ℓ_2 性能保証領域に基づく飽和を有する離散時間ロバスト制御系の切替制御と実験的検証*

長谷川貴紀[†]・木山 健[†]・竹川 正浩[†]

Switching Control and Its Experimental Verification Based on Domain of ℓ_2 Performance for Discrete-time Robust Control Systems with Saturation Nonlinearities*

Takanori HASEGAWA[†], Tsuyoshi KIYAMA[†] and Masahiro TAKEKAWA[†]

This paper considers methods for regional robust ℓ_2 performance analysis and its state feedback control synthesis of linear time invariant discrete-time systems with saturation nonlinearities via a polytopic approach for the nonlinearities. For the analysis and synthesis, a domain of ℓ_2 performance is defined as a domain of initial states guaranteed with ℓ_2 performance and exponential stability one. The solvability conditions of the analysis and synthesis problem based on the domain can be recasted as linear matrix inequalities via level sets of quadratic Lyapunov functions, the polytopic approach and constant scaling matrices for the robustness. However, the single state feedback gain without switching cannot achieve non-conservative control performance due to evaluating an admissible set of the exogenous inputs to be large. Specifically, when the exogenous input, the state and the performance output are measurable such as a tracking control problem for servo control systems, this paper proposes a switching control of the state feedback gains designed by the derived synthesis conditions using off-line computation in order to reduce conservativeness of the results without the switching. Finally, this paper verifies effectiveness of our proposed switching control method through a simulation and an experiment.

1. はじめに

実際のシステムでは、物理的な制約や制御対象の保護などの観点から、アクチュエータの出力可能な大きさに必ず限界が存在する。したがって、厳しい性能を要求するために非常に大きな入力が必要とする場合、制御対象への入力が飽和してしまう。この飽和を考慮せずに設計したコントローラをシステムに実装してしまうと性能がいちじるしく劣化してしまったり、最悪の場合はシステムが不安定化してしまう場合がある。そこで、十分な制御性能を発揮させるには、飽和（拘束）を考慮した設計 [1–7] が重要である。

これらの拘束システムの代表的設計方法には、拘束条件の影響をあらかじめ考慮してフィードバックコントローラを設計する方法 [1–6]、また、コントローラを含

む閉ループ系はすでに与えられているとし、拘束条件を満たすように制御系への入力を整形する方法 [7] の二つが存在する。前者に関する研究として、近年、2次形式の Lyapunov 関数のレベルセットを用いて線形行列不等式 (LMI) の枠組みで円板条件、Popov 条件を適用し、ある範囲の飽和を許容する安定性や性能の解析および設計を行う手法 [1]、また、スカラーの飽和要素を有する線形時不変 (LTI) 系に対して、2次形式の Lyapunov 関数のレベルセットを用いた安定解析において、このレベルセットが吸収領域となるための必要十分条件を与える手法、すなわち、飽和要素をポリトープ的に扱う手法 [2] が提案されてきている。これらの手法の特徴は、保守的な解析や設計の結果を与えがちである一方、ロバスト性などを考慮しやすい利点をもつ。ただ、この保守性のためか、得られた設計結果を実機に搭載し、実験的検証を行った例は現在のところ多いとはいえない状況である。

また、拘束条件を考慮した最適制御問題を扱うモデル予測制御の構成法として、マルチパラメトリック計画法を用いた手法および、LMI 表現に基づくモデル予測制御の手法 [3] が提案されてきている。これらの手法は、実装する際に生じるシステムの不確かさやノイズは通常

* 原稿受付 2006年9月4日

[†] 大阪大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Osaka University; 2-1, Yamada-oka, Suita, Osaka 565-0871, JAPAN

Key Words: exponential stability, polytopic approach, D-scaling, state feedback control, linear matrix inequality (LMI).

存在しないものとして設計が行われ、これらの不確かさやノイズに対するロバスト性に関しては現在研究が進められている途中段階である [4]。この不確かさなどに対処する場合、設計で考慮するステップ数が増せば増すほど考慮しなければならない不確かさが増してしまう結果となり、設計にかかる計算量が膨大になってしまう問題点がある。

一方、拘束条件を満たすように制御系への入力を整形する後者の方法では、同様に通常は不確かさのない制御系に対して目標信号が既知であり、その信号に追従し、かつ、つねに拘束条件を満たす参照入力を整形する手法 [7] が提案されてきている。また、実験的検証も行われてきている。しかし、ロバスト性を考慮せず整形を行うと、実装する際に生じるシステムの不確かさやノイズの影響のために、拘束条件を実際には達成できない場合も生じ、不確かさがある場合にでもつねに拘束条件を満たすように、逐次観測した状態をもとに参照入力の整形を行うと、著しく結果が保守的になる問題点も存在するようである。

以上より、本論文では、まず一般的に飽和および不確かさを有する非線形離散時間系に対し、非線形離散時間系の性能指標となる \$l_2\$ 性能保証領域、とくに \$l_2\$ 性能および指数安定性能を保証する吸収領域（以下ではこの領域を \$l_2\$ 性能保証領域とよぶ）を定義し、この領域の解析の十分条件を導出する。そして、飽和および不確かさを有する線形時不変 (LTI) 系に対し、\$l_2\$ 性能保証領域の候補として 2 次形式の Lyapunov 関数のレベルセットに限定し、飽和関数をポリトープ的に扱う手法で、また、不確かさを定数スケーリング行列を用いることで、\$l_2\$ 性能保証領域の解析条件を線形行列不等式 (LMI) で導出する。

つぎに、この解析条件に基づく状態フィードバック制御問題の可解条件が LMI で導出可能なこと、これにより理論的に \$l_2\$ 性能、指数安定性能およびロバスト性を事前に考慮した設計が可能であることを示す。しかしながら、この設計問題をたんに解くことで得られる単一の状態フィードバックコントローラでは、既知の大きさの外生入力に対して、保守的な設計結果をもたらす場合がある。この保守性について考察し、目標値追従制御問題のように参照入力を外生入力として扱い、その大きさが既知また閉ループ系の状態および \$l_2\$ 性能評価信号が計測可能な問題に対して、\$l_2\$ 性能保証領域に基づくオフライン型の切替制御を提案する。これが本論文の第一の主結果である。この結果を受け、シミュレーションおよび実験を行い、オンラインでの計算量を軽減したオフライン型の切替制御手法が、モデル化誤差やノイズなどの不確かさを有する実システムへ理論的な保証のもとに実装可能で、良好な制御結果が得られることを示す。これが本論文の第二の主結果である。

