平衡実現に基づく非線形モデル低次元化の 計算法について*

藤本 健治[†]・椿野 大輔[‡]

On Computation of Nonlinear Model Order Reduction Based on Balanced Realization*

Kenji FUIMOTO[†] and Daisuke TSUBAKINO[‡]

1. はじめに

現在, さまざまな非線形制御理論が確立されているが, 実際の設計に際してはその多くにおいて得られる補償器は一般的に非常に複雑で大規模にならざるを得ない. このような複雑や大規模な線形システムに対して, モデル次元化の有効性が知られている [1]. 近年, 非線形システムに対する特異値解析の研究により [2], 平衡実現の概念を非線形システムに拡張することで, 非線形性を保ったままモデルの低次元化が行えることが示された [3]. しかし非線形システムの平衡実現の具体的な計算法や, 解析的な座標変換の存在, モデル低次元化の有効性に関しては明らかでない.

本速報ではこの非線形平衡実現に対して, Taylor 展開を用いた計算法について考察し, その計算可能性を示す. また実際にシステムに適用することにより, 非線形モデル低次元化の有効性を示す.

2. 非線形システムの平衡実現とモデル低次元化

はじめに非線形系の平衡実現, およびモデルの低次元化法を紹介する [3]. 本論文ではつぎのような, 入力にアファインな連続時間非線形システムを考える.

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1)$$

ただし $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ である. この系の原点は漸近安定で, かつ線形近似系は可制御可観測で相異なるハンケル特異値をもつものとする. この系に対

して, 可制御性・可観測性グラミアンを非線形系へ一般化したものである可制御性関数 $L_c(x_0)$ および可観測性関数 $L_o(x_0)$ は, つぎの Hamilton-Jacobi 方程式および Lyapunov 方程式の解として与えられる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_c(x)}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial L_c(x)}{\partial x} g(x) g(x)^T \frac{\partial L_c(x)}{\partial x} &= 0 \quad (2) \\ \frac{\partial L_o(x)}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} h(x)^T h(x) &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

ただし $L_c(x)$ は $\dot{x} = -f + gg^T(\partial L_c/\partial x)^T$ の原点を漸近安定にするものとする.

非線形系の平衡実現とは, 局所的にある座標変換 $x = \Phi(z)$ が存在し, その座標上で可制御性関数と可観測性関数がつぎのようになる状態空間実現のことである.

$$L_c(\Phi(z)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{\sigma_i(z_i)}, \quad L_o(\Phi(z)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2 \sigma_i(z_i)$$

ここで $\sigma_i(z_i)$ は, ハンケル特異値関数である [2]. この $\sigma_i(z_i)$ は, 線形システムの場合同様, 入出力と状態の影響の程度を与える. ただし定数でなく対応した状態の関数になっている. 変換後のシステムを以下のように表す.

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{z} = \bar{f}(z) + \bar{g}(z)u \\ y = \bar{h}(z) \end{cases}$$

いま, ハンケル特異値関数の間に $\sigma_k(z_k) \gg \sigma_{k+1}(z_{k+1})$ の関係があるとする. このとき, これに合わせて状態 z を $z^a = (z_1, \dots, z_k)^T$ と $z^b = (z_{k+1}, \dots, z_n)^T$ に分けることでつぎの k 次の低次元化モデル Σ^k を得る.

$$\Sigma^a: \begin{cases} \dot{z}^a = \bar{f}(z^a, 0) + \bar{g}(z^a, 0)u \\ y = \bar{h}(z^a, 0) \end{cases} \quad (4)$$

この低次元化システムは, 原点近傍の漸近安定性, 可制御性関数, 可観測性関数そしてハンケル特異値関数が保存されることがわかっている.

* 原稿受付 2007年2月26日

[†] 名古屋大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Nagoya University; Furouchi, Chikusa ward, Nagoya, Aichi 464-8603, JAPAN

[‡] 東京大学 大学院 工学系研究科 Graduate School of Engineering, The University of Tokyo; Hongo, Bunkyo ward, Tokyo 113-8656, JAPAN

Key Words: nonlinear systems, balanced realization, model reduction.

