二乗和緩和を用いた遅延存在下の量子スピン制御系設計*

加嶋 健司†

Semi-Algebraic Problem Approach for Design of Quantum Spin Control Systems in the Face of Feedback Delay*

Kenji KASHIMA†

Accurate control of quantum spin is necessary in order to utilize quantum spin as the physical realization of the quantum bit. Feedback control (based on continuous quantum measurement) of quantum spin systems inevitably suffers from estimation delays. In this paper, we state that a control system which takes into account these delays can be described by using stochastic delay differential systems. Moreover, we can restrict our analysis to the class of systems which have polynomial coefficients and evolve in a bounded semi-algebraic set. Then, the problem of stabilizing such systems is shown to be solvable effectively via reduction to a semi-algebraic problem.

1. はじめに

近年, 古典物理学では実現不可能であった量子計算, 量子暗号, 量子通信に代表される量子情報技術が盛んに研究されているが, これらの実装における基本単位となるのが量子ビット (qubit) である [10, 20, 26]. 本研究では, この量子ビットの物理的实现方法として有力視されている量子スピンの制御を目的とする. 量子制御理論においては, 90 年代に入って連続測定とよばれる測定法に基づくフィードバック制御の方法論が提案され, 理論・実験の双方から活発に研究が行われている [1, 2, 4, 8, 17, 21, 22]. この連続測定下のフィードバック制御においては, その特殊な制御構造から (詳細は 2 節参照) 状態推定などに起因する遅延は避けられず, 安定性など制御性能への影響を考慮する必要がある [6, 17].

これに対して著者らは文献 [6] において, 遅延存在下における 2 次元量子スピン制御系の設計をおこなった. この結果は著者が知る限り, 量子制御系設計において, 数学的に厳密な形で遅延の影響を考慮した唯一の結果である. 具体的には, ある切替え型の制御則が安定化 (2.2

節参照) を達成するための十分条件を線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality: 以下, LMI と略記) で与えている. 一方で, この結果を有用なものにするには,

- (切替えのない) 連続入力による制御
- 一般次元量子系および複数量子系の制御 (たとえばエンタングルメント生成など)

への拡張は不可欠である. しかしながら, 同様の議論によりこれらの拡張を試みたところ, LMI 条件は得られるものの, それらは可解とはならず所望の制御則を得ることはできなかった.

この原因を考察するために, 文献 [6] の主結果の証明を簡単に述べよう. 導出は大きく分けると二つの手順からなる. まず 1 番目のステップでは, ある形の Lyapunov-Krasovskii 汎関数候補を与え, それが満たすべき条件を整理することで, もとの問題をある非線形計画問題に帰着させる. しかし一般にこれは凸計画問題など効率的に解ける問題とはならない. そこで 2 番目のステップでは, この問題を変形・緩和し, LMI に帰着させている. したがって

- LMI 緩和
- Lyapunov-Krasovskii 汎関数候補を最終的に LMI 条件が得られる形に制限している

による保守性が生じることは避けられない. さらに対象とするスピン系の次元の増加にともなって, こうした保守性は増大する. つまり, この事実が本質的に上述の拡張を困難にしている原因であると考えられる. この問題

* 原稿受付 2007 年 8 月 29 日

† 東京工業大学 大学院 情報理工学研究科 Graduate School of Information Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology; 2-12-1, Meguro ward, Tokyo 152-8552, JAPAN

Key Words: quantum spin control system, feedback delay, sums of squares relaxation of semi-algebraic problems.