表記：ベクトル \$x\$ に対して \$x_i\$ は \$i\$ 番目の要素であり、

また、\$\|x\|\$ はユークリッドノルムを表す。行列 \$M\$ に対し \$M^T\$ は転置行列、\$^i M\$ は \$i\$ 行目のベクトル、\$\sigma_{\max}(M)\$ は行列 \$M\$ の最大特異値を表す。正方行列 \$Y\$ に対し \$\text{He}Y := Y + Y^T\$ を定義する。対称行列 \$X\$ に対して、\$X > 0\$ (\$X \geq 0\$) は正定 (準正定) 行列を意味する。ラプラス演算子 \$s\$ およびサンプリング周期 \$h\$ に対し、差分演算子 \$\delta := (e^{hs} - 1)/h\$ を定義する [8]。なお、差分演算子 \$\delta\$ は \$h \rightarrow 0\$ とするとラプラス演算子 \$s\$ に収束する性質をもつ。サンプリング周期 \$h\$ の離散時間信号 \$w\$ に対する \$l_2\$ ノルムを \$\|w\|_{l_2} := (h \sum_{k=0}^{\infty} w_k^T w_k)^{1/2}\$、\$l_2(0, \tau)\$ ノルムを \$\|w\|_{l_2(0, \tau)} := (h \sum_{k=0}^{\tau} w_k^T w_k)^{1/2}\$ で定義する。最後に、行列 \$M_1, M_2\$ に対して、ブロック対角行列 \$\text{diag}\{M_1, M_2\} := \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}\$ を定義する。

2. \$l_2\$ 性能保証領域の解析

2.1 問題設定と準備

Fig. 1 Uncertain feedback system with saturation non-linearity

本論文では、Fig. 1 のフィードバック系で表されるシステムを考える。ただし、\$\mathcal{H}(\delta)\$ は線形時不変 (LTI) システムで、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta x_k \\ z_k \\ z_{dk} \\ z_{pk} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B_1 & B_{2d} & B_{2p} \\ C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_{2d} & D_{2d} & D_{dd} & D_{dp} \\ C_{2p} & D_{2p} & D_{pd} & D_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \\ w_{dk} \\ w_{pk} \end{bmatrix} \\ &=: \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & 0 \\ C_2 & D_1 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \\ w_{dk} \\ w_{pk} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

により与えられ、\$x_k \in \mathbb{R}^n\$, \$u_k \in \mathbb{R}^m\$, \$w_{dk} \in \mathbb{R}^{m_d}\$, \$w_{pk} \in \mathbb{R}^{m_p}\$, \$z_k \in \mathbb{R}^m\$, \$z_{dk} \in \mathbb{R}^{m_d}\$, \$z_{pk} \in \mathbb{R}^l\$ である。また、\$\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m\$ は飽和関数であり、

$$\begin{aligned} u_k &= \phi(z_k) \Leftrightarrow \\ i u_k &= \phi^i(z_k) = \begin{cases} i\sigma & (|z_k| > \sigma) \\ z_k & (|z_k| \leq \sigma) \\ -i\sigma & (|z_k| < -\sigma) \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

により定義される．ここで， σ は各要素が正の与えられたベクトルである．また， $\Delta \in \mathbb{R}^{m_d \times m_d}$ は実行列のサブセット

$$\Delta := \{ \Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{l_1}, \dots, \delta_s I_{l_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_f) : \\ \delta_i \in \mathbb{R}, \Delta_i \in \mathbb{R}^{l_{s+i} \times l_{s+i}}, \sigma_{\max}(\Delta) \leq 1 \} \quad (3)$$

$$m_d := \sum_{i=1}^{s+f} l_i$$

に属する変動行列であり，

$$w_{dk} = \Delta z_{dk}$$

である．また，与えられたスカラー $\theta \geq 0$, $\xi > 0$ に対して，

$$\mathcal{W}(\theta, \xi) := \{w_p : \|w_p\|_{\ell_2(0, \tau)}^2 \leq \|z_p\|_{\ell_2(0, \tau)}^2 / \xi^2 + \theta^2, \\ \forall \tau \in [0, \infty)\}$$

を定義する．本論文では $\mathcal{W}(\theta, \xi)$ に属する $\ell_2(0, \tau)$ ノルムが有界な外生入力 w_p を考える．さらに，一般的な（すなわち 2 次形式とは限らない）Lyapunov 関数 $V(x_k)$ を用い，与えられた $\zeta \geq 0$ に対して

$$\mathcal{X}(\zeta) := \{x_k \in \mathbb{R}^n : V(x_k) \leq \zeta\} \quad (4)$$

のレベルセットを定義しておく．

このようなシステムに対して， ℓ_2 性能保証領域を次のように定義する．

【定義 1】 サンプリング周期 h ，Lyapunov 関数 $V(x_k)$ ，スカラー $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$, $\varepsilon \geq 0$ が与えられているとする．このとき，

- (1) 任意の $w_p \in \mathcal{W}(\beta, \gamma)$ を加えた場合， $\mathcal{X}(\alpha^2)$ 内の任意の点を初期値とする状態軌道がすべての時間で $\mathcal{X}(\alpha^2 + \beta^2)$ 内に留まり，かつ ℓ_2 性能条件

$$\|z_p\|_{\ell_2(0, k)} \leq \gamma(\|w_p\|_{\ell_2(0, k)} + \alpha), \quad \forall k \in [0, \infty) \quad (5)$$

を満たす．

- (2) とくに $w_p = 0$ の場合， $\mathcal{X}(\alpha^2 + \beta^2)$ 内の任意の点を初期値とする状態軌道がすべての時間で $\mathcal{X}(\alpha^2 + \beta^2)$ 内に留まり，かつ指数安定性能条件

$$\|x_k\| \leq \mu \|x_0\| e^{-\varepsilon k h}, \quad \forall k \in [0, \infty) \quad (6)$$

を満たす $\mu > 0$ が存在する．

このときの初期状態の領域 $\mathcal{X}(\alpha^2)$ をレベル $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ の ℓ_2 性能保証領域と定義する．ただし，以下ではとくにことわらない限り，このレベル $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ の ℓ_2 性能保証領域を，たんに ℓ_2 性能保証領域と記述する．

本論文で考える解析問題は，上記のシステムに対し ℓ_2 性能保証領域を求める手法を提案することである．とくに，そのような領域は一般に唯一ではなく，ここではそ

のような領域のうち指数安定性能 (6) が最も「高い」もの，すなわち， ε が最大のものを求めることが望ましい．まず ℓ_2 性能保証領域を理論的に特徴づけることを行い，その後指数安定性能の最大化について議論する．

つぎに，本論文で用いるポリトープ的手法 [2] を紹介する．この条件は飽和要素をポリトープ的に扱ったもので，2 次形式の Lyapunov 関数を用いたスカラーの飽和要素を有するシステムの安定解析において必要十分条件を与えるものである [2]．

まず，与えられた行列 $N \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して，局所領域

$$\mathcal{L}(N) := \{x_k \in \mathbb{R}^n : |{}^i N x_k| \leq {}^i \sigma, i \in [1, m]\}$$

を定義する．つぎに， $\mathbb{E}$ を $m \times m$ 次元の 0 と 1 の要素から構成される対角行列の集合とする．たとえば $m = 2$ のとき， $\mathbb{E}$ は

$$\mathbb{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

のように表される．この集合 $\mathbb{E}$ は 2^m 個の要素を持つ．ここで， $\mathbb{E}$ のそれぞれの要素を E_j , $j \in [1, 2^m]$ とすると， $\mathbb{E}$ は

$$\mathbb{E} := \{E_j : j \in [1, 2^m]\}$$

のように表される． $E_j^- := I - E_j$ とすると， E_j^- も集合 $\mathbb{E}$ の要素である．そこで，与えられた二つの行列 K ， $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して，

$$\{E_j K + E_j^- H : j \in [1, 2^m]\} \quad (7)$$

を考えると，(7) 式は行列 K のある行ベクトルと残りを行列 H の行ベクトルから抽出して構成される行列の集合である．これらのことを利用した次の補題が知られている [2]．