3. 平衡実現の計算法

3.1 Hamilton-Jacobi の方程式の解法

ここから非線形システムの平衡実現の計算法について考察する．前節より，まず可制御性/可観測性関数を求めなければならない．一般的に Hamilton-Jacobi の方程式の閉じた解を得るのは困難であるので，Lukes によって提案された，Taylor 展開を用いた計算法を用いる [4]．そのため $f(x), g(x)$ および $h(x)$ は解析的であると仮定する．これらを原点まわりで Taylor 展開する．

$$\begin{aligned} f(x) &= Ax + f^h(x), \quad g(x) = B + g^h(x) \\ h(x) &= Cx + h^h(x) \end{aligned}$$

$f^h(x), g^h(x), h^h(x)$ は高次の項を表し，それぞれ 2 次，1 次および 2 次以上の項を含む． f, h の 0 次項がないのは，原点が平衡点であることから明らかである．このとき， $L_c(x), L_o(x)$ は原点近傍でつぎの形の解をもつ．

$$L_c(x) = \frac{1}{2} x^T P^{-1} x + L_c^h(x) \quad (5)$$

$$L_o(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + L_o^h(x) \quad (6)$$

ここで $L_c^h(x), L_o^h(x)$ は，3 次以上の高次の項を表し， P, Q は， (A, B, C) により表される線形近似システムの可制御および可観測グラミアンである．つまり，最低次の 2 次の項の係数は，元システムの線形近似システムの Lyapunov 方程式もしくは Riccati 方程式より求めることができる．

高次項に関しては，展開した f, g, h, L_c, L_o を Hamilton-Jacobi の方程式に代入することで，各次の項の係数を定める方程式にはより低次の項の係数のみを含み，かつ未知係数に関して線形であることがわかる．そのため 3 次の項から順に求めていくことができる．

3.2 座標変換の計算法

ここでは，座標変換の計算法について考察する．ただし簡単のため，つぎの入力正規表現の座標変換を求めることにする．これは平衡実現の状態に $z_i = \bar{z}_i \sqrt{\sigma_i(\bar{z}_i)}$ とすることにより得られる．ただし，状態変数の表記としては z, σ を用いる．

$$L_c(\Phi(z)) = \frac{1}{2} z^T z, \quad L_o(\Phi(z)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2 \sigma_i(z_i)^2 \quad (7)$$

この座標変換 $x = \Phi(z)$ も，一意でない C^∞ 級のもので存在することはわかっているが，解析的であるかはわかっていない．しかしここでは，計算方法の可能性を探るために解析的な変換の存在を仮定することにする．座標変換 Φ を $\Phi(0) = 0$ であることを考慮し，原点周りで Taylor 展開する．

$$x = \Phi(z) = Tz + \Phi^h(z) \quad (8)$$

T は正則行列であり， $\Phi^h(z)$ は 2 次以上の項を含む高次項である．これを (7) 式に代入すると，

$$\begin{aligned} L_c(\Phi(z)) &= \frac{1}{2} z^T T^T P^{-1} T z + \frac{1}{2} z^T T^T P^{-1} \Phi^h(z) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Phi(z)^{h^T} P^{-1} \Phi(z) + L_c^h(\Phi(z)) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} L_o(\Phi(z)) &= \frac{1}{2} z^T T^T Q T z + \frac{1}{2} z^T T^T Q \Phi^h(z) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Phi(z)^{h^T} Q \Phi(z) + L_o^h(\Phi(z)) \end{aligned} \quad (10)$$

両式の第一項目は 2 次以上，第二項以降は 3 次以上の項を含む．さらに， σ も原点周りで Taylor 展開する．

$$\sigma_i(z_i) = \sigma_i(0) + \sigma_i^h(z_i) \quad (11)$$

これを代入した入力正規表現と係数を比較することにより，最低次の項について次が成り立つ．

$$T^{-1} P Q T = \text{diag}(\sigma_1(0)^2, \sigma_2(0)^2, \dots, \sigma_n(0)^2)$$

つまり，座標変換の 0 次の項は，線形近似システムのグラミアンの積 PQ を対角化する行列のうち， $T^T P^{-1} T = I$ を満たすもの（すなわち線形系での入力正規表現 [1]）を計算すればよいことがわかる．また高次項について

$$\begin{aligned} z^T T^T S \Phi^h(z) + \Phi(z)^{h^T} S \Phi(z) + 2L_c^h(\Phi(z)) &= 0 \\ z^T T^T Q \Phi^h(z) + \Phi(z)^{h^T} Q \Phi(z) + 2L_o^h(\Phi(z)) &= 0 \\ &= \sum_{i=1}^n z_i^2 \sigma_i^h(z_i) (2\sigma_i(0) + \sigma_i^h(z_i)) \end{aligned}$$

