補間を用いたサンプル値遅延フィードバック制御器の一設計法*

平田健太郎[†]

On a Design Method of Sampled-Data Delayed Feedback Controller via Interpolation*

Kentaro HIRATA[†]

A design problem of delayed feedback controllers in the sampled-data system configuration is considered. Instead of indirect methods via the plant augmentation, we impose certain interpolation conditions on the free parameter of the stabilizing controller parametrization to embed the desired structure into the controller directly. Since the underlying stabilization problem to be solved is independent of the length of the delay, the proposed method avoids a computational burden when the ratio of the periods of the target orbit to the sampling becomes larger.

1. はじめに

あるシステムが、安定でない周期軌道を内包していたとしても、それを見つけ出すことは一般的に困難である。なぜなら、その軌道のごく近傍から出発したとしても時間の経過とともに元の軌道からは逸れてしまうからであり、この性質こそが不安定周期軌道たるゆえんである。カオスの制御手法としてPyragas[11]によって提案された遅延フィードバック制御 (Deleyed Feedback Control; 以下DFCと略記) は、時間遅れを効果的に利用することで、内在する周期軌道自体を前もって求めることなしにその安定化を達成できるという優れた特徴をもつ。周期軌道の特殊な例として定値信号を考えれば、DFCによって未知平衡点の移動にも対応可能な制御系が実現できる[6,2]。したがって、DFCはカオス制御のみならず、さまざまな工学的応用の可能性を秘めていると考えられる。

理論的な側面から見ると、連続時間DFCにおいては、制御対象が有理伝達関数で表現される場合でも、その閉ループ特性は微分差分方程式にしたがうため、通常の有理伝達関数要素を制御器として用いる場合に比べて、解析・設計は困難になる。低次の場合の安定化可能性が文

献[5]で、微分フィードバック近似を用いたLMI条件が文献[4]で検討されている。一方、離散時間DFC系は有理伝達関数で表現されるので、状態空間表現を用いた種々の設計手法が提案されている[7,14,15]。これら設計法では、LQサーボ系設計や H^∞ ループ整形などで一般的に用いられているプラント拡大の手法によって、DFC構造を含んだ制御器を構成している。しかし、本来の制御目的が連続時間の周期軌道の安定化であること、デジタル制御機器を用いた実装が不可避であることなどから、サンプル値系としての取り扱いが、より自然であるといえよう。

とりわけ、本来の制御目的が連続時間信号の安定化であるという事実は、以下のような新たな問題提起をもたらす。サンプル値制御をおこなうにあたり、必要な制御帯域の要求などからサンプル周期 h が決定される。しかし、これはDFCによっていま安定化したい軌道の周期 T とは無関係である。離散時間における遅延フィードバック構造は、 T と h の比に応じた数の遅延要素を用いて構成されるため、比較的長周期の軌道を安定化したい場合には拡大プラントの次数は元の制御対象のそれに比べて、非常に大きくなりうる¹。一般に解かれるべき制御問題の規模が大きくなるにつれて、計算コストは指数関数的に増大するため、これは望ましくない。

そこで本論文では、プラント拡大を用いることなく、サンプル値DFC制御器の設計をおこなう方法を提案す

* 原稿受付 2007年4月9日

[†] 奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology; 8916-5 Takayama-cho, Ikoma, Nara 630-0192, JAPAN

Key Words: delayed feedback, unstable periodic orbit, parameterization, interpolation.

¹ さらに悪いことに、プラント拡大法は通常、付与したい構造の2倍の制御器の次数増加を招く。

る．基礎となるのは，安定化制御器のパラメータ表現である（たとえば [16]）．この表現を得るには，本来の制御対象に関する極配置問題を解けばよい．後述のように，遅延フィードバック構造は制御器の零点配置に関する要求仕様であると解釈できるので，上記の表現における自由パラメータの補間問題を解くことによってこの仕様を実現する．すなわち，制御器に対する遅延フィードバック構造の埋め込みは，全く後天的におこなわれる．このような手法は，サーボ系を含む境界制約つき H^∞ 設計 [12] などの従来研究でも用いられている．また，ある構造を制御器内に後天的に埋め込むという意味では，近年のむだ時間系の H^∞ 設計理論に関する結果 [9,10] と類似性がある．

