必要がある。ここでは、代表的な分布である正規分布を対象に条件の成否を考察する。

まず、分布が一様となるのは、入力が正規分布に従うのであれば、量子化精度が 0 もしくは入力の分散が ∞ となる場合に限られる。しかしながら、量子化精度に比べて十分な大きさの分散をもつときこの条件が近似的に満たされることが知られており、実際に分散が σ_u^2 で平均 0 の正規分布であるならば、

$$E[\delta u(k)^2] = \frac{M_i^2}{12} \left[1 + \frac{12}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \exp\left(-\frac{2\pi^2 n^2 \sigma_u^2}{M_i^2}\right) \right] \quad (41)$$

と計算される¹[13]。また、白色性の必要十分条件は、量子化誤差が一様に分布し、各時刻での量子化誤差の確率密度分布が他の時刻に依存しないことである。したがって、量子化前の入力信号が白色で、かつ量子化精度に比べ大きな分散の正規分布をなすことで、白色性も近似的に成立する。

(b) 仮定 3 について

変数 $x(k)$ は、インパルス応答 $H_{\hat{\theta}}(k)$ を用いて、つぎのように表すことができる。

$$x(k) = \sum_{i=0}^k H_{\hat{\theta}}(k-i)(u(i) - \delta u(i)) \quad (42)$$

この式を代入することで、(35) 式の成否は、 $u(k)$ と $\delta y_w(k)$ および $\delta u(k)$ と $\delta y_w(k)$ の相関性に帰着されることがわかる。また、(25) 式の左辺は次のようになる。

$$E[x(k-i_1)\delta u(k-i_4)] = \sum_{i=0}^{k-i_1} H_{\hat{\theta}}(k-i) \times (E[u(i)\delta u(k-i_4)] - E[\delta u(i)\delta u(k-i_4)]) \quad (43)$$

ここで、仮定 1 についての議論より、入力が正規白色信号である場合を考える。 $u(k)$ が白色信号であれば、 $u(k)$ と $\delta u(k)$ の相関性は異なる時刻同士のものに相関はない。また、同じ時刻同士の積の期待値 $E[u(k)\delta u(k)]$ は、入力が分散 σ_u^2 、平均 0 の正規分布に従うならば、

$$E[u(k)\delta u(k)] = -2\sigma_u^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{2\pi^2 n^2 \sigma_u^2}{M_i^2}\right) \quad (44)$$

であり、ある程度大きな分散をもつならば近似的に 0 となる¹[13]。これと $E[\delta u(k)^2] = M_i^2/12$ という関係を、(43) 式に用いることで、(25) 式が近似的に成立することがわかる。

また、 $u(k)$ と $\delta y_w(k)$ 、 $\delta u(k)$ と $\delta y_w(k)$ の相関性に関して、同定対象の入出力が因果的ならば、 $i_2 \leq i_3$ について相関はもたない。 $i_2 > i_3$ の場合については、同定対象にも大きく依存するが、 $u(k)$ と $w(k)$ が独立に発せられ、 $y_w(k)$ が十分な大きさをもつ信号であるならば、一般に相関が生じるとは考えられない。これより、仮定として (35)–(37) 式をおくことは妥当である。

(c) 仮定 4 について

仮定 4 は $\zeta(k)$ と $w(k)$ の相関性に関する仮定であるが、さきに言及したように $\zeta(k)$ は観測入力値 $\bar{u}(k)$ から計算されるものである。したがって、この仮定が成立する条件は、 $w(k)$ が $u(k)$ と相関をもたないことである。本論文の範疇の外となるが、この仮定が破られる状況の一つとして、モデル化されないダイナミクスの存在が考えられる。

以上より本節の結論として、入力が正規白色雑音で、量子化精度に比べ十分大きな分散値をもつならば、提案する方法は有効であるといえる。

3.3 多段階アルゴリズム

補助変数法では、予備的に推定されたパラメータを用いて補助変数を生成し、同定を行う。その補助変数を生成するときのパラメータの精度が最終的な推定パラメータの精度に影響することが知られており、これを考慮した 4 段階アルゴリズムが知られている [9]。これにならい、本章で与えた方法をもとに、4 段階アルゴリズムから入出力データのフィルタリングを除いた、以下の 3 段階アルゴリズムを提案する。