を得る．ただし $S := P^{-1}$ であり，これらの式を項別にまとめ，その係数を 0 とすれば，座標変換の各次の項の係数を定める方程式が得られる．また $\sigma_i(z_i)$ は，システムの固有構造 [2] から $\sigma_i(z_i)$ の高次項を含む方程式を除いた¹方程式系から付随して求まる．上式において未知数となる次数の係数を定める方程式には，それ以上の次数の項の係数は現れず，未知係数に関して線形になっていることがわかる．さらに， m 次項の未知係数の数 N^c と，それらを定める方程式の数 N^e を求めると，組合せを考えることにより，

$$N^c = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)! m!} n, \quad N^e = \frac{2(n+m)!}{(n-1)! (m+1)!} - n$$

となる．これらは $N^c \geq N^e$ を満たす（等号成立は， $n=2$ もしくは $m=1$ ）．つまり高次項の係数は，線形連立方程式を解くことで 3 次の項から順に計算でき，各次の係数に任意パラメータをもつことになる．以上から，Taylor 展開により座標変換が計算できることがわかる．

あとは，入力正規形から平衡実現への変換を求めればよい．これは入力正規形への変換の逆変換を計算することに相当し， $x_i \mapsto x_i \sqrt{\sigma_i(x_i)}$ となる変換として容易に計算できる [3]．

3.3 計算法の手順

これまでの方法をまとめれば，つぎのようになる．

¹これらの式は恒等的に成立する．この操作によって $\sigma_i(z_i)$ の高次項を無視しているわけではない事に注意．

- (1) 対象システムの線形近似モデルより、可制御/可観測ゲラミアン P, Q を計算する。
- (2) 可制御性/可観測性関数の高次項を計算。
- (3) 平衡実現の座標変換を得る。
- (4) ハンケル特異値関数を評価し低次元モデルを得る。

4. 計算例

4.1 対象システム

つぎに、前節の方法を実際に適用した結果を示す。今回対象とした非線形システムは、Fig. 1 に示される二重振り子である。詳細は [2] 参照のこと。ただし簡単のため $l_1 = l_2 = 1$, $m_1 = m_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $g = 9.8$ とした。このモデルは、状態変数 $x = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ の4次元のモデルである。入力、第1リンク目へのトルクとし、出力を第2リンク先端の(水平)-(鉛直)の座標とする。つまり1入力2出力の4次元非線形システムである。

Fig. 1 The double pendular

前節までの方法を用いて、未知パラメータはすべて0として座標変換の3次の項までとる近似の計算を行った。紙面の都合上、各関数の形は示さないが、 $\sigma_i(\cdot)$ を評価することで2次元の低次元化モデルを得ることができた。

4.2 出力の比較

非線形モデル低次元化の有効性を調べるために、元システムと非線形低次元化システムの出力に加え、線形近似システムを平衡実現によって低次元化した2次元の線形システム¹の出力の三つを比較する。以下に、入力としてインパルス状の入力を加えたときの水平・鉛直方向の挙動をそれぞれ Fig. 2, Fig. 3 に示す。これらより、水平方向の出力はすべての波形が区別がつかないほど重なっており、低次元化モデルが元のシステムをよく近似できることがわかる。より注目すべき結果として、鉛直座標の出力が線形近似低次元化モデルが常に0を出力しているのに対して、非線形低次元化モデルは開始直後のモードをうまく表せていないものの、元モデルの波形をよく近似できていることがわかる。線形近似モデルのこの挙動は、cosine の Taylor 展開の1次の項が0であることに起因している。鉛直方向の出力から非線形モデル低次元化の有効性は明らかであり、本手法の有効性を示している。

¹これは、非線形の低次元化モデルを線形近似して得られるモデルに等しい。

Fig. 2 Movement of the horizontal position

Fig. 3 Movement of the vertical position

5. おわりに

本論文では、非線形平衡実現の計算法として、Taylor 展開を用いた計算方法について考察し、二重振り子に適用することで非線形平衡実現を用いたモデル低次元化の有効性について研究した。Taylor 展開を打ち切ることによって生じる誤差や係数の任意性に関する考察など検討すべき課題も多いが、この結果は非線形平衡実現によるモデル低次元化の有効性を十分確認できたと考えられる。

参考文献

- [1] B. C. Moore: Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction; *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. AC-26, No. 1, pp. 17-32 (1981)
- [2] K. Fujimoto and J. M. A. Scherpen: Nonlinear input-normal realizations based on the differential eigenstructure of Hankel operators; *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. 50, No. 1, pp. 2-18 (2005)
- [3] K. Fujimoto and J. M. A. Scherpen: Nonlinear balanced realization based on singular value analysis of Hankel operators; *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, pp. 6072-6077 (2003)
- [4] D. L. Lukes: Optimal regulation of nonlinear dynamical systems; *SIAM J. Control*, Vol. 7, No. 1, pp. 75-100 (1969)