ここでは以下の表記を用いる．自然数，実数全体を $\mathbb{N}$ ， $\mathbb{R}$ で表す．複素平面，閉複素右半平面をそれぞれ $\mathbb{C}$ ， $\mathbb{C}_+$ で表す．また $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ ， $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ， $\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$ とする．複素数 z の複素共役を $\bar{z}$ で表す．領域 $\mathbb{D}$ で解析的かつ $\partial\mathbb{D}$ 上で本質的に有界な実有理関数からなる空間を $\mathbf{RH}^\infty(\mathbb{D})$ で表す．行列の固有値の集合を $\lambda(\cdot)$ で表す．各 2 ポートの入出力をもつ作用素

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

と，適合する入出力をもつ作用素 Δ の線形分数変換

$$M_{11} + M_{12}\Delta(I - M_{22}\Delta)^{-1}M_{21}$$

を $\mathbf{LFT}(M, \Delta)$ で表す．

2. 線形システムの不安定周期軌道

前述のとおり DFC の出自はカオス制御にあり，そもその適用対象は非線形システムであった．しかし線形制御理論に基づいた解析 [5,6] では，簡単のためにその特殊ケースである未知平衡点のシフトに的を絞って議論している．ここでは原点に立ち返って，不安定周期軌道，とくに線形システムから生成されるものについて，いかにそれを定義すべきかを含めて考えよう．

Fig. 1 に示すような線形システム要素からなる結合系を考える．図中の Σ_p は不安定プラント， Σ_g は外部信号発生器であり，以下のように状態空間表現されているとする．

Fig. 1 Linear system with UPO

$$(\Sigma_g) \quad \dot{x}_g = A_g x_g, \quad w = C_g x_g, \quad x_g(0) = x_g^0 \neq 0$$

$$(\Sigma_p) \quad \dot{x}_p = A_p x_p + B_p(u + w), \quad y = C_p x_p, \quad x_p(0) = x_p^0$$

ここで $\lambda(A_p) \cap \mathbb{C}_+ \neq \emptyset$ ， $\lambda(A_g) \subset j\mathbb{R}$ とする．このシステムが Σ_g に由来する振動モードだけからなる T -周期の定常出力 $y(t)$ を生成するとき，この線形システムは不安定周期軌道 $y(t)$ をもつ，ということにする．

このような状況下では $P(s) := C_p(sI - A_p)^{-1}B_p$ の不安定極は $G(s) := C_g(sI - A_g)^{-1}x_g^0$ の零点と相殺されていなければならない．そのときに限り， Σ_p の不安定モードが $y(t)$ に現れないような初期値の組 x_g^0, x_p^0 が存在する．しかしながら実際には内部安定性の要請から，このような極零相殺は許されない．隠れたモードの不安定性により，無限小の初期値の不整合が状態の発散を招くからである．これが $y(t)$ が不安定たるゆえんである．

いま $\omega_0 = 2\pi/T$ とし，その高調波成分を w_k で表そう．すなわち $\omega_k = (k+1)\omega_0$ ， $k=1,2,\dots$ である．外生信号 $w(t)$ は周波数 $\{\omega_k\}$ の成分より成る．系が不安定周期軌道をもつとき，明らかに $|P(j\omega_k)|$ は有限の値をとることが必要であるから， $j\omega_k$ は P の極でないとする．ここで $j\omega_k$ に極をもたない安定化出力遅延フィードバック制御器 $u(s) = C(s)(1 - e^{-Ts})y(s)$ が存在するとき， w から y までの閉ループ周波数伝達関数の ω_k での値は

$$\frac{P(j\omega_k)}{1 - C(j\omega_k)(1 - e^{-j\omega_k T})P(j\omega_k)} = P(j\omega_k),$$

$k=0,1,\dots$ となる．つまり $w(t)$ に対する閉ループ系の定常応答は，不安定な極零相殺下での仮想的な開ループ挙動と厳密に一致するのである．

逆に，一般の出力フィードバック制御器 $u(s) = \hat{C}(s)y(s)$ が，条件

a) $\hat{C}(s)$ は $P(s)$ に対する安定化制御器である

b) $\hat{C}(s)$ は $s = j\omega_k$ ， $k=0,1,\dots$ に零点をもつ¹

を満たせば，遅延フィードバック制御器と同様な機能を果たす．これらに対応するサンプル値制御系での仕様を考える．よく知られているように a) はサンプル点上の挙動を記述する離散時間システムの安定性によって保証される．また帯域制限された信号を考える範囲においては，b) は有限個の補間条件に置き換えられる．とくに，いま $w(t)$ は Σ_g によって生成されているので有限個の周波数成分しかもちえず，帯域制限の仮定は妥当である．この点において，未知の周波数成分から成る外部信号を想定する H^∞ 外乱抑制などの見地とは異なっている．