【補題 1】 行列 K ， $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ が与えられているとする．また， $x_k \in \mathcal{L}(H)$ ，すなわち $|{}^i H x_k| \leq {}^i \sigma$, $\forall i \in [1, m]$ とする．このとき，

$$\phi(K x_k) \in \mathbf{Co}\{E_j K x_k + E_j^- H x_k : j \in [1, 2^m]\}$$

が成立する．ただし， $\mathbf{Co}$ は Convex hull を意味し，すなわち，任意の与えられた $x_k \in \mathcal{L}(H)$ に対し，

$$\exists \rho_j \geq 0 \quad \forall j \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{2^m} \rho_j = 1, \\ \phi(K x_k) = \sum_{j=1}^{2^m} \rho_j (E_j K + E_j^- H) x_k \quad (8)$$

が成立する．

2.2 ℓ_2 性能保証領域解析の十分条件

本項では， ℓ_2 性能保証領域を理論的に特徴づける．まず，一般的な Lyapunov 関数を用いて，その関数のレベ

ルセットが ℓ_2 性能保証領域となるための十分条件を与える．つぎに，Lyapunov 関数を 2 次形式に限定し，与えられたスカラー $\zeta \geq 0$ に対して楕円領域が ℓ_2 性能保証領域であるための十分条件を得る．

つぎの補題は，非線形系の ℓ_2 性能保証領域を一般的な Lyapunov 関数を用いて特徴づけるものであり，システム (1) の領域的 ℓ_2 性能および指数安定性能の解析の基礎を与える．

【補題 2】 (3) 式で定義されるサブセット Δ に属する変動行列 Δ の不確かさを有する非線形系

$$\begin{aligned}\delta x_k &= f(x_k, w_{pk}) \\ z_{pk} &= g(x_k, w_{pk})\end{aligned}\quad (9)$$

を考える．ただし， $f: \mathbb{R}^{n+m_p} \rightarrow \mathbb{R}^n$ および $g: \mathbb{R}^{n+m_p} \rightarrow \mathbb{R}^l$ は連続関数であり， $f(0,0)=0$ を満たすとする．もし，任意の整数 $k \geq 0$ に対して，正のスカラー $a, b, c > 0$ および連続関数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し，

$$\begin{aligned}a\|x_k\|^2 &\leq V(x_k) \leq b\|x_k\|^2, \quad \forall x_k \in \mathcal{X}(\alpha^2 + \beta^2), \\ \frac{V(x_{k+1}) - V(x_k)}{h} - w_{pk}^T w_{pk} &+ \frac{1}{\gamma^2} g^T(x_k, w_{pk}) g(x_k, w_{pk}) \\ &+ \frac{1 - e^{-2\epsilon h}}{h} V(x_k) \leq -c\|x_k\|^2 \\ \forall x_k &\in \mathcal{X}(\alpha^2 + \beta^2), \quad w_p \in \mathcal{W}(\beta, \gamma), \quad \Delta \in \Delta\end{aligned}\quad (10)$$

を満たすならば， $\mathcal{X}(\alpha^2)$ はレベル $(\alpha, \beta, \gamma, \epsilon)$ の ℓ_2 性能保証領域である．

(証明) 任意の $w_p \in \mathcal{W}(\beta, \gamma)$ を加えた場合，条件 (10) において， x_k を解軌道上の点 $x(kh)$ で置き換え，また， $(1 - e^{-2\epsilon h})V(x(kh))/h \geq 0$ から

$$\delta V(x(kh)) - w_{pk}^T w_{pk} + \frac{1}{\gamma^2} z_{pk}^T z_{pk} \leq 0, \quad \forall k \in [0, \infty)\quad (11)$$

を得る．ただし， $\delta V(x(kh))$ は $V(x(kh))$ のサンプリング周期 h に関する差分である． $k=0$ から任意の整数 $k=\tau \geq 0$ まで和をとり $w_p \in \mathcal{W}(\beta, \gamma)$ と $x(0) \in \mathcal{X}(\alpha^2)$ より，

$$\begin{aligned}V(x((\tau+1)h)) &\leq V(x(0)) + h \sum_{i=0}^{\tau} w_{pi}^T w_{pi} \\ &\quad - \frac{h}{\gamma^2} \sum_{i=0}^{\tau} z_{pi}^T z_{pi} \\ &\leq \alpha^2 + \beta^2, \quad \forall \tau \in [0, \infty)\end{aligned}\quad (12)$$

となる．すなわち，すべての $k \in [0, \infty)$ に対し $x(kh)$ は $\mathcal{X}(\alpha^2 + \beta^2)$ 内に留まる．以下，性能条件 (5), (6) を示す．条件 (11) より， $k=0$ から任意の整数 $k=\tau \geq 0$ まで和をとると，すべての $\tau \geq 0$ に対し $V(x((\tau+1)h)) \geq 0$ より

$$\begin{aligned}h \sum_{i=0}^{\tau} z_{pi}^T z_{pi} &\leq \gamma^2 h \sum_{i=0}^{\tau} w_{pi}^T w_{pi} + \gamma^2 V(x(0)), \\ \forall \tau &\in [0, \infty)\end{aligned}$$

となり， $w_p \in \mathcal{W}(\beta, \gamma)$ と $x(0) \in \mathcal{X}(\alpha^2)$ より

$$\begin{aligned}h \sum_{i=0}^{\tau} z_{pi}^T z_{pi} &\leq \gamma^2 \|w_p\|_{\ell_2(0, \tau)}^2 + \gamma^2 \alpha^2, \quad \forall \tau \in [0, \infty) \\ \|z_p\|_{\ell_2(0, k)} &\leq \gamma(\|w_p\|_{\ell_2(0, k)} + \alpha), \quad \forall k \in [0, \infty)\end{aligned}$$

を得る．したがって， ℓ_2 性能条件 (5) も成立する．また， $w_p=0$ の場合，条件 (10) において， x_k を解軌道上の点 $x(kh)$ で置き換え， $z_{pk}^T z_{pk}/\gamma^2 \geq 0$ および δ 演算子の定義から

$$\begin{aligned}\delta V(x(kh)) &\leq \frac{e^{-2\epsilon h} - 1}{h} V(x(kh)), \quad \forall k \in [0, \infty) \\ V(x((k+1)h)) &\leq e^{-2\epsilon h} V(x(kh)), \quad \forall k \in [0, \infty) \\ V(x(kh)) &\leq e^{-2\epsilon h} V(x((k-1)h)) \leq \dots \\ &\leq e^{-2\epsilon kh} V(x(0)), \quad \forall k \in [0, \infty)\end{aligned}$$