に対して、個別の対象ごとに、その特徴をもちいて保守性を軽減することは可能であるかもしれないが、根本的な解決にはならない。

一方、あとで示すように、対象とするスピン系によらず、1 番目のステップで得られる非線形計画問題が凸とまらない本質的な原因は、

- ダイナミクスの非線形性
- Lyapunov-Krasovskii 汎関数に含まれる 2 次形式 (およびその積分) 以外の項
- 密度行列に関する制約

にあり、これらはいずれも多項式の形で特徴付けることができる。実際、文献 [21] では、この性質を用いて、(遅延が存在しない場合の) 量子スピン系の安定化問題を多項式計画問題 (semi-algebraic problem) に帰着させる手法が提案されている (2.2 節も参照)。この結果は、対象とするスピン系に特化した特殊な式変形や条件緩和を必要としない。また凸計画問題とは異なり、多項式計画問題は一般に NP 困難であるが、二乗和 (Sum of Squares: 以下, SOS と略記) 緩和により、効率よく、よい精度で解が得られることが知られている。したがって、遅延存在下であっても、この多項式計画問題との相性のよさを積極的に用いるのは自然であろう。

ここで、遅延システムの解析・設計問題に対する関連既存結果を整理しておく。最終的に LMI 条件を導出している文献 [7, 27] などは、線形確率システム (もしくはそれとほぼ同様に扱えるセクタ有界型非線形システム) が対象である。一方、確定システムのみが対象ではあるが、Papachristodoulou らが、非線形遅延システムの解析・設計に SOS 緩和を用いている [11, 12]。これらの結果と本研究で導出する理論結果の違いにおいては、

- 確率システムを対象としている点
- 限られた集合上で時間発展するという事前情報 (たとえば上出の密度行列に関する制約) を、条件の保守性の軽減のために容易に組み込むことができる点が量子スピン系を扱う際に特に重要である。

以上の観点から、本論文では SOS 緩和を用いた遅延存在下の量子スピン制御系設計手法を提案する。構成は以下の通り: 次節では、本論文で扱う量子スピン制御系の概要および従来結果を説明する。主結果 (定理 1) を含む 3 節では、量子スピン制御系の安定化問題を統一的に扱うための問題設定を定式化したのち、それが多項式計画問題へと帰着されることを示す。つぎに 4 節では、主結果による 2 次元量子スピン制御系の設計例を示し、その有効性を検証する。最後に 5 節において、結論および今後の課題を述べる。

記法 半正定行列 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ および $z \in \mathbb{R}^n$ に対して、二次形式 $\|z\|_M^2 := z^T M z$ と表記する (M が単位行列の場合は、下付文字を省略する)。また $\mathbb{R}^n$ の semi-algebraic set の定義は文献 [14] などを参照。

(ノルムが定義された) 集合 D 上で定義された実数値

関数 $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。値域が $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ に含まれ $F(0) = 0$ であるとき、 F は準正定であるという。ある $\epsilon > 0$ が存在し

$$F(z) \geq \epsilon \|z\|^2$$

が任意の $z \in D$ に対して成り立つとき、 F は (D で) 正定であるという。同様に、 $-F$ が (準) 正定であるとき、 F を (準) 負定であるという。

確率過程 w_t は 1 次元標準 Wiener 過程であり、 $\mathbb{P}$, $\mathbb{E}$ はそれぞれ (適切に定義された確率測度に関する) 確率、期待値をあらわす。無限小生成作用素は $\mathcal{A}$ とあらわす。すなわち、関数 V の Markov 過程 x_t に沿った無限小生成作用素は

$$\mathcal{A}V(x) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x[x_t] - x}{t}$$

であり、右辺の $\mathbb{E}^x$ は、 $x_0 = x$ のもとでの期待値である。

ノルム空間もしくはその部分集合 X に対して、 $[-h, 0]$ を定義域とする X -値の一樣連続な関数全体からなる集合を C_X^h とする。このとき C_X^h はノルム

$$\|\tilde{x}\|_{C_X^h} := \sup_{-h \leq \theta \leq 0} \|\tilde{x}(\theta)\|_X$$

を備えた Banach 空間である。また、 w_0 ($t=0$ における w_t) から生成される σ -代数 $\mathcal{W}_0$ に関して可測な C_X^h -値確率変数の集合を $C_{X, \mathcal{W}_0}^h$ と表記する。