サンプル周期 h で動作する理想サンプラと零次ホールダを $\mathcal{S}$ および $\mathcal{H}$ とする．以下で考えるサンプル値フィードバック系の構成は Fig. 2 のとおりである．また Σ_g と Σ_p の結合系の自励振動周期 T はサンプル周期 h の整数

¹ これは内部モデル原理において，外部信号への追従のために制御器の極が果たす役割と対照的である．

Fig. 2 Feedback configuration

倍, すなわち $T = \ell h$, $\ell \in \mathbb{N}$ であると仮定する. このとき $\hat{C}(z)$ に対する要求仕様は

- a') $\hat{C}(z)$ は Fig. 2 の構成において $P(s)$ の安定化コントローラである
- b') 方程式 $1 - z^{-\ell} = 0$ の根はすべて $\hat{C}(z)$ のブロック零点である

となる.

3. 設計法

いま, $P(s)$ は 1 入力 p 出力の SIMO 系であり¹, 次の n 次の状態空間表現で与えられているものとする².

$$P(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

ここで以下の仮定をおく:

(仮定 1)

- 1) 対 (C, A) は可観測, 対 (A, B) は可制御である.
- 2) サンプル周期 h は pathological でない.
- 3) 目標とする周期軌道の周期 T はサンプル周期 h の整数倍, つまりある $\ell \in \mathbb{N}$ に対して $T = \ell h$.
- 4) 虚軸上の点 $jk(2\pi/T)$, $k = 0, \dots, \ell - 1$ のいずれも A のどの固有値とも一致しない.

また, $z^\ell - 1 = 0$ の根の集合を $\{z_i\}$ で表し,

$$A_d = e^{Ah}, \quad B_d = \int_0^h e^{A(h-\xi)} B d\xi$$

とする. プラント $P(s)$ の零次ホールド等価な離散化をおこなうと

$$\hat{P}(z) = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ C & D \end{bmatrix}$$

となる.

以下では, 離散時間系の既約分解に関する性質を用いるので, 予備的な結果をまとめておく.

【補題 1】 [8] いま, $N, M \in \mathbf{RH}^\infty(\mathbb{D})$ はそれぞれ n 本の列をもつ行列で

$$\text{rank} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = n$$

とする. このとき, 次の各条件は互いに等価である.

- 1) (N, M) は右既約である.
- 2) 適当な $X, Y \in \mathbf{RH}^\infty(\mathbb{D})$ によって, ベズー等式

$$X(z)N(z) + Y(z)M(z) = I$$

が成立する.

$$3) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} N(z) \\ M(z) \end{bmatrix} = n, \quad \forall z \in \bar{\mathbb{D}}.$$

【補題 2】 [8] いま, $P(z) = N(z)M(z)^{-1}$ という右既約分解形が得られているとき, $P(z)$ の不安定極すなわち $\bar{\mathbb{D}}$ 内の極は $\det M(z)$ の $\bar{\mathbb{D}}$ 内の根と一致する.

【注意 1】 文献 [13] の 3.1 節で示されているように, 連続時間系に対する既約分解表現に関する議論は, 複素平面内で解析性を要求する領域を閉右半平面から所望の領域に置き換えても成り立つ. 上記は文献 [8] の定理 1.4, 2.2 をそれぞれ離散時間系に対して言い換えたものである.