を得る．条件 (10) より，

$$\begin{aligned}a\|x(kh)\|^2 &\leq V(x(kh)) \\ &\leq V(x(0))e^{-2\epsilon kh} \leq b\|x(0)\|^2 e^{-2\epsilon kh} \\ \forall x(kh) &\in \mathcal{X}(\alpha^2 + \beta^2)\end{aligned}\quad (13)$$

となり，

$$\begin{aligned}\|x(kh)\|^2 &\leq \frac{b}{a}\|x(0)\|^2 e^{-2\epsilon kh}, \quad \forall x(kh) \in \mathcal{X}(\alpha^2 + \beta^2) \\ \|x(kh)\| &\leq \sqrt{\frac{b}{a}}\|x(0)\| e^{-\epsilon kh}, \quad \forall x(kh) \in \mathcal{X}(\alpha^2 + \beta^2)\end{aligned}$$

を満たす $\sqrt{b/a} > 0$ が存在する．したがって，指数安定性能条件 (6) も成立する． $\square$

サンプリング周期 $h \rightarrow 0$ とすると，補題 2 の (10) 式は，(9) 式に相当する非線形連続時間系に対する $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域 [5] を，一般的な Lyapunov 関数を用いて特徴づけるものに帰着される．すなわち，補題 2 の (10) 式は，非線形連続時間系の解析の基礎の条件を特別な場合として包含していることに注意していただきたい．

以下では，Lyapunov 関数のクラスを

$$V(x_k) := x_k^T P^{-1} x_k$$

のような 2 次形式に限定する．ここで， $P > 0$ は実対称行列である．したがって，Lyapunov 関数のレベルセット (4) を

$$\mathcal{E}(P, \zeta) := \{x_k \in \mathbb{R}^n : x_k^T P^{-1} x_k \leq \zeta\}\quad (14)$$

なる楕円領域として記述する．また，

$$f(x_k, w_{pk}) := \mathcal{A}_\Delta x_k + \mathcal{B}_{1\Delta} \phi(\mathcal{C}_1 x_k) + \mathcal{B}_{2\Delta} w_{pk}\quad (15)$$

$$g(x_k, w_{pk}) := \mathcal{C}_{2\Delta} x_k + \mathcal{D}_{1\Delta} \phi(\mathcal{C}_1 x_k) + \mathcal{D}_{2\Delta} w_{pk}\quad (16)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_\Delta & B_\Delta \\ C_\Delta & D_\Delta \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} A_\Delta & B_{1\Delta} & B_{2\Delta} \\ C_1 & 0 & 0 \\ C_{2\Delta} & D_{1\Delta} & D_{2\Delta} \end{bmatrix} \\ &:= \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & 0 \\ C_2 & D_1 & D_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{2d} \\ 0 \\ D_{dp} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \Delta(I - D_{dd}\Delta)^{-1} \begin{bmatrix} C_{2d} & D_{2d} & D_{dp} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を用いると、システム (1) は (9) 式の形式で表される。したがって補題 2 より、(14) 式で定義される楕円領域 $\mathcal{E}(P, \alpha^2)$ がシステム (1) のレベル $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ の ℓ_2 性能保証領域であるための十分条件は、

$$\begin{aligned} &2x_k^T P^{-1} q_k + h q_k^T P^{-1} q_k \\ &- w_{pk}^T w_{pk} + \frac{1}{\gamma^2} z_{pk}^T z_{pk} + \frac{1 - e^{-2\varepsilon h}}{h} x_k^T P^{-1} x_k \\ &\leq -c \|x_k\|^2 \\ &\forall x_k \in \mathcal{E}(P, \alpha^2 + \beta^2), \quad w_p \in \mathcal{W}(\beta, \gamma), \quad \Delta \in \Delta \\ &q_k := A x_k + B_1 \phi(C_1 x_k) + B_{2d} w_{dk} + B_{2p} w_{pk} \\ &z_{dk} = C_{2d} x_k + D_{2d} u_k + D_{dd} w_{dk} + D_{dp} w_{pk} \\ &w_{dk} = \Delta z_{dk} \end{aligned} \quad (17)$$

を満たす $c > 0$ が存在することとなる。

飽和要素の非線形性の対処法として、数多くの研究がなされてきている [1–6] が、本論文では、飽和要素の非線形性への対処として補題 1 で紹介したポリトープ的手法 [2] に基づき、 ℓ_2 性能保証領域を次のように理論的に特徴づける。

【定理 1】 (3) 式で定義されるサブセット Δ に属する変動行列 Δ の不確かさを有する $\mathcal{H}_\Delta(\delta) := C_\Delta(\delta I - A_\Delta)^{-1} B_\Delta + D_\Delta$ と (2) 式で定義される ϕ のフィードバック結合を考える。実対称行列 $P > 0$ とスカラー $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$, $\varepsilon \geq 0$ が与えられているとする。 $\mathbb{D}$ を Δ と可換なスケーリング行列の集合

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &:= \{ \text{diag}(D_1, \dots, D_s, d_1 I_{l_{s+1}}, \dots, d_f I_{l_{s+f}}) \\ &\quad : D_i \in \mathbb{R}^{l_i \times l_i}, d_i \in \mathbb{R}, D_i > 0, d_i > 0 \} \end{aligned} \quad (18)$$

と定義する。このとき、

$$\text{He} \begin{bmatrix} -hP/2 & hAP + hB_1 S_a & hB_2 \mathcal{V} & 0 \\ 0 & \mathcal{J} & B_2 \mathcal{V} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{V}/2 & 0 \\ 0 & C_2 P + D_1 S_a & D_2 \mathcal{V} & -\mathcal{V}/2 \end{bmatrix} < 0 \quad \forall j \in [1, 2^m] \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} P & \eta^i Z^T \\ \eta^i Z & i\sigma^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i \in [1, m] \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &:= (A + (1 - e^{-2\varepsilon h})/2h)P + B_1 S_a \\ S_a &:= (E_j C_1 P + E_j^- Z), \quad \eta := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \mathcal{V} &:= \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V} := \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を満たす行列 $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $V \in \mathbb{D}$ が存在するならば、 $\mathcal{E}(P, \alpha^2)$ はレベル $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ の ℓ_2 性能保証領域である。

(証明) (19) 式の左右から $\text{diag}\{I/h, P^{-1}, \mathcal{V}^{-T}, \mathcal{V}^{-1/2}\}$ とその転置行列を、(20) 式の左右から $\text{diag}\{P^{-1}, 1\}$ とその転置行列をかけ、 $H := ZP^{-1}$ を定義すると、

$$\text{He} \begin{bmatrix} -P/2h & A + B_1 S_b & B_2 & 0 \\ 0 & \mathcal{J} & P^{-1} B_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{V}^{-1}/2 & 0 \\ 0 & \mathcal{V}^{-1/2}(C_2 + D_1 S_b) & \mathcal{V}^{-1/2} D_2 & -I/2 \end{bmatrix} < 0 \quad \forall j \in [1, 2^m] \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & \eta^i H^T \\ \eta^i H & i\sigma^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i \in [1, m] \quad (22)$$

$$\mathcal{J} := P^{-1}(A + (1 - e^{-2\varepsilon h})/2h) + P^{-1} B_1 S_b$$

$$S_b := (E_j C_1 + E_j^- H), \quad \mathcal{I} := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix}$$

