時間遅れシステムに関連したある種のたたみ込み積分作用素のスペクトルの数値計算について*

平田健太郎†

On Numerical Computation of the Spectrum of a Class of Convolution Operators Related to Delay Systems*

Kentaro HIRATA†

A class of convolution operators on fixed interval with initial values is considered. The numerical computation of its spectra is attempted via a finite-dimensional approximation so-called fast sampling and hold. In contrast to the case of matrices, the spectrum of an operator is not continuous against small perturbations in general. This implies that a fine approximation does not necessarily lead to better estimates close to the true values. Therefore, one must provide a mathematical justification of the procedure depending on the operator of interest. In this paper, continuity of the spectrum of the convolution operator described above is proved and a numerical computation formula for the calculation of its eigenvalues is given.

1. はじめに

関数解析における積分作用素の重要性はいうまでもなく、たとえば [3,9] などの入門書においても、種々の積分作用素について様々な角度から議論がなされている。最も基本的なものは、2変数関数 $K(s,t)$ を積分核とする以下のようなタイプの作用素であり、

$$y(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt$$

積分核の性質により、連続核積分作用素や Hilbert-Schmidt 型積分作用素などに分類される。また、積分区間の上端を b から s に変更した（あるいは $t > s$ のとき、 $K(s,t) = 0$ と制限した）Volterra 作用素、さらに積分核が変数間の差のみの関数 $K(s,t) = \rho(s-t)$ となるようなたたみ込み積分作用素は、線形系の時間応答や状態遷移を表すことから、システム理論において重要な役割を果たしており、そのノルムないしスペクトルはシステムの安定性や性能の重要な尺度となっている。たとえば、核関数 $g(t)$ に対する $L^2[0,\infty]$ 上のたたみ込み積分の作用素ノルムは $G(s) = \mathcal{L}[g]$ の H^∞ ノルムにほかならない。ま

た $L^2[0,h]$ 上のたたみ込み積分の作用素ノルムはむだ時間系の 1 ブロック H^∞ 問題の最適値を与える [14,10,11]。さらに、サンプル値 H^∞ 設計問題の可解性の必要条件も、これら作用素のノルム条件として記述される [1,13,2]。

一方、ある種の微分差分系や、遅延フィードバック制御下にある状態にジャンプを有する線形システムの時間発展も、類似の作用素によって記述されることが知られている [5,4]。これは、サンプル値制御系のリフティング表現 [13,1] 同様、関数要素を状態変数にとることによって、系の動特性を無限次元の離散時間系として表現するものである。いま $\mathcal{Z} := \mathbf{R}^n \oplus \{L^2[0,h]\}^n$ とし、適当なサイズの行列 A, B, P, R によって作用素 $\mathcal{F}: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2(\cdot) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P \left\{ e^{Ah} R z_1 + \int_0^h e^{A(h-\xi)} B z_2(\xi) d\xi \right\} \\ e^{A \cdot} R z_1 + \int_0^\cdot e^{A(\cdot-\xi)} B z_2(\xi) d\xi \end{bmatrix} \\ &=: \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} \\ \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2(\cdot) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

のように定めよう。すると前述の系の状態遷移はこの初期条件を伴った、たたみ込み積分作用素によって記述される [6,7]。これらの系の安定性が作用素 $\mathcal{F}$ のスペクトルによって特徴づけられるため、具体的にその分布を計算したいという要求が生じる。本論文では $\mathcal{F}$ のスペクトルの数値計算法について考える。

先行研究 [4,5] では $\mathcal{F}$ がコンパクト作用素であり、その固有値がある超越方程式の根として与えられることが

* 原稿受付 2007 年 6 月 25 日

† 奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology; 8916-5 Takayama-cho, Ikoma, Nara 630-0192, JAPAN

Key Words: convolution operator, perturbation, spectrum.