以上の準備のもとで, 先の要求仕様 a'), b') を満足する制御器 $\hat{C}(z)$ が, 以下のように設計できることが示される:

【定理 1】 いま $A_d + B_d F$, $A_d + L C$ をそれぞれ安定にするようなゲイン F , L と ℓ 次の安定な多項式

$$q(z) = z^\ell + q_1 z^{\ell-1} + \dots + q_{\ell-1} z + q_\ell$$

に対して, 行列 R , V_z , W を以下のように定める.

$$R = \text{diag} \left[q(z_1) \cdots q(z_\ell) \right],$$

$$V_z = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{\ell-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & z_\ell & \cdots & z_\ell^{\ell-1} \end{bmatrix},$$

$$\hat{w}(z) = \left[\begin{array}{cc|c} A_d & B_d F & 0 \\ 0 & A_d + B_d F & -L \\ \hline F & -F & 0 \end{array} \right], \quad (1)$$

$$W = \begin{bmatrix} \hat{w}(z_1) \\ \vdots \\ \hat{w}(z_\ell) \end{bmatrix}, \quad A_q = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -q_\ell \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ \mathbf{0} & & 1 & -q_1 \end{bmatrix}$$

ここで $e_1 = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$, $e_\ell = [0 \ \cdots \ 0 \ 1] \in \mathbb{R}^{1 \times \ell}$,

¹MIMO 系であっても, 原理的には補間によって DFC 構造を実現できるが, 見通しのよい状態空間での特徴づけを与えるためにここでは SIMO に限定する.

²通常サンプル値系ではアンチエイリアシングフィルタにより $D=0$ となるが, ここでは一般形に対する構成法を与える.

$$B_L = B_d + LD, C_F = C + DF, B_q = V_z^{-1}RW$$

から、

$$A_c = \begin{bmatrix} A_d + B_L F + LC & B_L e_\ell \\ -B_q C_F & A_q - B_q D e_\ell \end{bmatrix}$$

を定める。このとき、仕様 a'), b') を満たす ℓ 次の DFC 制御器のひとつは

$$\hat{C}(z) = \left[\begin{array}{c|c} A_c & -L \\ \hline F & e_\ell \end{array} \middle| \begin{array}{c} B_q \\ 0 \end{array} \right] \quad (2)$$

で与えられる。

(証明) よく知られているように Fig. 2 のサンプル値構成の閉ループ系の安定性は、離散時間の意味での対 $(\hat{P}(z), \hat{C}(z))$ の安定性と等価である。仮定 1-1, 1-2 より離散化によって可観測性、可制御性は保存される (たとえば [1]) ので、 $A_d + B_d F$, $A_d + LC$ を安定にするようなゲイン F , L を選ぶことができる。これらを用いた $\hat{P}(z)$ の二重既約分解因子

$$\left[\begin{array}{c|c} M & U \\ \hline N & V \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_d + B_d F & B_d - L \\ \hline F & I \quad 0 \\ C_F & D \quad I \end{array} \right] \quad (3)$$

と

$$\det(V + NQ) \neq 0 \quad (4)$$

であるような¹任意の $Q(z) \in \mathbf{RH}^\infty(\mathbb{D})$ によって、 $\hat{P}(z)$ のすべての安定化制御器は

$$C_Q(z) = (U + MQ)(V + NQ)^{-1} \quad (5)$$

とパラメータ表示される。LFT を用いた等価表現は

$$J_C = \left[\begin{array}{c|c} A_d + B_L F + LC & -L \quad B_L \\ \hline F & 0 \quad I \\ -C_F & I \quad -D \end{array} \right] \quad (6)$$

を用いて

$$C_Q = \mathbf{LFT}(J_C, Q) \quad (7)$$

のように与えられる (たとえば [16]²)。いま $Q(z)$ の形を

$$Q(z) = \frac{1}{q(z)} [r_1(z) \cdots r_p(z)],$$

$$r_i(z) = r_i^{(1)} z^{\ell-1} + \cdots + r_i^{(\ell-1)} z + r_i^{(\ell)}$$

と限定する。明らかに $Q(z) \in \mathbf{RH}^\infty(\mathbb{D})$ であり、 $Q(\infty) = 0$ より (4) を満たす。このとき、各 z_i , $i=1, \dots, \ell$ におい