2. 量子スピン制御系

2.1 確率マスター方程式

本節では、本研究において想定する Fig. 1 の量子スピン制御系の概要を述べる。まず光共振器内に閉じ込めた原子にプローブ光を入射し両者を相互作用させ、原子の情報が付加されたプローブ光を検出器で観測し、その出力データ列からフィルタによって原子の状態を推定する。その後、推定された状態に基づいて適切な外部磁場を制御入力として系に加えることにより、フィードバック制御を実現する。

上述の状態推定に用いるフィルタリング方程式は、 N_s -次元量子スピン制御系の場合、角運動量演算子を正規化することで、つぎの確率マスター方程式 (Stochastic Master Equation, 以後 SME) とよばれる確率微分方程式により記述される。この方程式は、古典系での非線形フィルタリング方程式である Kushner-Stratonovich 方程式に対応する [2, 3, 21]:

$$d\rho_t = i[u_t F_y, \rho_t]dt - \frac{1}{2}[F_z, [F_z, \rho_t]]dt + \sqrt{\eta}[F_z \rho_t + \rho_t F_z - 2\text{tr}(F_z \rho_t)\rho_t]dw_t \quad (1)$$

この式において、状態空間 $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} := \{\rho \in \mathbb{C}^{N_s \times N_s} : \rho = \rho^* \geq 0, \text{tr } \rho = 1\} \quad (2)$$

Fig. 1 Quantum feedback control under continuous measurement

に属する ρ_t が時刻 t における量子系の推定値である。また $u_t \in \mathbb{R}$ は制御入力, $[A, B] = AB - BA$, 測定効率 η は $0 < \eta \leq 1$ を満たす定数, y 軸, z 軸方向の角運動量演算子 F_y, F_z は

$$F_y := \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & c_1 & & & \\ -c_1 & 0 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -c_{N_s-2} & 0 & c_{N_s-1} \\ & & & -c_{N_s-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_z := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} N_s-1 & & & & \\ & N_s-3 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -(N_s-3) & \\ & & & & -(N_s-1) \end{bmatrix},$$

$$c_m := \sqrt{(N_s - m)m}, \quad m = 1, 2, \dots, N_s - 1$$

となる。ベクトル ψ が F_z の固有ベクトルであるとき, $\rho = \psi\psi^*$ は F_z の固有状態であるという。一般に ρ_t を制御量, u_t を制御入力, (1) 式の SME を制御対象のダイナミクスとみなして制御系設計がおこなわれる。

ここで, この制御構造について注意点を述べる。一般に量子系の状態 (物理量) は適切な Hilbert 空間上の非可換作用素によりあらわされる。またそのダイナミクスは Kolmogorov 流の古典的な確率微分方程式により記述することはできず, 量子確率微分方程式とよばれる, 非可換作用素に拡張された枠組みが必要となる。しかし上で述べたように, 推定値, フィルタリング方程式をそれぞれ制御量, 制御対象とみなすことで, 古典的な確率システムの制御理論を適用することが可能となる。この特殊な問題設定の概念および妥当性については, たとえば解説記事 [23, 24] においてわかりやすく説明がなされている。一方, この制御構造において欠かすことのできない逐次的な状態推定は, (量子的でないという意味で) 古

典的な計算機により実行される。量子系の挙動はこれらの動作と比較して十分速いため, 状態推定ならびにそれにもとづいた制御入力の印加には無視できない遅延が生じ, 実際に理論で得られた結果を実装する際の障害となる [6, 17, 19]。