示されている。したがって、適当な初期値から繰り返し型の非線形方程式の求解をおこなえば、原理的には固有値を求めることができる。しかし実際上無限に局所探索を繰り返さないためには、いかに真値の近傍の初期値を与えるか、いかにして多点探索の初期値集合を同時に与えるかなどの問題がある。そこで作用素の出力を階段関数近似し、スペクトルの計算を行列の固有値問題に帰着させる。これはサンプル値制御理論における、いわゆる“高速サンプル&ホールド”と同様の手法である。離散近似のサンプル周期が十分に短ければ、これらの計算法によって精度のよい近似値が得られると想像されるが、文献 [12] においてサンプル値系の周波数応答に関して示されているように、理論的な裏づけは自明ではない。さらに意外なことに、このような離散近似による数値計算の妥当性については、それがしばしば実用上使用されているにもかかわらず、初期条件をもたない一般の積分作用素に限っても、これまでまとまった形では必ずしも議論されていないようである。本論文の目的は、作用素 $\mathcal{F}$ のスペクトル計算を行列の固有値問題に帰着させる方法について、その数学的裏づけを可能な限り直接的に与えることである。

2. 数学的準備

本節では、主結果を導出するための数学的準備として、必要となる定理を列挙する。空間 X から Y へのすべての有界作用素の集合を $\mathcal{B}(X, Y)$ で、すべての閉作用素の集合を $\mathcal{C}(X, Y)$ で表すものとし、簡単のため $\mathcal{B}(X, X)$ および $\mathcal{C}(X, X)$ をそれぞれ $\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{C}(X)$ と表記する。また作用素 T のスペクトルを $\Sigma(T)$ で表す。

【定理 1】 ([3], p.342) 作用素 $T \in \mathcal{B}(X)$ がコンパクトであるとき、 $\Sigma(T)$ の 0 と異なる部分は、たかだか可算個の点からなる：

$$\Sigma(T) \cap \{s \in \mathbb{C} | s \neq 0\} = \{s_k\}$$

$\{s_k\}$ が可算無限の場合は $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$ である。各 s_k は T の固有値で、その多重度は有限である。

したがって、半径 $\gamma > 0$ の円 D によって $\Sigma(\mathcal{F})$ を分割し、 D 外部の $\mathcal{F}$ の固有値を選べば、文献 [8] (p.181) の意味での有限固有値系 $\Sigma'(\mathcal{F})$ を得ることができる。

【定理 2】 ([8], IV-§3.5) 作用素 $T \in \mathcal{C}(X)$ の固有値のうち、有限固有値系からなる $\Sigma(T)$ の部分は、 T に対する generalized sense, あるいはギャップ距離の意味での摂動に対して連続である。

【定理 3】 ([8], p.206) いま $T, T_n \in \mathcal{C}(X)$, $n = 1, 2, \dots$ とする。 $T \in \mathcal{B}(X)$ であるとき、generalized sense において $T_n \rightarrow T$ であるための必要十分条件は、十分大きな n に対して $T_n \in \mathcal{B}(X)$ かつ $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ となることである。

定理 2 で述べている連続性をより詳細にいうならば以下のとおりである ([8], p.213)。有限固有値系 $\Sigma'(T)$

が閉曲線 Γ によって、 $\Sigma(T)$ の残りの部分 $\Sigma''(T)$ と分離されているとき、これに対応して空間 X は $X = M'(T) \oplus M''(T)$ と分解される。固有値系 $\Sigma'(T)$ の多重度の総和を m とすると、 $\dim M'(T) = m < \infty$ である。いま generalized sense において $T_n \rightarrow T$ であるとする。このとき $\Sigma(T_n)$ もまた $\Sigma'(T_n)$ と $\Sigma''(T_n)$ に分離され、これに対応して空間 X は $X = M'(T_n) \oplus M''(T_n)$ と分解されるが、 n が十分大きいとき、 $M'(T_n)$, $M''(T_n)$ はそれぞれ $M'(T)$, $M''(T)$ に同型である (文献 [8], 定理 3.16)。とくに、 Γ 内の $\Sigma(T_n)$ の部分が、多重度の総和が m であるような有限固有値系に対応し、 $\dim M'(T_n) = m$ である。

いま $\Sigma'(T)$ を $\Sigma'(T)$ 内のいずれかひとつの固有値に置き換えても同じことがいえるので、generalized sense における微小な摂動に対して、閉作用素 T の有限固有値系の各固有値の変化は微小である。