¹ z の有理式として恒等的に 0 でないことを指す。

² 文献 [16] は連続時間系を対象としているが、状態空間表現に基づく四則演算は不変であることと、注意 1 の事実から離散時間系でも公式は同一である。

て $M(z)$ が正則であれば、 $C_Q(z_i) = 0$ は補間条件

$$-M^{-1}U(z_i) = Q(z_i) \quad (8)$$

と同値である。いま具体的に

$$M^{-1}(z) = I - F(zI - A_d)^{-1}B_d$$

と表されており、仮定 1-4 から z_i は A_d の固有値と一致しないので $M^{-1}(z_i)$ が存在し、 $M(z_i)$ は正則である³。状態空間表現に基づく計算によって (8) 式の左辺が (1) 式の $\hat{w}(z_i)$ に等しいことが示される。一方、(8) 式の右辺は

$$\frac{1}{q(z_i)} [1 \quad z_i \cdots z_i^{\ell-1}] \begin{bmatrix} r_1^{(\ell)} & \cdots & r_p^{(\ell)} \\ \vdots & & \vdots \\ r_1^{(1)} & \cdots & r_p^{(1)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

と表現できる。以下では (9) 式末尾の $r_i^{(k)}$ からなる行列を B_q で表す。補間条件 (8) を行方向に積み上げて記述すると、 $RW = V_z B_q$ となる。いま $i \neq k$ に対して $z_i \neq z_k$ であるから、バンデルモンド行列 V_z は正則である [3]。したがって B_q を $B_q = V_z^{-1}RW$ より求めることができる。また $Q(z)$ を可観測正準形で表現すると

$$Q(z) = \left[\begin{array}{c|c} A_q & B_q \\ \hline e_\ell & 0 \end{array} \right]$$

となるので、これを (7) に代入して (2) を得る。

構成より明らかに $C_Q(z)$ は要求仕様 a') を満たす。つぎに要求仕様 b') が確かに満たされていること、すなわち実現 (2) において z_i に関する極零相殺が起こらないことを確認しておく。既約因子の状態空間表現 (3) に対応して

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{V} & -\tilde{U} \\ \hline -\tilde{N} & \tilde{M} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_d + LC & B_L \quad L \\ \hline F & I \quad 0 \\ C & -D \quad I \end{array} \right] \quad (10)$$

を定めると、

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{V} & -\tilde{U} \\ \hline -\tilde{N} & \tilde{M} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} M & U \\ \hline N & V \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \quad (11)$$

が成り立っている [16]。このとき

$$-\tilde{N}(U + MQ) + \tilde{M}(V + NQ) = I$$

であるから (5) 式自体、右既約分解表現になっている。いま $z_i \in \partial\mathbb{D} \subset \mathbb{D}$ であるので、 $C_Q(z)$ が z_i を極にもてば、補題 2 から $\det[(V + NQ)(z_i)] = 0$ となる。すなわち、ある

³ いま $\hat{P} = NM^{-1}$ であるから、 $\hat{P}$ が不安定極 z_p をもつとき、補題 2 より $\det M(z_p) = 0$ 。したがって一般に $U(z_p) + M(z_p)Q = 0$ は解をもたない。仮定 1-4 はこの状況を除外しており、そのもとでは (1) 式の $\hat{w}(z_i)$ が有限の値をとる。

複素ベクトル $\eta \neq 0$ が存在して $(V+NQ)(z_i)\eta=0$. また $(U+MQ)(z_i)$ は零行列であるから $(U+MQ)(z_i)\eta=0$. つまり, ある $z_i \in \mathbb{D}$ に対して

$$\begin{bmatrix} U+MQ \\ V+NQ \end{bmatrix} (z_i)$$

が列フルランクでないことになる. 補題 1 よりこれは表現 (5) の右既約性に反する. したがって $C_Q(z)$ は z_i を極に持たない. $\square$

遅延フィードバック構造 $1-z^{-\ell}$ を陽に抽出した形で $\hat{C}(z)$ を表すと, 以下のようになる.

【系 1】 いま,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & 0 \\ & I & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$$

とすると, シルベスタ方程式

$$A_0 \tilde{T} - \tilde{T} A_c + e_1^T [F \ e_\ell] = 0 \quad (12)$$

は一意解 $\tilde{T}$ をもつ. この $\tilde{T}$ を用いて, $\tilde{C}(z)$ を次のように定める.

$$\tilde{C}(z) = \left[\begin{array}{c|c} A_c & -L \\ \hline e_\ell \tilde{T} + [F \ e_\ell] & 0 \end{array} \right] \quad (13)$$

このとき (2) 式で与えられる $\hat{C}(z)$ は

$$\hat{C}(z) = \tilde{C}(z)(1-z^{-\ell}) \quad (14)$$

と表される.