2.2 従来結果

制御目的は量子スピン制御系の安定化, つまり初期条件によらず ρ_t を確率 1 で F_z の指定された固有状態 ρ_f に収束させることである¹。この問題に対してしばしば用いられる距離関数に, 正定関数 $V_c: \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$

$$V_c(\rho) := 1 - \text{tr}(\rho\rho_f) \quad (3)$$

がある。このとき $V_c(\rho) = 0$ となる必要十分条件が $\rho = \rho_f$ であることは容易に示されるので, 制御目標は $V_c(\rho_t)$ を 0 に収束させることであると言い換えてもよい。ここで, 比較的簡単な計算により, 任意の $k > 0$ に対して制御入力 $u_t = ku_c(\rho_t)$,

$$u_c(\rho) = \text{tr}(i[F_y, \rho]\rho_f)$$

が ρ_f を局所安定化することを示すことができる [1]。しかしながら, スピン系のダイナミクスにおけるある種の対称性から, この制御入力は F_z の他のすべての固有状態をも平衡点としてしまう。したがって, ρ_t が目標状態以外の固有状態の近傍に存在するとき (ρ が ρ_f 以外の F_z の固有状態であるとき, $V_c(\rho) = 1$ である) には, それらへの収束を妨げる必要がある。この目的のためには $u_t \equiv 1$ という定数入力を採用し, これらの 2 種類の制御入力を目標状態からの距離に応じて適切に切り替える, すなわち $u_t = u_s(\rho_t)$,

$$u_s(\rho) := \begin{cases} 1, & V_c(\rho) \approx 1 \\ ku_c(\rho), & \text{それ以外} \end{cases}$$

により, 安定化が達成されることが示されている [8]。

一方で, 実用的, 学術的な関心から切替えを必要としない連続的な制御入力に関してもさまざまな研究がなされている。その代表的な制御則に, 上で紹介した切替え型制御則を自然に拡張した $u_t := u(\rho_t)$,

$$u(\rho) := k_1(1 - \text{tr}(\rho\rho_f)) + k_2 \text{tr}(i[F_y, \rho]\rho_f) \quad (4)$$

がある (Fig. 2 参照)。とくに文献 [21] の Subsection IV.G では, 2次元量子スピン系に対して, k_1 と k_2 を適切に与えればこの制御則により安定化が達成されることが, SOS 緩和を用いた解析により示されている。

ところで, これらどちらの制御則も, 時刻 t における制御入力 u_t が時刻 t における状態変数 ρ_t に依存しており, 実装できるのは遅延が存在しない場合のみである。

¹ 本論文を通じて, “安定化” という言葉をこの意味で用いる。既存結果における収束性の定義は, それぞれの文献および後出の注意 1 を参照されたい。

Fig. 2 Two typical control laws

これに対して、著者らは対象が2次元の量子スピン系の場合に、時間 τ (≥ 0) 過去のデータ $\rho_{t-\tau}$ にもとづいて u_t を決定しても、定数 k さえ適切に選べば上述の切替え型制御則（すなわち $u_t = u_s(\rho_{t-\tau})$ ）は有効であることを示した[6]。しかしながら、1節で述べた理由により、遅延存在下で実装可能な連続入力による安定化制御則を導出することは容易ではない。

3. 主結果

3.1 問題設定と多項式計画問題への帰着

本節では、量子スピン制御系のダイナミクスの代数的な構造だけを抽出したつぎの問題Aの一解法を与える：

【問題A】 関数 $f(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ はそれぞれ $2n$, n -変数の多項式であり、 $f(0,0) = g(0) = 0$ を満たし、 τ は非負の定数とする。また、原点を含む $\mathbb{R}^n$ の有界な semi-algebraic set C が存在し、任意の $\tilde{x}_i \in C_{C, W_0}^T$ に対して確率遅延微分方程式

$$dx_t = f(x_t, x_{t-\tau})dt + g(x_t)dw_t \quad (5)$$

$$x_\theta = \tilde{x}_i(\theta) \in C, \quad \theta \in [-\tau, 0] \quad (6)$$

の解¹が確率1で C にとどまり続けるとする。このとき、任意の初期条件 $\tilde{x}_i \in C_{C, W_0}^T$ に対して、この解が確率1で原点に収束するか判定せよ。