3. 主結果

ヒルベルト空間 $\mathcal{Z}$ の要素 $z = \begin{bmatrix} z_1^* & z_2^*(\cdot) \end{bmatrix}^*$ に対するノルムは以下のように与えられている。

$$\|z\|_{\mathcal{Z}}^2 = \|z_1\|^2 + \|z_2(\cdot)\|_{\{\mathbf{L}^2[0, h]\}^n}^2 \quad (2)$$

以下では簡単のため、 $\{\mathbf{L}^2[0, h]\}^n$ を $\mathbf{L}^2[0, h]$ と略記する。いま、

$$\phi_z := \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} \end{bmatrix} z \quad (3)$$

$$U := \{z \in \mathcal{Z}, \|z\|_{\mathcal{Z}} = 1\} \quad (4)$$

とする。

【補題 1】

(a) ある定数 K が存在して、任意の $z \in U$ と任意の $\theta \in [0, h]$ に対して

$$\|\phi_z(\theta)\| \leq K \quad (5)$$

を満たす。

(b) 任意の $\epsilon > 0$ が与えられたとき、ある $\delta > 0$ が存在して、任意の $z \in U$ と、 $|\theta_1 - \theta_2| < \delta$ であるような任意の $\theta_1, \theta_2 \in [0, h]$ に対して、

$$\|\phi_z(\theta_2) - \phi_z(\theta_1)\| \leq \epsilon \quad (6)$$

を満たす。

(証明) (a) いま、

$$\begin{aligned} \|\phi_z(\theta)\| &= \|e^{A\theta} R z_1 + \int_0^\theta e^{A(\theta-\xi)} B z_2(\xi) d\xi\| \\ &\leq \|e^{A\theta} R z_1\| + \left\| \int_0^\theta e^{A(\theta-\xi)} B z_2(\xi) d\xi \right\| \end{aligned} \quad (7)$$

である。行列の誘導ノルムを $\|\cdot\|_i$ で表すものとし、定数 K_1 を $K_1 = \sup_{\theta \in [0, h]} \|e^{A\theta}\|_i$ により定める。このとき、 $z \in U$ より $\|z_1\| \leq 1$ であるので、

$$\|e^{A\theta} R z_1\| \leq \|e^{A\theta} R\|_i \|z_1\| \leq K_1 \|R\|_i \quad (8)$$

となる．また $e^{-A\xi} B$ の第 i 行を $h_i(\xi)$ で表すとし，定数 K_2 を $K_2 = \max_i \sup_{\xi \in [0, h]} \|h_i(\xi)\|$ によって定めるならば，Schwarz の不等式および $z \in U$ より $\|z_2(\cdot)\|_{L^2[0, h]} \leq 1$ であることから次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\theta e^{-A\xi} B z_2(\xi) d\xi \right\|^2 &= \sum_{i=1}^n \left| \int_0^\theta h_i(\xi) z_2(\xi) d\xi \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_0^\theta \|h_i(\xi)\|^2 d\xi \int_0^\theta \|z_2(\xi)\|^2 d\xi \leq n K_2^2 h \end{aligned}$$

したがって， $\forall \theta \in [0, h]$ ， $\forall z \in U$ に対して

$$\left\| \int_0^\theta e^{A(\theta-\xi)} B z_2(\xi) d\xi \right\| \leq K_1 K_2 \sqrt{n h} \quad (9)$$

を得る．よって (8), (9) 式から

$$\|\phi_z(\theta)\| \leq K_1 (\|R\|_i + K_2 \sqrt{n h}) \quad (10)$$

すなわち (5) 式がいえた．

(b) 一般性を失うことなく， $\theta_1 \leq \theta_2$ と仮定できる．ここで $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \geq 0$ とすると，

$$\begin{aligned} \phi_z(\theta_2) - \phi_z(\theta_1) &= (e^{A\Delta\theta} - I) \phi_z(\theta_1) \\ &\quad + e^{A(\theta_1 + \Delta\theta)} \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \Delta\theta} e^{-A\xi} B z_2(\xi) d\xi \end{aligned}$$