を得る。また、(21) 式に $v_j \geq 0 \quad \forall j \in [1, 2^m]$, $\sum_{j=1}^{2^m} v_j = 1$ で定義される v_j を用いると、

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{2^m} v_j \text{He} \begin{bmatrix} -P/2h & A + B_1 S_b & B_2 & 0 \\ 0 & \mathcal{J} & P^{-1} B_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{V}^{-1}/2 & 0 \\ 0 & \mathcal{V}^{-1/2}(C_2 + D_1 S_b) & \mathcal{V}^{-1/2} D_2 & -I/2 \end{bmatrix} < 0 \\ &\Leftrightarrow \text{He} \begin{bmatrix} -P/2h & A + B_1 S_c & B_2 & 0 \\ 0 & \mathcal{J} & P^{-1} B_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{V}^{-1}/2 & 0 \\ 0 & \mathcal{V}^{-1/2}(C_2 + D_1 S_c) & \mathcal{V}^{-1/2} D_2 & -I/2 \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$S_c := \sum_{j=1}^{2^m} v_j (E_j C_1 + E_j^- H)$$

を得る。さらに、(22) 式は文献 [2] の p.170 から

$$|{}^i H x_k| \leq {}^i \sigma, \quad \forall i \in [1, m], \quad x_k \in \mathcal{E}(P, \alpha^2 + \beta^2)$$

と等価である。したがって、(23) 式の (1,1) ブロックに Schur-complement を行い、得られた 3×3 ブロック行列の行列不等式の (3,3) ブロックに Schur-complement を行う。そして、その条件式の左側からシステム (1) の差分方程式の解 $[x_k^T, w_{dk}^T, w_{pk}^T]$ を、右側からその転置行列をかける。このとき、補題 1 の (8) 式により、(19) 式および (20) 式が

$$\begin{aligned} &2x_k^T P^{-1} q_k + h q_k^T P^{-1} q_k \\ &- w_{pk}^T w_{pk} + \frac{1}{\gamma^2} z_{pk}^T z_{pk} + \frac{1 - e^{-2\varepsilon h}}{h} x_k^T P^{-1} x_k \\ &< z_{dk}^T V^{-T/2} (\Delta^T \Delta - I) V^{-1/2} z_{dk} \leq 0 \\ &\forall x_k \in \mathcal{E}(P, \alpha^2 + \beta^2), \quad w_p \in \mathcal{W}(\beta, \gamma), \quad \Delta \in \Delta \\ &q_k := A x_k + B_1 \phi(C_1 x_k) + B_{2d} w_{dk} + B_{2p} w_{pk} \end{aligned} \quad (24)$$

となる。これは、(17) 式の十分条件となっていることがわかる。したがって、補題 2 より、 $\mathcal{E}(P, \alpha^2)$ はレベル

$(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ の ℓ_2 性能保証領域といえる。□

本論文で考える解析問題は、指数安定性能 (6) が最も高いもの、すなわち、 ε が最大のものを求めることが望ましいので、以下の最適化問題を考える。

実対称行列 $P > 0$ とスカラー $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$, $\varepsilon \geq 0$ が与えられているとする。

$$\min_{Z, V, e^{-2\varepsilon h}} e^{-2\varepsilon h} \quad \text{s.t. (19), (20)}$$

この最適化問題は、 $e^{-2\varepsilon h}$ を最小化することによって ε の最大化を行っている。また、この問題は変数に関して凸性をもち、内点法により最適解を得ることができる。

3. ℓ_2 性能保証領域の設計

本節では、まず、つぎの設計問題を考える。

(P) 定理 1 の解析条件に基づいて、状態フィードバックコントローラにより達成可能な ℓ_2 性能保証領域を特徴づけよ。

以下では、より具体的な問題設定を行い解を与える。さらに、問題 (P) の解となる状態フィードバックコントローラにより達成可能な ℓ_2 性能保証領域について考察を与える。

つぎに、この考察から状態観測に基づいて事前に設計された複数の状態フィードバックコントローラを切替えるオフライン型の切替制御を提案する。最後に、提案切替制御方法の有効性をシミュレーションと実験により示す。

3.1 問題設定

次の状態空間表現で与えられる LTI システムを考える。

$$\begin{bmatrix} \delta x_k \\ z_{dk} \\ z_{pk} \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C & D_1 & D_2 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_{dk} \\ w_{pk} \\ u_k \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$w_{dk} = \Delta z_{dk}$$

ただし、 $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$, $w_{pk} \in \mathbb{R}^{m_p}$, $y_k \in \mathbb{R}^n$ は、それぞれ状態変数、制御入力、外生入力、観測出力であり、観測出力として状態が計測可能であるとする。すなわち、 $y_k = x_k$ である。また、 $z_{dk} \in \mathbb{R}^{m_d}$, $w_{dk} \in \mathbb{R}^{m_d}$ は、それぞれ (3) 式で定義されるサブセット Δ に属する変動行列 Δ への入出力信号、 $z_{pk} \in \mathbb{R}^l$ は、 ℓ_2 性能評価信号である。この不確かさを有する制御対象に対して、状態フィードバックコントローラ $u_k = \mathcal{K}x_k$ を考える。問題 (P) では、飽和の制約条件を満たすコントローラ構造のうち最も単純なクラス、すなわち、

$$u_k = \phi(z_k), \quad z_k = Fx_k \quad (26)$$

の構造をもつ $\mathcal{K}$ を考える。ここで、 ϕ は (2) 式で定義される飽和関数であり、 F は実行列である。この場合、閉ループ系は Fig. 1 により表される。このとき、 ℓ_2 性

能保証領域を特徴づける基礎として定理 1 を用いると、問題 (P) はつぎのように記述できる。

問題 (P) 実対称行列 P と (3) 式で定義される不確かさを有する制御対象 (25) が与えられているとする。ある行列 Z と $0 < V \in \mathbb{D}$ に対して定理 1 の条件 (19), (20) を満たすコントローラ (26) が存在するための必要十分条件を求めよ。ただし、

$$\begin{bmatrix} \delta x_k \\ z_k \\ z_{dk} \\ z_{pk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_2 & B_1 \\ F & 0 & 0 \\ C & D_2 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \\ w_{dk} \\ w_{pk} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$w_{dk} = \Delta z_{dk}$$