ここで、問題Aと量子スピン制御系の安定化問題との関係を述べる。まず、もともと行列値であった状態変数をベクトル化している。これには、たとえば ρ_t の各要素の実部および虚部を並べるなどすればよく、その方法は本質的ではない。つぎに、本論文で想定している問題設定において、遅延の影響を考慮すべきなのは、制御入力 u_t が $\rho_{t-\tau}$ の関数になっている点のみである。これと(1)式を踏まえて、拡散項 $g(\cdot)$ は遅延の影響をうけないと仮定した。(5)式における非線形性を多項式であらわされるものに限定しているが、これは(1)式が基本的に双線形系であることから妥当であり、(Kronecker積を用いて(1)式を適切に拡張することで記述される)複数量子系の場合においてもこの性質は変わらない。最後に、解析の対象を C で時間発展する経路のみとすることで、密度行列の構造を反映させている。行列の正定性

を semi-algebraic set により特徴付けるには、文献[21]の Proposition 1 を適用すればよい。より具体的なスピン系の制御問題に対する例に関しては、次節を参照されたい。

この問題に対するつぎの定理が本論文の主結果である：

【定理1】 問題Aに対して、 C 上の n -変数多項式 V_i ($i=0,1$), $\epsilon \in \mathbb{R}$ および $N \in \mathbb{R}^{2n \times n}$, $R, S, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在して次の条件が満たされるとする：

- (1) $\epsilon > 0$ かつ R, S, T は正定
- (2) V_0 は正定かつ V_1 は準正定
- (3) $\Upsilon : C \times C \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ は準負定：

$$\begin{aligned} F(x, x_d) := & \left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial x} \right)^T f(x, x_d) \\ & + \frac{1}{2} g(x)^T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial x} \right)^T g(x) \\ & + V_1(x) - V_1(x_d) + \|x\|_{\tau S + \epsilon I}^2 \\ & + 2 \begin{bmatrix} x^T & x_d^T \end{bmatrix} N (x - x_d) + \tau \|f(x, x_d)\|_R^2 \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon(x, x_d, y) := & F(x, x_d) \\ & + \begin{bmatrix} x \\ x_d \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & N & \tau N \\ N^T & -T & 0 \\ \tau N^T & 0 & -\tau R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_d \\ y \end{bmatrix} \quad (8) \end{aligned}$$

- (4) $\Theta : C \rightarrow \mathbb{R}$ は準正定：

$$\Theta(x) := \|x\|_S^2 - \|g(x)\|_T^2 \quad (9)$$

このとき、(5), (6) 式の解の原点は指数安定である、すなわち、ある正定数 α, β が存在し、

$$\mathbb{E}[\|x_t\|^2] \leq \alpha e^{-\beta t} \cdot \mathbb{E}[\|\tilde{x}_i\|_{C_C^T}^2], \quad t \geq 0 \quad (10)$$

が任意の初期条件 $\tilde{x}_i \in C_{C, W_0}^T$ に対して成立する。

ここで定理中の関数 V_i, Υ, Θ はすべて (x, x_d) など引数の各要素に関して)多項式である。したがって C が semi-algebraic set であるという仮定から、定理1の条件の判定は煩雑に見えるが、いわゆる多項式計画問題にすぎないため、SOS緩和を介して凸計画問題に帰着させることで、効率的に解くことができる。さらに定理中にあらわれる各多項式は、 ϵ, N, R, S, T および多項式 V_i の各係数といった決定変数に関して線形となっている。これは、条件を満たす決定変数の探索も同様に効率的におこなえることを意味する。詳細は4.2節、文献[13,14]を参照されたい。