となる．右辺第 1 項の $(e^{A\Delta\theta} - I)$ を除く部分については，そのノルムの上界が (10) 式で与えられる．第 2 項についても同様にして，そのノルムの上界を

$$\left\| e^{A(\theta_1 + \Delta\theta)} \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \Delta\theta} e^{-A\xi} B z_2(\xi) d\xi \right\| \leq K_1 K_2 \sqrt{n \Delta\theta}$$

と見積もることができる．以上から

$$\begin{aligned} \|\phi_z(\theta_2) - \phi_z(\theta_1)\| &\leq \|e^{A\Delta\theta} - I\|_i K_1 (\|R\|_i + K_2 \sqrt{n h}) + K_1 K_2 \sqrt{n \Delta\theta} \end{aligned}$$

が得られる．ここで $g_1(\zeta) := \|e^{A\zeta} - I\|_i$ ， $g_2(\zeta) := \sqrt{n \zeta}$ とする．各 j に対して $g_j(\zeta)$ は $g_j(0) = 0$ なる連続関数であるから $\forall \epsilon_j > 0$ に対して， $\forall \zeta \in [0, \delta_j]$ に対して $|g_j(\zeta)| < \epsilon_j$ となるような $\delta_j > 0$ が存在する．したがって

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2K_1(\|R\|_i + K_2 \sqrt{n h})}, \quad \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2K_1 K_2}$$

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ とすれば， $|\theta_2 - \theta_1| < \delta$ なる任意の $\theta_1, \theta_2 \in [0, h]$ と $\forall z \in U$ に対して，(6) 式が成り立つ．□

以下では，作用素 $\mathcal{F}$ のスペクトルを出力の階段関数近似によって計算することを考える．区間 $[0, h]$ を N 等分し，周期 $\tau = h/N$ で動作する理想サンプリング作用素 $\mathcal{S}_N$ と零次ホールド作用素 $\mathcal{H}_N$ を用いて，信号 $z_2(\cdot) \in \{L^2[0, h]\}^n$ をベクトル値の区分的定数関数に変換する．

$$\mathcal{S}_N y := \left[y^*(0) \ y^*(\tau) \ \cdots \ y^*((N-1)\tau) \right]^*$$

$$\mathcal{H}_N : \left[w^*(0) \ w^*(\tau) \ \cdots \ w^*((N-1)\tau) \right]^* \mapsto w(t)$$

$$w(t) = w((\ell-1)\tau), \quad t \in [(\ell-1)\tau, \ell\tau]$$

これによって $\mathcal{F}$ の行列近似を求め，その固有値から $\mathcal{F}$ のスペクトルを計算する．この手続きは以下の定理によって正当化される．

【定理 4】 いま，

$$W = e^{A\tau}, \quad V = \int_0^\tau e^{A(\tau-\xi)} B d\xi \quad (11)$$

とする．このとき，行列 $\mathcal{F}_N$ を以下のように定める：

$$\mathcal{F}_N := \begin{bmatrix} PW^N R & PW^{N-1} V & \cdots & \cdots & PV \\ R & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ WR & V & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ W^{N-1} R & W^{N-2} V & \cdots & V & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

任意の実数 $\gamma > 0$ に対して $\bar{D}_\gamma := \{s \in \mathbf{C}; |s| > \gamma\}$ とする． $N \rightarrow \infty$ のとき， $\bar{D}_\gamma$ 内の $\mathcal{F}_N$ の固有値は， $\bar{D}_\gamma$ 内の $\mathcal{F}$ の各固有値に漸近する．

(証明) まず $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ をいう．いま (1), (3) 式より

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} \end{bmatrix} z = P \phi_z(h)$$

であるから，(2) 式より

$$\|\mathcal{F} z\|^2 = \|P \phi_z(h)\|^2 + \|\phi_z(\cdot)\|_{L^2[0, h]}^2$$

と表される．補題 1(a) より，任意の $z \in U$ に対して

$$\|P \phi_z(h)\|^2 \leq \|P\|_i^2 K^2$$

$$\|\phi_z(\cdot)\|_{L^2[0, h]}^2 = \int_0^h \|\phi_z(\theta)\|^2 d\theta \leq K^2 h$$