は (25) 式を用いて得られる閉ループ系の状態方程式表現である。

3.2 ℓ_2 性能保証領域の設計条件

定理 1 に基づく上記の問題 (P) の解は、以下のとおりである。

【系 1】 実対称行列 $P > 0$, スカラー $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$, $\varepsilon \geq 0$, 各要素が正のベクトル $\sigma \in \mathbb{R}^m$ と (3) 式で定義されるサブセット Δ に属する変動行列 Δ の不確かさを有する制御対象 (25) が与えられているとする。また、 $\mathbb{D}$ を Δ と可換なスケーリング行列の集合 (18) と定義する。このとき、行列 P が定理 1 の条件 (19), (20) を満たす必要十分条件は、

$$\text{He} \begin{bmatrix} -hP/2 & hAP + hB_2S & hB_1V & 0 \\ 0 & J & B_1V & 0 \\ 0 & 0 & -V/2 & 0 \\ 0 & CP + D_2S & D_1V & -V/2 \end{bmatrix} < 0 \quad \forall j \in [1, 2^m] \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} P & \eta^i Z^T \\ \eta^i Z & i\sigma^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i \in [1, m] \quad (29)$$

$$J := (A + (1 - e^{-2\varepsilon h})/2h)P + B_2S$$

$$S := (E_j M + E_j^- Z), \quad \eta := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$V := \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \forall := \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix}$$

を満たす行列 $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $V \in \mathbb{D}$ が存在することである。また、この条件が成立するとき、レベル $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ の ℓ_2 性能保証領域 $\mathcal{E}(P, \alpha^2)$ を達成する状態フィードバックコントローラ (26) のゲイン $F := MP^{-1}$ が存在する。

(証明) 条件 (19), (20) において、

$$A := A, \quad B_1 := B_2, \quad B_2 := B_1, \quad C_1 := F,$$

$$C_2 := C, \quad D_1 := D_2, \quad D_2 := D_1$$

を定義すると、定理 1 の条件が成立する。□

3.3 考察

Fig. 2 Example of servo control systems

Fig. 3 Concept in design specification of Bode diagram of $G((e^{hj\omega} - 1)/h)$ from r to y

本節では、系 1 に基づく制御系設計の一つの方法として、Fig. 2 の閉ループ系 $G(\delta)$ の目標値追従制御問題を考える。外生入力 w_p として参照入力 r 、 ℓ_2 性能の評価信号 z_p として出力 y とする。 $r = w_p$ 、 $y = z_p$ であるため、 w_p 、 z_p および閉ループ系の状態 x が計測可能な制御問題である。このとき、 ℓ_2 性能保証領域で与える追従制御問題の設計仕様の概念は、Fig. 3 のように $G(\delta)$ のピークゲインを γ で抑えながら、制御帯域を ε で最大化することである。系 1 を用いて設計される $G(\delta)$ の特徴として、(12) 式および

$$V(x(\tau+1)h) \leq V(x(\tau)h) + h w_{p\tau}^T w_{p\tau} - \frac{h}{\gamma^2} z_{p\tau}^T z_{p\tau} \quad (30)$$

が成立する。したがって、(12)、(30) 式は共に $V(x((\tau+1)h))$ の上界値の見積りを与えている。しかし、 x 、 w_p 、 z_p が計測可能な制御問題では、(12) 式の $x(0)$ を初期値とする見積りと比較して、(30) 式の $x(\tau h)$ を初期値とする見積りの方がより正確であり、よりよい制御性能が期待できる。

以上の考察より、逐次 $x(kh)$ 、 $w_p(kh)$ 、 $z_p(kh)$ が計測可能な場合、各サンプリング点ごとに、つぎのサンプリング点の制御性能を保証する状態フィードバックゲインを切替える切替制御方法が考えられる。たとえば、逐次オンライン計算で状態フィードバックゲインを求め、リアルタイムでこのゲインの実装を繰り返すオンライン型の切替制御である [3]。しかし、この方法では、サンプリング点ごとに LMI の最適化問題を逐次解く必要があり、計算量が膨大となってしまう。このため、速い動きを行う制御対象やサンプリング周期が短い制御系の場合には実装が困難である。そこで、本論文では、目標値追

従制御問題のように閉ループ系の状態、外生入力、 ℓ_2 性能の評価信号が計測可能な問題に対して、実時間での計算の負荷の軽減を考慮するオフライン型の切替制御方法を以下で提案する。

3.4 オフライン型の切替制御

本項では、系 1 に基づいたオフライン型の切替制御方法を提案する。この提案方法は、まずいくつかの $\eta_0 < \dots < \eta_i < \dots$ を発生させる。つぎに、それぞれの η_i に依存して決まる楕円領域 $\mathcal{E}(P, \eta_i^2)$ それぞれが、 ℓ_2 性能保証領域になるように事前にオフラインでフィードバックゲイン F_i をそれぞれ設計し、 η_i に対応する F_i の表をあらかじめ作成する。ここで、状態 $x(kh)$ 、外生入力 $w_p(kh)$ および ℓ_2 性能評価信号 $z_p(kh)$ を観測し、 ℓ_2 性能の判定条件を満たす最小の η_i に対応する F_i を表から見つけ、切替状態フィードバックゲインとして採用する制御方法である。この切替制御の制御系設計アルゴリズムをまとめると以下ようになる。

F_i の設計アルゴリズム:

ステップ 1 $P_0 > 0$ 、 $\gamma > 0$ 、十分小さな $\eta_0 \geq 0$ を決め、 $i = 1$ とする。

ステップ 2 $\eta > \eta_{i-1}$ を満たすように η を固定する。

$$(S) \quad \begin{aligned} & \text{minimize}_{P, M, Z, V, e^{-2\varepsilon h}} e^{-2\varepsilon h} \\ & \text{s.t. (28), (29), } \eta^2 P - \eta_{i-1}^2 P_{i-1} \geq 0 \end{aligned} \quad (31)$$

を解く。

ステップ 3 もしステップ 2 が可解ならば、 $F_i := MP^{-1}$ 、 $P_i := P$ 、 $M_i := M$ 、 $Z_i := Z$ 、 $V_i := V$ 、 $\varepsilon_i := \varepsilon$ 、 $\eta_i := \eta$ 、 $i \rightarrow i+1$ として、ステップ 2 へ戻る。そうでない場合、 $k = 0$ とし、終了する。

F_i の適用制御アルゴリズム:

ステップ $x(kh)$ 、 $w_p(kh)$ 、 $z_p(kh)$ を観測する。

$$x^T(kh) P_i^{-1} x(kh) \leq \eta_i^2 \quad (32)$$

$$h w_p^T(kh) w_p(kh) - h z_p^T(kh) z_p(kh) / \gamma^2 + x^T(kh) P_i^{-1} x(kh) \leq \eta_i^2 \quad (33)$$

を満たす最小の η_i ($i = 1, 2, \dots$) を与える P_i ($i = 1, 2, \dots$) を求める。 η_i に対応する状態フィードバックゲイン F_i を適用し、 $k \rightarrow k+1$ として、ステップ 1 に戻る。

以下では、上に示した切替制御の制御系設計アルゴリズムにより保証される制御性能について説明を行う。まず、 F_i の適用制御アルゴリズムにおいて、 $x(kh)$ 、 $w_p(kh)$ 、 $z_p(kh)$ を観測し、(32)、(33) 式を満たす最小の η_i を与える P_i 、また、対応する問題 (S) の解 M_i 、 Z_i 、 V_i 、 ε_i を考える。このとき、

- (32) 式が成立するならば、 $x(kh) \in \mathcal{E}(P_i, \eta_i^2)$ である。

すなわち、(32) 式により $x(kh) \in \mathcal{E}(P_i, \eta_i^2)$ の判定を行っ

ていることがわかる. 同様に,

- (33) 式が成立するならば,

$$hw_p^T(kh)w_p(kh) \leq \frac{h}{\gamma^2} z_p^T(kh)z_p(kh) + \eta_i^2 - x^T(kh)P_i^{-1}x(kh)$$

すなわち, 時刻 kh での外生入力 $w_p(kh)$ の印加可能なフィードバックゲインを判定する条件

$$\|w_p(kh)\|^2 \leq \|z_p(kh)\|^2/\gamma^2 + (\eta_i^2 - x^T(kh)P_i^{-1}x(kh))/h \quad (34)$$

となっている.