(証明) いま, $1/(1-z^{-\ell}) = e_\ell(zI - A_0)^{-1}e_1^T + 1$ なる実現を用いると, $\hat{C}(z)/(1-z^{-\ell})$ の状態空間表現として

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & e_1^T [F \ e_\ell] \\ \hline 0 & A_c \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ -L \\ B_q \end{array} \right] =: \left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline \bar{C} & 0 \end{array} \right] \quad (15)$$

を得る. 行列 A_0 は ℓ 個の重複固有値 1 を持つが, $1 \in \{z_i\}$ なので先の議論から $1 \notin \lambda(A_c)$. したがって, 文献 [3] の補題 13.2 より, (12) は一意解 $\tilde{T}$ をもつ. ここで

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} I & \tilde{T} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

に関する座標変換を施すと, システムはブロック対角化され

$$\frac{\hat{C}(z)}{1-z^{-\ell}} = \left[\begin{array}{c|c} T^{-1} \bar{A} \bar{T} & \bar{T}^{-1} \bar{B} \\ \hline \bar{C} \bar{T} & 0 \end{array} \right]$$

$$= \tilde{C}(z) - e_\ell(zI - A_0)^{-1} \tilde{T} \begin{bmatrix} -L \\ B_q \end{bmatrix}$$

となる. 構成から A_0 に対応するモードは極零相殺の結果, 出力には現れないので, (14) を得る. $\square$

【注意 2】 プラント拡大に基づく方法では, $1-z^{-\ell}$ の次数を含めた制御器全体の次数が $n+2\ell$ となるのに対して, 制御器 (2) の次数は $n+\ell$ である. (14) 式の表現では, $\hat{C}(z)$ は一見 $n+2\ell$ のように見えるが, 実際には $z=0$ における ℓ 重の安定な極零相殺が起こるため, $n+\ell$ 次となる.

【注意 3】 常に補間データは複素共役対として現れるため, 係数行列 B_q は常に実行列となる. たとえば ℓ が奇数のときには, $n_r=1$, $n_c=(\ell-1)/2$ とし, 数列 $\{z_i\}$ を $\{1, \alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_{n_c}, \bar{\alpha}_{n_c}\}$ と並べ替える. そのうえで, $V_z B_q = RW$ の両辺に左から変換行列

$$S = \text{blockdiag}[I_{n_r}, \underbrace{J, \dots, J}_{n_c \text{ 個}}], \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix}$$

を掛ければ, 実行列のみを用いた演算に帰着できる. また, ℓ が偶数の場合には, $n_r=2$, $n_c=\ell/2-1$, $\{z_i\} = \{1, -1, \alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_{n_c}, \bar{\alpha}_{n_c}\}$ として同様の手続きをとればよい.

4. 数値例

4.1 ボール&ビーム装置の周期運動の安定化

Fig. 3 に示すようなボール&ビーム装置において, 周期的な外部入力を印加してボールに往復運動をさせることを考える. 制御入力 u はサーボモータの角度参照値 ϕ_{ref} であり, 出力 y をボールの位置 z とすると, このシステムは SISO である. 実際の実験装置 (Quanser 社製) を用いてモデルを同定したところ, その伝達関数は $P(s) = 5.05/s^2$ となった. 仮定 1-4 を満たすために, 補助的なフィードバック $u = -y/10.1 + \tilde{u}$ を施す. このとき $\tilde{u}$ から y までの伝達関数は $P'(s) = 5.05/(s^2 + 0.5)$ となる. 開ループ系に対して, 周期 $T = 1.5$ の運動をおこなわせるような外部入力 $w^*(t)$ を構成できるが, $P'(s)$ は虚軸上に極をもつため, この目標軌道は安定ではない. したがって初期値誤差の存在下では, 開ループ系の応答は目標軌道から大きく逸脱したものとなる (Fig. 4). いまサンプル周期を $h = 0.05$ とすると, 目標軌道の安定化に必要な遅延要素の数は $\ell = 30$ である. ここで $q(z) = z^\ell - 0.5^\ell$ とし, $A_d + B_d F$ および $A_d + LC$ の固有値をそれぞれ $\{0.6, 0.8\}$, $\{0.9, 0.8\}$ に配置するように F, L を選んで $\hat{C}(z)$ を定めた. 閉ループ系の応答 (ボール位置) を Fig. 5 に示すが, 確かに遅延フィードバックによって目標軌道が安定化されていることがわかる. 制御入力を示す Fig. 6 において, 破線は外部信号発生器の出力を, 実線は遅延フィードバック制御器の出力を表している. システムが定常状態に近づくにつれて遅