が成り立つので，

$$\|\mathcal{F}\| = \sup_{z \in U} \|\mathcal{F} z\| \leq K \sqrt{\|P\|_i^2 + h} \quad (13)$$

よって， $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ である．

作用素 $\mathcal{F}$ の出力の $z_2(\cdot)$ 部分を， $\mathcal{H}_N \mathcal{S}_N$ によって区間幅 h/N の階段関数に変換したものを $\tilde{\mathcal{F}}_N$ とする．いま，

$$\tilde{\mathcal{H}}_N = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_N \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{S}}_N = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_N \end{bmatrix}$$

とすると，具体的に

$$\tilde{\mathcal{F}}_N = \tilde{\mathcal{H}}_N \tilde{\mathcal{S}}_N \mathcal{F}$$

である．先と同様に

$$\|\tilde{\mathcal{F}}_N z\|^2 = \|P \phi_z(h)\|^2 + \|\mathcal{H}_N \mathcal{S}_N \phi_z(\cdot)\|_{L^2[0, h]}^2 \quad (14)$$

である．実数 x に対して x を超えない最大の整数を $\lfloor x \rfloor$ で表そう．このとき，

$$\mathcal{H}_N \mathcal{S}_N \phi_z(\theta) = \phi_z(\tau \lfloor \theta/\tau \rfloor) =: \phi_z(\eta(\theta))$$

と書き表すことができる．ここで $\forall \theta \in [0, h]$ に対して $\eta(\theta) \in [0, h]$ であるから，補題 1(a) より (14) 式の右辺第 2 項の上界は

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}_N \mathcal{S}_N \phi_z(\cdot)\|_{\mathbf{L}^2[0, h]}^2 &= \int_0^h \|\phi_z(\eta(\theta))\|^2 d\theta \\ &\leq K^2 h \end{aligned}$$

と評価できる．したがって (13) 式と同様に $\|\tilde{\mathcal{F}}_N\|$ の上界を見積もることができるから $\tilde{\mathcal{F}}_N \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ である．いま $\mathcal{F}$ と $\tilde{\mathcal{F}}_N$ の差を $\mathcal{F}$ に対する摂動とみなし，これを Δ_N とおく．すなわち

$$\tilde{\mathcal{F}}_N = \mathcal{F} + \Delta_N \quad (15)$$

とする．いま $\mathcal{F}, \mathcal{F}_N \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ であることが示されたので，定理 3 より generalized sense において $\mathcal{F}_N \rightarrow \mathcal{F}$ となるためには $\|\Delta_N\| \rightarrow 0$ であればよい．具体的には，(2)，(15) 式より摂動の大きさは次のように表される．

$$\begin{aligned} \|\Delta_N\| &= \sup_{z \in U} \left\| (\mathcal{H}_N \mathcal{S}_N - \mathcal{I}) \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} \end{bmatrix} z \right\|_{\mathbf{L}^2[0, h]} \\ &= \sup_{z \in U} \left[\int_0^h \|(\mathcal{H}_N \mathcal{S}_N - \mathcal{I}) \phi_z(\theta)\|^2 d\theta \right]^{1/2} \quad (16) \end{aligned}$$

補題 1(b) から，任意の正数 ϵ_1 に対して $\epsilon = \epsilon_1/\sqrt{h}$ とすると， $\forall z \in U$ ， $|\theta_1 - \theta_2| < \delta$ なる $\forall \theta_1, \theta_2 \in [0, h]$ について (6) 式が成立するような δ が存在する．先と同様，記号 $\lfloor \cdot \rfloor$ を用いて $\eta(\theta) = \tau \lfloor \theta/\tau \rfloor$ とおけば

$$(\mathcal{H}_N \mathcal{S}_N - \mathcal{I}) \phi_z(\theta) = \phi_z(\eta(\theta)) - \phi_z(\theta) \quad (17)$$