つぎに, ステップ 2 において, $\alpha := (x^T(kh)P_i^{-1}x(kh))^{1/2}$, $\beta := (\eta_i^2 - x^T(kh)P_i^{-1}x(kh))^{1/2}$, $\eta := \eta_i$, $P := P_i$, $M := M_i$, $Z := Z_i$, $V := V_i$, $\varepsilon := \varepsilon_i$ は, 問題 (S) の解である. このとき, (31) 式は $\mathcal{E}(P_{i-1}, \eta_{i-1}^2) \subseteq \mathcal{E}(P_i, \eta_i^2)$ 楕円領域の集合の包含関係を与える. また, 定理 1 の証明より, $P := P_i$, $\mathcal{A} := A$, $\mathcal{B}_1 := B_2$, $\mathcal{B}_2 := B_1$, $\mathcal{C}_1 := F_i$, $V := V_i$, $\varepsilon := \varepsilon_i$, $x_k := x(kh)$, $w_{pk} := w_p(kh)$, $z_{pk} := z_p(kh)$ を定義すると, (24) 式が成立する. すなわち, ℓ_2 性能および指数安定性能が保証されることがわかる. さらに, この (24) 式が成立するならば,

$$\begin{aligned} & \frac{x^T((k+1)h)P_i^{-1}x((k+1)h) - x^T(kh)P_i^{-1}x(kh)}{h} \\ & - w_p^T(kh)w_p(kh) + \frac{1}{\gamma^2} z_p^T(kh)z_p(kh) \\ & + \frac{1 - e^{-2\varepsilon_i h}}{h} x^T(kh)P_i^{-1}x(kh) \leq 0 \\ & \forall x(kh) \in \mathcal{E}(P_i, \eta_i^2) \\ & w_p(kh) \in \{w_p(kh) : \|w_p(kh)\|^2 \leq \|z_p(kh)\|^2/\gamma^2 \\ & \quad + (\eta_i^2 - x^T(kh)P_i^{-1}x(kh))/h\} \\ & \Delta \in \Delta \end{aligned}$$

が成立する. このとき, $x^T((k+1)h)P_i^{-1}x((k+1)h)$ は, 次のサンプリング点 $k+1$ で (34) 式より

$$\begin{aligned} & x^T((k+1)h)P_i^{-1}x((k+1)h) \\ & \leq hw_p^T(kh)w_p(kh) - \frac{h}{\gamma^2} z_p^T(kh)z_p(kh) \\ & \quad + e^{-2\varepsilon_i h} x^T(kh)P_i^{-1}x(kh) \\ & \leq hw_p^T(kh)w_p(kh) - \frac{h}{\gamma^2} z_p^T(kh)z_p(kh) \\ & \quad + x^T(kh)P_i^{-1}x(kh) \leq \eta_i^2 \end{aligned}$$

の上界値をもち, $x((k+1)h) \in \mathcal{E}(P_i, \eta_i^2)$ を理論的に保証している特徴をもつ.

(注意) 適応制御アルゴリズムでは, 各時刻で与える外生入力の大きさによっては, (32) 式, (33) 式を満たす P_i が存在しないために, オフライン計算で設計しているフィードバックゲイン F_i が適用できない可能性がある. このような外生入力 w_p は本論文で扱う範囲外の外生入

力とする.

以上のオフライン型の切替制御の制御系設計アルゴリズムにより, 各サンプリング点において ℓ_2 性能および指数安定性能が保証される. また, このオンライン計算は, 切替状態フィードバックゲインを選択する操作のみであり, 制御性能を最適化する状態フィードバックゲイン自身の設計での計算量の多い複雑な処理は事前のオフラインで行うことができる利点がある. 実システムへのコントローラの実装を考えた場合, 性能の最適化計算をオンラインで行わなければならない制御方法と比較し, 本提案方法は実装しやすく使いやすい現実的な方法といえる. 次項では, この制御方法が実システムへ実際に実装可能で, その効果を発揮できるかをシミュレーションと実験を通じて検証を行う.

3.5 シミュレーションと実験

Fig. 4 Control equipment of angular alignment with DC servo motor

ここでは, DC サーボモータの角度の位置決め制御のシミュレーションおよび実験により, ℓ_2 性能保証領域に基づく切替制御の有効性を検証する. まず, Fig. 4 の実験装置の説明を行う. DC サーボモータの角度をパルスエンコーダを用いて計測し, この計測値を計算機 (PC) へ入力する. このとき, PC に搭載されている dSPACE 社製のリアルタイムプロセッサへは, MATLAB の Simulink を用いてあらかじめ設計されたコントローラを実装しておく. リアルタイムプロセッサの出力である PWM 信号をモータドライバへ入力し, DC サーボモータへ電源電圧を供給し制御を行う.

まず, DC サーボモータの数式モデルをたてるため, 同定試験を行う. リアルタイムプロセッサから M 系列信号を発生させ, パルスエンコーダからモータの角度を計測する. この入出力信号および一同定手法である予測誤差方法 [9] を用いて, モータの離散時間状態方程式の各パラメータを決定する. この同定試験を異なる M 系列信号ごとに 10 回繰り返し, それぞれの試行での状態方程式の各パラメータを 10 セット決定する. この 10 セットの各パラメータをすべて包含するように, モータのノミナルモデルとそのときのモデル誤差の不確かさを決定する.

DC サーボモータの制御系として, Fig. 5 のような 1

Fig. 5 Type 1 servo control system of DC servo motor

型サーボ系を設計するとき, (25) 式および (3) 式は

$$\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C & D_1 & D_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -71.0119 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -0.6633 & 0.3767 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10.4715 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0073 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0599 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6633 & -0.3767 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta := \{ \Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3) : \delta_i \in \mathbb{R}, \sigma_{\max}(\Delta) \leq 1 \}$$

のように決定される. このとき, 制御対象および設計仕様の各パラメータの値を Table 1 のように選ぶ. この仕様に対し, 指数安定性能 ε 最大化問題を解いて得られる ε_i とフィードバックゲイン F_i ($i=1, \dots, 10$) の値を Table 2 に示す. それぞれの状態フィードバックゲインに対応する ℓ_2 性能保証領域を状態空間上での切替面とするオフライン型の切替制御のアルゴリズムを適用し, $\Delta=0$ とする Fig. 5 の閉ループ系のステップ応答のシミュレーションを行う.