(注意1) 文献[6]の Super-Martingale 不等式を用いた議論と以下の証明に用いられる Lyapunov-Krasovskii 汎関数により、確率安定性も導くことができる。すなわち問題Aにおいて、初期条件 $\tilde{x}_i$ は確定的（確率変数ではない）とすると、任意の $d > 0$ に対して

$$\lim_{\|\tilde{x}_i\|_{C_C^T} \rightarrow 0} \mathbb{P} \left[\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|x_t\| > d \right] = 0$$

¹解の存在性と一意性は仮定より自動的に保証される[5]。

である（証明の詳細は省略する）．これと (10) 式から、文献 [6] の意味での大域的安定性もただちに従う．

3.2 定理 1 の証明

本節では定理 1 の証明をおこなう．以下で扱う確率過程はすべて有界集合内で発展するため、Fubini の定理から時間に関する積分と確率測度に関する積分（期待値）の順序交換は適宜可能である．よって証明内においては、この事実を注意なく用いる．また、遅延確率システムに対する基礎的な結果については、文献 [5, 7, 9, 27] などが参考になる．

証明の中心となるのはつぎの命題である：

【命題】 問題 A における確率微分方程式 (5)–(6) の解 x_t および $t \geq \tau$ に対して、 $C_C^{2\tau}$ -値の確率過程 $\tilde{x}_t$ を

$$\tilde{x}_t(\theta) := x_{t+\theta}, \quad \theta \in [-2\tau, 0]$$

により定義する．このとき $V : C_C^{2\tau} \rightarrow \mathbb{R}$ 、正の定数 $L_c, L_i, \delta, \epsilon$ が存在して、

$$\begin{aligned} \delta \|\tilde{x}(0)\|^2 &\leq V(\tilde{x}) \\ &\leq L_c \|\tilde{x}(0)\|^2 + L_i \int_{-2\tau}^0 \|\tilde{x}(\theta)\|^2 d\theta \end{aligned} \quad (11)$$

さらに任意の $t \geq \tau$ に対して

$$\mathbb{E}[\mathcal{A}V(\tilde{x}_t)] \leq -\epsilon \mathbb{E}[\|\tilde{x}_t(0)\|^2] \quad (12)$$

が成り立つならば、定理 1 と同じ意味で指数安定である．（証明） まず f, g に関する仮定から、

$$\mathbb{E}[\|x_t\|^2] < K \cdot \mathbb{E}[\|x_i\|_{C_C^\tau}^2], \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (13)$$

を満たす正の定数 K が存在する（たとえば文献 [5] の Theorem 2.1 などを参照）．また、紙幅の都合上詳細は省略するが、文献 [7] の Theorem 3.1 の証明とはほぼ同様の議論により

$$\mathbb{E}[\|x_t\|^2] \leq \alpha' e^{-\beta'(t-\tau)} \cdot \mathbb{E}[\|\tilde{x}_\tau\|_{C_C^{2\tau}}^2], \quad t \geq \tau \quad (14)$$

を満たす正の定数 α', β' の存在性を示すことができる．ゆえに (13), (14) 式から求める結果が従う．□

以下では、定理 1 の仮定が満たされるとき、

$$\begin{aligned} V(\tilde{x}) &:= V_0(\tilde{x}(0)) + \int_{-\tau}^0 V_1(\tilde{x}(\theta)) d\theta \\ &\quad + \int_{-\tau}^0 \int_v^0 V_2(\tilde{x}(\theta), \tilde{x}(-\tau+\theta)) d\theta dv \\ V_2(x, x_d) &:= \|f(x, x_d)\|_R^2 + \|x\|_S^2 \end{aligned} \quad (15)$$