であり， $|\eta(\theta) - \theta| < \tau = h/N$ である．したがって $N > h/\delta$ とすれば，(17) 式より $\forall z \in U$ ， $\forall \theta \in [0, h]$ に対して

$$\|(\mathcal{H}_N \mathcal{S}_N - \mathcal{I}) \phi_z(\theta)\| < \epsilon_1/\sqrt{h}$$

となり， $\|\Delta_N\| < \epsilon_1$ が示される．よって $N \rightarrow \infty$ のとき， $\|\Delta_N\| \rightarrow 0$ ，すなわち摂動 Δ_N は generalized sense において収束する．したがって定理 2 から $\bar{D}_\gamma$ 内の $\mathcal{F}$ の有限固有値系の，摂動 Δ_N に対する変化は連続である．作用素の順序変更を施して

$$\mathcal{F}_N = \tilde{\mathcal{S}}_N \mathcal{F} \tilde{\mathcal{H}}_N$$

とすると $\mathcal{F}_N: \mathbf{R}^{Nn} \rightarrow \mathbf{R}^{Nn}$ であり，具体的な計算（付録参照）により，行列表現 (12) 式が得られる．作用素 $\tilde{\mathcal{F}}_N$ と $\mathcal{F}_N$ の非零の固有値は一致するから，題意が成り立つ．□

補題 1(a)，(b) で示していることは関数族 $\Phi_U = \{\phi_z | z \in U\}$ の一様有界性ならびに同程度一様連続性にほかなら

Fig. 1 Retarded delay-differential system

ない [9]．実際，文献 [12] では，サンプル値系の周波数応答の数値計算に関連して，ある関数族の一様有界性と同程度一様連続性から $C[a, b]$ に対する相対コンパクト性をいい (Arzelà の定理)，これを任意の精度で矩形近似できることの根拠としている．近似可能であることを具体的に示すには， $C[a, b]$ に対する相対コンパクト性が全有界性と同値であることを用いて，関数族が有限個の連続関数の集合で ϵ -被覆可能であることをいい，この有限個の連続関数を階段関数近似する場合の最悪ケースを論じればよい．しかしながら，関数族に関するいくつかの概念を経由する必要があることから，必ずしも直接的な証明とはいえない．ここでは補題 1 の性質は用いるものの，関数族の概念は陽に用いずに，より初等的な議論から証明を与えている．

4. 数値例

Fig. 1 のブロック線図で表される系の安定性を考える．いま $G(s)$ を有理伝達関数 $2/(2s+1)$ とすると，対応する閉ループ系の状態方程式は

$$\dot{x}(t) = -1/2 x(t) - x(t-h) \quad (18)$$

となる¹．文献 [5, 6] で示されているように，微分差分系 (18) 式の安定性は， $A = -1/2$ ， $B = -1$ ， $P = R = 1$ とした作用素 $\mathcal{F}$ のスペクトル半径によって定まる．前向き要素 $G(s)$ のゲイン交叉周波数 $\omega_0 = \sqrt{3}/2$ における位相が $\angle G(j\omega_0) = -\pi/3$ であることから，閉ループ系はむだ時間長 $h \in [0, 4\sqrt{3}\pi/9]$ に対して安定である．安定限界 $h = 4\sqrt{3}\pi/9$ における作用素 $\mathcal{F}$ の固有値を行列近似 $\mathcal{F}_N$ から求める．この手続きによって $N \rightarrow \infty$ のとき真値が得られることは定理 4 により保証されている．分割数 N に対する $\mathcal{F}_N$ の固有値（絶対値の大きい方から 6 個）の変化を Table 1 に示す．作用素 $\mathcal{F}$ の固有値の真値は，(18) 式の特根 s_0 を求めて $\lambda_0 = e^{hs_0}$ とすることにより，あるいは別途，特性方程式に等価な超越方程式の根を収束計算することで求められる [6]．分割数 N の増加にともない，行列 $\mathcal{F}_N$ の固有値が $\mathcal{F}$ の固有値に近づくことが確認できる．しかしながら，分割数 N の増加に対する真値への収束速度はかなり緩やかであり，定理 4 で述べ