Table 1 Parameters of plant and design specification ($i=1, \dots, 10$)

σ	h	γ	η_0	$\eta_i - \eta_{i-1}$	$x(0)$
9[V]	0.01[s]	1.05	0	0.082	0

Table 2 Exponential stability performances ε_i and switching state feedback gains F_i ($i=1, \dots, 10$)

i	ε_i	F_i
1	0.1278	$[-105.3144 \ 2.3045 \ 425.0252]$
2	0.1023	$[-104.1690 \ 1.8328 \ 336.5634]$
3	0.0897	$[-103.4504 \ 1.5755 \ 293.2265]$
4	0.0817	$[-103.7051 \ 1.4594 \ 267.7906]$
5	0.0760	$[-103.0551 \ 1.3555 \ 247.5122]$
6	0.0716	$[-102.9269 \ 1.2775 \ 232.9713]$
7	0.0681	$[-102.7818 \ 1.2143 \ 221.2518]$
8	0.0652	$[-102.6584 \ 1.1625 \ 211.5720]$
9	0.0627	$[-102.5744 \ 1.1177 \ 203.4283]$
10	0.0606	$[-102.5852 \ 1.0790 \ 196.5689]$

この切替制御と切替を行わない単一のフィードバックゲインによる制御の比較のために, 各パラメータの値を Table 1 および $\alpha=0$, β を文献 [6] を用いて $\beta=9.1403$ に選ぶ. この仕様に対し, 同様に指数安定性能 ε 最大化問題を解いて得られる ε^* と単一のフィードバックゲイン F^* の値は

$$\varepsilon^* = 0.0264, \quad F^* = [-101.0325 \ 0.4514 \ 82.4183]$$

である. 同様に $\Delta=0$ とする Fig. 5 の閉ループ系のステップ応答のシミュレーションを行う.

Fig. 6 Output response $y(kh)$ and control input $u(kh)$ in simulation Fig. 7 Output response $y(kh)$ and control input $u(kh)$ in simulation and experiment

Fig. 6 において, 実線は切替制御を用いた場合の応答, 破線は単一のフィードバックゲインを用いた場合の応答をそれぞれ表している. 左図は, 0 [rad] から π [rad] および π [rad] から $-\pi$ [rad] へのステップ状の参照 (外生) 入力 $r(kh)=w_p(kh)$ に対しての出力 (ℓ_2 性能評価信号) $y(kh)=z_p(kh)$ の応答であり, 右図は, 制御入力 $u(kh)$ の応答である. 左図で, 一点鎖線は $r(kh)$ の応答, 実線は $y(kh)$ の応答であり, 良好な追従特性が得られていることが, また, 右図より, このとき制御入力 $u(kh)$ は -9 [V] から 9 [V] の範囲で飽和を生じさせる大きな入力となり, 閉ループ系の良好な制御結果が達成されていることがわかる. なお, この切替制御のシミュレーションで使用されている F_i の添え字 i を Fig. 8 に時系列で示す.

以上の良好なシミュレーション結果より, Fig. 4 の実験装置のステップ応答の切替制御実験を同様に行う. その結果を Fig. 7 に示す. Fig. 7 の各線は Fig. 6 と同様である. Fig. 7 では, 実験と Fig. 6 のシミュレーションの結果の比較のため両応答を示しているが, $y(kh)$ の線は一本に

重なって見えるように両結果がよく一致していることがわかる。一方、 $u(kh)$ は -9 [V] から 9 [V] の範囲で飽和を生じさせつつも、シミュレーションの結果とは異なっていることがわかる。これは、

Fig. 8 Indices of F_i

実験装置のモデル化誤差やノイズなどによる不確かさの影響が考えられる。しかしながら、このような不確かさに対しても制御入力を -9 [V] から 9 [V] まで十分に活用した良好な制御結果が得られ、本論文での提案方法である l_2 性能保証領域に基づく切替ロバスト制御方法の有効性がシミュレーションおよび実機において実証されたといえる。

4. おわりに

飽和および不確かさを有する非線形離散時間系に対し、 l_2 性能と指数安定性能の指標となる l_2 性能保証領域を定義し、飽和関数をポリトープ的に扱う手法を用いてその領域の解析条件を導出した。この解析条件、またこの解析条件に基づく状態フィードバック制御問題の可解条件は LMI で導出可能なことを示した。この結果を受け、目標値追従制御問題のように外生入力 of 各サンプリング点の大きさが既知、また閉ループ系の状態および評価信号が計測可能な問題に対して、 l_2 性能保証領域に基づくオフライン型の切替制御を提案した。そして、シミュレーションおよび実験によりその有効性を実証した。

なお、性能を最適化するフィードバックゲインをオンライン計算で求めオンタイムでそのゲインを適応する切替制御と比較し、提案方法はオンラインでの計算量が軽減され実装が容易である。また、閉ループ形が与えられ、制御系の不確かさは存在しないものとして従来よく行われる目標値整形方法と比較し、提案方法は理論的に性能およびロバスト性を事前に容易に考慮可能なことが利点である。

謝 辞

有益な御意見を頂きました大阪大学大学院の池田雅夫教授、和田光代特任助教授に感謝いたします。なお、本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金（若手研究（B）No.16760342）による支援を受けて行われています。ここに感謝の意を表します。

参 考 文 献

- [1] C. Pittet, S. Tarbouriech and C. Burgat: Stability regions for linear systems with saturating controls via circle and Popov criteria; *IEEE Conf. Decision Contr.*, pp. 4518–4523 (1997)
- [2] T. Hu and Z. Lin: *Control Systems with Actuator Saturation – Analysis and Design* –, Birkhäuser (2001)

- [3] 和田, 斎藤, 佐伯: l_2/l_∞ 外乱およびパラメータ不確かさを考慮した制約つきモデル予測制御 – LMI 表現に基づく実時間最適化アプローチ; 計測自動制御学会論文集, Vol. 40, No. 11, pp. 754–761 (2004)
- [4] D. Muñoz de la Peña, A. Bemporad and C. Filippi: Robust explicit MPC based on approximate multiparametric convex programming; *Proc. IEEE Conf. Decision Cont.*, pp. 2491–2496 (2004)
- [5] T. Kiyama and K. Sawada: LMI-based $\mathcal{L}_2$ analysis/synthesis with saturating control via generalized sector approach; *Proc. 10th IFAC/IFORS/IMACS/IFIP Symposium on Large Scale Systems: Theory and Applications Osaka Japan*, pp. 504–510 (2005)
- [6] T. Kiyama and K. Sawada: On the relation between analysis and synthesis conditions for discrete-time systems with saturation nonlinearities; *Proc. of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 8124–8131 (2005)
- [7] 平田, 太田: ある不確かなシステムに対する拘束条件の解析; 計測自動制御学会論文集, Vol. 41, No. 8, pp. 660–667 (2005)
- [8] 北森: 連続時間制御と離散時間制御の融合; 計測と制御, Vol. 22, No. 7, pp. 599–605 (1983)
- [9] 足立: MATLAB による制御のためのシステム同定, 東京電気大学出版社 (1996)