1. 最小二乗法 (19) によりパラメータを推定する。
2. 提案法 (32) によりパラメータを推定する。
3. (17), (30) 式中 $\hat{\theta}^{\text{LS}}$ を $\hat{\theta}_{\text{adj}}^{\text{IV}}$ で置き換え $\zeta(k)$, Δ_1

¹ 具体的な値を付録に示す。

を再定義し、再び提案法 (32) で推定を行う。

なお、本アルゴリズムの有効性を、続く章の数値例にて検証する。

4. 数値例

以下に数値例を与える。同定対象は Fig. 1 で表される系で、

$$A(q) = 1 - 1.537q^{-1} + 0.905q^{-2}$$

$$B(q) = 0.189q^{-1} + 0.179q^{-2}$$

$$M_i = 1, M_o = 1$$

であるとする。入力 $u(k)$ には平均 0、分散 1 の正規性白色雑音を用い、出力雑音 $w(k)$ については、(a) 雑音のない場合 ($\sigma_w^2 = 0$) と (b) 分散 0.25 の正規性白色雑音加わる場合 ($\sigma_w^2 = 0.25$) について行った。このうち雑音がある場合についての、入出力の実際の値と観測値の例を Fig. 2 に示す。(a) が入力、(b) が出力の図であり、それぞれ細い実線が実際のプラント入出力値、太い実線が観測値を示している。また (b) 中の一点鎖線は、量子化される前の雑音を含んだ出力を示している。

Fig. 2 Original I/O data and its quantized values

図のような観測された入出力のデータ数 N を 100×2^i , $i = 0, 1, \dots, 9$ とし、補正を施した補助変数法 (32) と最小二乗法 (33), 補正のない補助変数法 (11) と最小二乗法 (19), 3.3 節で提案した 3 段階アルゴリズムと従来の 4 段階アルゴリズム [9] による同定を、各条件につき 1000 回ずつ試行した。また、計算量の問題から $N = 100, 200$ の場合に限り、岡尾らの方法も試行した。このときの計

算時間について、提案手法である 3 段階アルゴリズムが $N = 51200$ の場合に平均 1.34 秒を要したのに対し、岡尾らの方法は $N = 200$ の場合に平均 175 秒を要した。なお、計算は PentiumIV 3GHz の PC 上で行った。

各方法により推定されたパラメータ値の真値からの分散 $1/N \cdot \sum_{i=1}^N \|\hat{\theta} - \theta_0\|^2$ を求め、その結果のうち雑音のない場合を Fig. 3 (a), ある場合を (b) に示す。両図とも縦軸が分散、横軸が同定に用いたステップ数であり、◇が補正のない LS 法、+が補正を行った LS 法、□が補正のない IV 法、△が 4 段階アルゴリズム IV 法、○が補正を行った IV 法、☆が提案した 3 段階アルゴリズム、*が岡尾らの方法による結果をそれぞれ示している。

(a) Noise free case ($\sigma_w^2 = 0$)

(b) Noise corrupted case ($\sigma_w^2 = 0.25$)

Fig. 3 Variances of estimated parameters for various methods

これより、補正を加えた最小二乗法では、雑音のない場合には、データ数を増やすことでよい推定パラメータが得られている。これは、量子化誤差に対する近似補正の有効性を示している。しかし、雑音のある場合には、3.2.2 で指摘したようにその影響を受けるため、データ数を増やしても同定精度がほとんど改善されない。一方、

補助変数法を用いた方法でも、雑音のない場合に補正を行うことで、パラメータの推定精度が最小二乗法と同程度向上していることがわかる。これに加え、3段階アルゴリズムにより推定精度が改善されている。さらに、雑音のある場合にも、データ数が増えることで同定精度の改善が見られ、提案法の有効性が確認できる。しかしながら、3段階アルゴリズムでは、短いデータ数に関して同定精度が悪化していることがわかる。このことに関連するが、3段階アルゴリズムでは雑音の強度が上がった場合に、逆行列の条件数が悪化する傾向が見られた。4段階アルゴリズム補助変数法は、提案した3段階の結果に比べ、漸近的なパラメータの推定精度では劣るものの、その推定パラメータの収束の早さは特筆に値する。これは、4段階アルゴリズムが入出力をフィルタリングしたうえで、パラメータを推定しているためである。しかしながら、フィルタリングにより、量子化誤差のもつ性質が失われてしまうため、提案法ではこのようなフィルタは用いることができない。