¹この例は，詳細な証明を含まない著者らの解説記事 [6] でも扱っているが，本論文の主結果に基づく具体的な計算例として再掲する．

Table 1 Eigenvalues of $\mathcal{F}_N$

	z_1, z_2	z_3, z_4
$N = 100$	$-0.494 \pm 0.872j$	$0.011 \pm 0.311j$
$N = 200$	$-0.497 \pm 0.869j$	$0.005 \pm 0.309j$
$N = 400$	$-0.499 \pm 0.868j$	$0.002 \pm 0.309j$
$N = 800$	$-0.499 \pm 0.867j$	$0.000 \pm 0.308j$
$N = 1600$	$-0.500 \pm 0.866j$	$-0.001 \pm 0.308j$
true value	$-1/2 \pm \sqrt{3}/2j$	$-0.001 \pm 0.308j$

	z_5, z_6	$z_7, z_8, \dots$
$N = 100$	$0.019 \pm 0.173j$	...
$N = 200$	$0.013 \pm 0.172j$	...
$N = 400$	$0.010 \pm 0.172j$	...
$N = 800$	$0.008 \pm 0.172j$	...
$N = 1600$	$0.008 \pm 0.171j$	...
true value	$0.007 \pm 0.171j$	...

た計算法は決して計算効率に優れたものではない。前述のとおり作用素 $\mathcal{F}$ の固有値はある超越方程式の根として特徴づけられているので [4, 5], 各種の応用例に対する実際の計算では適当な N を用いて各固有値近傍の初期値を求め、これらの初期値から収束計算によって真値を探索している。このときの $\mathcal{F}$ のスペクトルの分布を Fig. 2 に示す。単位円周上の固有値が確認できる。

Fig. 2 Distribution of the spectra of $\mathcal{F}$

さらに P, R の自由度を用いると、作用素 $\mathcal{F}$ によって遅延フィードバック制御下にある状態にジャンプを有する線形システムの安定性を記述できる。文献 [4] では Garcia らの compass walker モデル、文献 [7] では大須賀、杉本らの脚ロボット Quartet-III について、本論文の結果を根拠とした解析をおこなっている。

5. おわりに

あるクラスのたたみ込み積分作用素のスペクトルの数値計算に関して、近似行列の固有値計算による手続きの

数学的正当性を簡潔に示した。具体的には出力の階段関数近似による摂動に対して、スペクトルが連続になるための諸条件を、本論文で考えている作用素 $\mathcal{F}$ が満たしていることを証明した。得られた近似公式は理論的な収束性は保証されているものの、計算効率に優れたものではないので、実用上は非線形方程式の根の局所探索法と組み合わせて利用するなどの工夫が必要である。

謝 辞

本論文の主結果の証明の簡単化に関して有益な助言をいただいた査読者の方々に感謝します。

参 考 文 献

- [1] B. Bamieh and J. B. Pearson: A general framework for linear periodic systems with applications to H_∞ sampled-data control; *IEEE TAC*, Vol. 37, pp. 418–435 (1991)
- [2] G. Dullerud: Computing the L_2 -induced norm of a compression operator; *Systems & Control Letters*, Vol. 37, pp. 87–91 (1999)
- [3] 藤田, 黒田, 伊藤: 関数解析, 岩波基礎数学選書, 岩波書店 (1991)
- [4] 平田, 小亀: 状態にジャンプを有する線形システムの遅延フィードバック制御; システム制御情報学会論文誌, Vol. 18, No. 3, pp. 118–125 (2005)
- [5] K. Hirata and H. Kokame: Stability analysis of retarded systems via lifting technique; *Proc. of CDC2003*, CD-ROM (2003)
- [6] 平田, 小亀: むだ時間系の安定解析再訪 - 受動歩行の遅延フィードバック制御まで - (1); 計測と制御, Vol. 45, No. 3, pp. 260–266 (2006)
- [7] 平田, 大須賀, 杉本: むだ時間系の安定解析再訪 - 受動歩行の遅延フィードバック制御まで - (2); 計測と制御, Vol. 45, No. 4, pp. 376–380 (2006)
- [8] T. Kato: *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer (1980)
- [9] コルモゴロフ, フォミーニ: 関数解析の基礎, 原書第4版, 岩波書店 (1979)
- [10] T. A. Lypchuk, M. C. Smith and A. Tannenbaum: Weighted sensitivity minimization: general plant in H^∞ and rational weights; *Linear Algebra Appl.*, Vol. 109, pp. 71–90 (1988)
- [11] Y. Yamamoto, K. Hirata and A. Tannenbaum: Some remarks on Hamiltonians and the infinite-dimensional one block H^∞ problem; *Systems & Control Letters*, 29, pp. 111–117 (1996)
- [12] Y. Yamamoto, A. G. Madievski and B. D. O. Anderson: Approximation of frequency response for sampled-data control systems; *Automatica*, Vol. 35, pp. 729–734 (1999)
- [13] Y. Yamamoto: A function space approach to sampled-data control systems and tracking problem; *IEEE TAC*, Vol. 39, pp. 703–713 (1994)