Fig. 3 Ball & Beam System

Fig. 4 Open-loop time response

Fig. 5 Closed-loop time response (output)

延フィードバック制御器からの信号は零に漸近しており、定常的な応答には何ら影響していないことが見てとれる。

なお、この例題にプラント拡大法を適用した場合には、解くべき安定化問題（極配置問題）の次数は2から32に増大する。

4.2 倒立振り系の平衡点シフトへの追従

つぎにSIMOの例として、台車型倒立振り子の安定化を考えよう。文献[2]同様に、台車型倒立振り子を未知の傾斜角をもつ斜面上に設置したとする（Fig. 7）。図中の z, ϕ, θ はレール中央からの台車位置、レールの法線方向からの振り角度、斜面の傾斜角を表す。また m, μ, l, I をそれぞれ振り子の質量、回転中心における粘性摩擦係数、回転中心から重心までの距離、回転中心まわりの慣性モーメントとする。台車はタコジェネレータからの信号に基づく速度サーボドライバで駆動されており、 u から $\dot{z}$ までの動特性はゲイン K_z 、時定数 T_z の1次系で近

Fig. 6 Closed-loop time response (control input)

Fig. 7 Inverted pendulum system on a slope

似できるものとする。このとき、状態方程式は

$$\dot{x} = Ax + B_1 u + B_2 \theta, \quad y = Cx, \quad (16)$$

$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -T_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & mlT_z/I & mlg/I & -\mu/I \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ K_z \\ 0 \\ -mlK_z/I \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -mlg/I \end{bmatrix}$$

で与えられる。実際の実験装置（リンクス社製）に即したパラメータの値は $m=0.023, l=0.2, I=4ml^2/3, g=9.8, K_z=80\pi, T_z=95$ となる。前述のとおり、振り角度はレールの法線方向からの角度をポテンショメータによって測定しているため、 $\theta \neq 0$ のとき方程式(16)の原点はもはや平衡点ではない。ここでの目的は、サンプル値遅延フィードバック制御器によって θ の情報なしにシステムを新たな開ループ系の平衡点まわりで安定化することである。この場合は不安定周期軌道の特殊ケースとして、ステップ状のバイアス信号を考えていることになる。開ループ系は $s=0$ に極をもつため、先と同様に補助フィードバックとして

$$u = \alpha z + \tilde{u} \quad (17)$$

$\alpha = 0.1$ を施した後の状態方程式を

$$\dot{x} = \tilde{A}x + B_1\tilde{u} + B_2\theta \quad (18)$$

とする. ここでは $h = 0.01$, $\ell = 10$, $q(z) = z^\ell - 0.7^\ell$ に対して $\hat{C}(z)$ を設計しよう. ゲイン F の選択にあたってはまず, 評価関数

$$J(\tilde{u}) = \int_0^\infty (x^T \tilde{Q}x + \tilde{u}^T \tilde{R}\tilde{u}) dt,$$

$\tilde{Q} = \text{diag}[10^3 \ 1 \ 1 \ 1]$, $\tilde{R} = 1$ に対する連続時間最適レギュレータ問題を解き, 零次ホールド等価な離散化を介してこれと同一の極配置を与える F を求めた. オブザーバゲイン L は経験則に基づき, レギュレータ極に比べて絶対値が10%小さくなるような極配置により定めた.

傾斜角 θ を時刻 $t = 1$ および 4 [sec] でステップ状に変化させた場合の閉ループ系の時間応答を Figs. 8, 9 に示す. Fig. 8 において, 点線は傾斜角 θ を, 破線は振り角度 ϕ の応答 (遅延フィードバック制御時) を表す. 比較のために, $Q(z) = 0$ とした遅延フィードバック構造をもたない安定化制御器による応答も実線で示している. いずれの制御器も角度に関する平衡位置 ($\phi = \theta$) まわりの安定化を達成しているという意味では, あまり差異は見られない. その一方で, 台車位置 (Fig. 9) に関しては大きな違いが見られる. レールを傾けた状態では (16) の原点はもはや平衡点ではないため, 原点まわりの偏差系に対して設計された状態フィードバックおよびオブザーバをそのまま用いると, 台車位置に関する定常偏差としてその副作用が現れてしまう (詳細は [2] を参照). 一方, 遅延フィードバック制御器は未知平衡点まわりの安定化を自動的に達成するため, そのような偏差は生じていない.