5. おわりに

本論文では、入出力が一樣に量子化され観測されるシステムで、量子化前の出力が、同定対象のモデル出力値以外に外生的な雑音を含む問題を考え、補助変数法を用いた場合に推定されるパラメータの解析を行った。そこで、量子化誤差に対し統計的に対処するアプローチをとり、量子化誤差により生じる推定パラメータ中のバイアスを近似的に補正する方法を与えた。そして、そのときの近似の成立するための条件に関して考察を加え、入力が正規性白色信号であるならば、提案法による推定値が妥当となることを明らかにした。また、出力のみが量子化される場合については、通常の補助変数法を用いることで、量子化の影響を陽に考慮する必要がないという結果を得た。最後に、数値例で既存の方法と提案した方法を比較し、有効性を検証した。

参考文献

- [1] R. E. Curry: *Estimation and Control with Quantized Measurements*, M.I.T. Press (1970)
- [2] D. F. Delchamps: Stabilizing a linear system with quantized state feedback; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 35, No. 8, pp. 916–924 (1990)
- [3] R. Brockett and D. Liberzon: Quantized feedback stabilization of linear systems; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 45, No. 7, pp. 1279–1289 (2000)
- [4] N. Elia and S. K. Mitter: Stabilization of linear systems with limited information; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 46, No. 9, pp. 1384–1400 (2001)
- [5] H. Ishii and T. Başar: An analysis on quantization effects in H_∞ parameter identification; *Proc. of IEEE Conference on Control Applications 2004*, pp. 468–463 (2004)
- [6] K. Tsumura and J. Maciejowski: Optimal quantization of signals for systems identification; *Proc. European Control Conference 2003* (2003)
- [7] 岡尾, 池田, 高橋: 有限語調データに基づくシステム同定—ナノオーダー制御に向けて—; 計測自動制御学会論文集, Vol. 41, No. 1, pp. 31–36 (2005)
- [8] 岡田, 足立, J. M. Maciejowski: 非線型性をもつセンサを用いたシステム同定; 計測自動制御学会論文集, Vol. 41, No. 2, pp. 142–148 (2005)
- [9] L. Ljung: *System Identification: Theory for the User, Second Edition*, Prentice Hall (1999)
- [10] T. Söderström: Identification of stochastic linear systems in presence of input noise; *Automatica*, Vol. 17, No. 5, pp. 713–725 (1981)
- [11] U. Soverini and T. Söderström: Identification methods of dynamic systems in presence of input noise; *Proc. of IFAC System Identification 2000* (2000)
- [12] 姚, 金江, 楊, 和田: 入出力観測雑音がある場合のシステム同定法について; 計測自動制御学会第34回制御理論シンポジウム資料, pp. 83–86 (2005)
- [13] A. B. Spirad and D. L. Snyder: A necessary and sufficient condition for quantization errors to be uniform and white; *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc.*, Vol. 25, No. 5, pp. 442–448 (1977)
- [14] B. Widrow, I. Kollár and M. C. Liu: Statistical theory of quantization; *IEEE Trans. on Instrum. Meas.*, Vol. 45, No. 2, pp. 353–361 (1996)

付 録

正規分布入力に対する一樣量子化の統計的性質について

正規分布入力に対する量子化誤差の統計的性質が [13] で詳しく解析されている。ここでは、本論文での提案法の近似精度について言及するために、その結果の一部を引用する。平均値 0、分散 σ^2 の分布に従う x が、一定の量子化精度 M で量子化されるとき、量子化誤差の値を δx と記述すると、 $E[x \cdot \delta x]$ および $E[\delta x^2]$ の値はそれぞれ Fig. A1 (a), (b) のようになる。縦軸がそれぞれの期待値、横軸が正規分布入力の分散と量子化精度の比である。Fig. A1 (b) の点線は $\Delta^2/12$ の値を表しており、 σ^2/M^2 の値が大きくなることで、本論文での近

Fig. A1 Statistical quantification of the quantization error

似値に近づくことがわかる． σ が十分大きい部分について，Fig. A1 から近似精度を判別することはできないので，参考までに近似精度を Table A1 に与える．これより，観測された値のヒストグラムから元の信号の分散を推定できれば，提案法での近似が妥当となる目安を与えることができる．

Table A1 Approximation accuracy of the quantization error

σ^2/M^2	0.3	0.4	0.5
$E[x \cdot \delta x]/M^2$	0.0109	0.0035	0.0006
$E[\delta x^2]/M^2$	0.9960/12	0.9994/12	0.9999/12