- [14] K. Zhou and P. P. Khargonekar: On the weighted sensitivity minimization problem for delay systems; *Systems & Control Letters*, Vol. 8, pp. 307–312 (1987)

付 録

$\mathcal{F}_N$ の行列表現

区間 $[0, h]$ の k 番目のサンプル時刻を τ_k とすると,

$$\tau_k = \tau k, \quad k = 0, \dots, N$$

となる. 作用素 $\mathcal{F}_N$ の入出力 $z^{d,i}, z^{d,o} \in \mathbf{R}^{Nn}$ を

$$z^{d,i} = \begin{bmatrix} z_1^{d,i} \\ z_2^{d,i}(0) \\ \vdots \\ z_2^{d,i}(N-1) \end{bmatrix}, \quad z^{d,o} = \begin{bmatrix} z_1^{d,o} \\ z_2^{d,o}(0) \\ \vdots \\ z_2^{d,o}(N-1) \end{bmatrix}$$

とし, $\mathcal{F}$ に対する入出力を

$$z^i = \begin{bmatrix} z_1^i \\ z_2^i(\theta) \end{bmatrix}, \quad z^o = \begin{bmatrix} z_1^o \\ z_2^o(\theta) \end{bmatrix}$$

とする. 入力側の零次ホールド $\tilde{\mathcal{H}}_N$ によって

$$\begin{cases} z_1^i = z_1^{d,i}, \\ z_2^i(\theta) = z_2^{d,i}(k), \quad \theta \in [\tau_k, \tau_{k+1}], \quad k = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

という対応づけがなされ, 同様に出力側のサンプラ $\tilde{\mathcal{S}}_N$ によって

$$\begin{cases} z_1^{d,o} = z_1^o \\ z_2^{d,o}(k) = z_2^o(\tau_k), \quad k = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

という対応づけがなされる. いま $\mathcal{F}$ の作用から

$$z_2^o(\tau_k) = e^{A\tau_k} R z_1^i + \int_0^{\tau_k} e^{A(\tau_k-\xi)} B z_2^i(\xi) d\xi$$

となる. ここで (11) 式の記号を用いれば, 第 1 項は $W^k R z_1^i$ である. 第 2 項は $k=0$ のとき 0, $k \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau_k} e^{A(\tau_k-\xi)} B z_2^i(\xi) d\xi \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} e^{A(\tau_k-\xi)} B z_2^i(\xi) d\xi = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{k,j} z_2^{d,i}(j) \end{aligned}$$

とおくと

$$\alpha_{k,j} = e^{A\tau_{k-j}} \int_0^{\tau} e^{-A\zeta} B d\zeta = W^{k-j-1} V$$

である. また

$$z_1^o = P z_2^o(\tau_N)$$

であるから, 以上をまとめると

$$z^{d,o} = \begin{bmatrix} P W^N R & P W^{N-1} V & \dots & \dots & P V \\ R & 0 & \dots & \dots & 0 \\ W R & V & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ W^{N-1} R & W^{N-2} V & \dots & V & 0 \end{bmatrix} z^{d,i}$$

を得る.