5. おわりに

サンプル値遅延フィードバック制御器の一設計法について述べた. まず, 線形制御理論の枠組の中で不安定周期軌道の安定化を議論するに際して概念を整理し, そのために必要となる要求仕様を安定化制御器の零点配置として与えた. つぎに安定化制御器のパラメータ表現と補間に基づいた設計法を与えた. 遅延フィードバック構造は自由パラメータの補間によって制御器内に全く後天的に埋め込まれるが, 制御対象の極と, 付与する制御器の零点間の消去が起こらないという仮定を含め, 妥当な前提条件のもとで構成が可能である. また表現の既約性から, 付与した零点構造が制御器の極によって消去されないという点も興味深い.

本手法は, 通常よく用いられるプラント拡大法と比較して

- 解くべき制御問題のサイズが小さくてすむ

Fig. 8 Time response (angle)

Fig. 9 Time response (cart position)

- 設計される制御器自身の次数が小さい
- などのメリットがある. とりわけ, 遅延フィードバックによって開ループ系の不安定周期軌道を安定化する際に目標軌道の周期がサンプル周期よりも比較的長い場合には, これは大きな違いとなりうる. 提案手法の有効性を確認するために, SISO, SIMO の場合の数値例を示した. 今回の設計法は (サンプル点上での) 安定性のみ注目しているが, H^∞ 準最適制御器の LFT 構造と Nevanlinna-Pick 型の H^∞ 関数による補間を組み合わせることで, サンプル点間の挙動も考慮した類似の設計法が可能である. こちらについても, 稿を改めて報告したい.

参考文献

- [1] T. Chen and B. Francis: *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer (1995)
- [2] K. Hirata *et al.*: Observer-based delayed feedback control of continuous-time systems; *Proc. of ACC2001*, pp. 25-27 (2001)
- [3] 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (1978)
- [4] H. Kokame *et al.*: Stabilization via the delayed feedback with a large delay; *Proc. of IFAC LTDS2000*, pp. 15-20 (2000)
- [5] H. Kokame *et al.*: State difference feedback for sta-

-
- bilizing uncertain steady states of nonlinear systems; *Int. J. Cntr.*, Vol. 74, pp. 537–546 (2001)
- [6] H. Kokame *et al.*: Difference feedback can stabilize uncertain steady states; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 46, pp. 1908–1913 (2001)
- [7] K. Konishi and H. Kokame: Observer-based delayed-feedback control for discrete-time chaotic systems; *Phys. Lett. A*, Vol. 248, pp. 359–368 (1998)
- [8] 前田, 杉江：アドバンスト制御のためのシステム制御理論, システム制御情報ライブラリー 3, 朝倉書店 (1999)
- [9] G. Meinsma *et al.*: Control of systems with I/O delay via reduction to a one-block problem; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 47, pp. 1890–1895 (2002)
- [10] L. Mirkin: On the extraction of dead-time controllers and estimators from delay-free parametrizations; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 48, pp. 543–553 (2003)
- [11] K. Pyragas: Continuous control of chaos by self-controlling feedback; *Physics Letter A*, Vol. 180, pp. 421–428 (1992)
- [12] T. Sugie and S. Hara: H-infinity-suboptimal control problem with boundary constraints; *Systems & Control Letters*, 13, pp. 93–99 (1989)
- [13] M. Vidyasagar: *Control System Synthesis -A Factorization Approach-*, MIT Press (1985)
- [14] S. Yamamoto *et al.*: Dynamic delayed feedback controllers for chaotic discrete-time systems; *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. 48, pp. 785–789 (2001)
- [15] S. Yamamoto *et al.*: Delayed feedback control with minimal-order observer for stabilizaiton of chaotic discrete-time systems; *Int. J. Bifurcation and Chaos*, Vol. 12, pp. 1047–1055 (2002)
- [16] K. Zhou *et al.*: *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall (1996)
-