により定義される $C_C^{2\tau}$ 上の汎関数 V が命題で要求されている条件を満たすことを示す．まず、(11) 式に関する条件を確認する．左辺を満たす $\delta > 0$ の存在性は V_0 の正定性より自明．また V_j ($j=0,1$) はそれぞれ $V_j(0)=0$ を満たす n -変数多項式であることと C の有界性から、

$$|V_j(x)| \leq L_j \|x\|^2, \quad x \in C$$

を満たす $L_j > 0$ ($j=0,1$) が存在する．同様に、

$$|V_2(x, x_d)| \leq L_2 (\|x\|^2 + \|x_d\|^2), \quad x, x_d \in C$$

を満たす L_2 が存在し、さらに

$$\begin{aligned} &\int_{-\tau}^0 \int_v^0 \{\|\tilde{x}(\theta)\|^2 + \|\tilde{x}(-\tau+\theta)\|^2\} d\theta dv \\ &\leq \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \{\|\tilde{x}(\theta)\|^2 + \|\tilde{x}(-\tau+\theta)\|^2\} d\theta dv \\ &= \tau \int_{-2\tau}^0 \|\tilde{x}(\theta)\|^2 d\theta \end{aligned}$$

に注意すると、(11) 式右辺を満たす $L_c, L_i > 0$ の存在性も示される．

つぎに Itô's rule にもとづいて解 $\tilde{x}_t$ に沿った V の無限小生成作用素を計算すると

$$\begin{aligned} \mathcal{A}V(\tilde{x}) &= \left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial x} \Big|_{\tilde{x}(0)} \right)^\top f(\tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tau)) \\ &\quad + \frac{1}{2} g(\tilde{x}(0))^\top \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial x} \right)^\top \Big|_{\tilde{x}(0)} g(\tilde{x}(0)) \\ &\quad + V_1(\tilde{x}(0)) - V_1(\tilde{x}(-\tau)) \\ &\quad + \tau (\|f(\tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tau))\|_R^2 + \|\tilde{x}(0)\|_S^2) \\ &\quad - \int_{-\tau}^0 \{\|f(s)\|_R^2 + \|\tilde{x}(s)\|_S^2\} ds \end{aligned}$$

を得る．一方で、直接計算により、任意の半正定行列 X に対して、つぎの二つの不等式が成り立つ：

$$\begin{aligned} 0 &\leq \tau e^\top X e - \int_{-\tau}^0 e^\top X e ds, \\ 0 &= (2-2) \cdot e^\top N \left\{ \tilde{x}(0) - \tilde{x}(-\tau) - \int_{-\tau}^0 \underline{f}(s) ds \right\} \\ &\leq 2e^\top N (\tilde{x}(0) - \tilde{x}(-\tau)) - \int_{-\tau}^0 2e^\top N \underline{f}(s) ds \\ &\quad + e^\top N T^{-1} N^\top e \\ &\quad + \left\| \tilde{x}(0) - \tilde{x}(-\tau) - \int_{-\tau}^0 \underline{f}(s) ds \right\|_T^2 \end{aligned}$$

ただし表記の簡単化のため $\underline{f}(s) := f(\tilde{x}(s), \tilde{x}(-\tau+s))$ 、 $e := [\tilde{x}(0)^\top \tilde{x}(-\tau)^\top]^\top$ とし、最後の不等式の導出には付録の補題 1 をもちいた．これら 3 式の両辺を加えると、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}V(\tilde{x}) + \epsilon \|\tilde{x}(0)\|^2 &\leq \tilde{Y}(\tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tau)) - G_1(\tilde{x}) - G_2(\tilde{x}) \\ &\leq \tilde{Y}(\tilde{x}(0), \tilde{x}(-\tau)) - G_2(\tilde{x}) \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし（保守性を生じることなく） $X := NR^{-1}N^\top \geq 0$ と固定し、

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(x, x_d) &:= F(x, x_d) + \left\| \begin{bmatrix} x^\top & x_d^\top \end{bmatrix}^\top \right\|_{\tau X + NT^{-1}N^\top}^2 \\ G_1(\tilde{x}) &:= \int_{-\tau}^0 \left\| \begin{bmatrix} e^\top & \underline{f}(s)^\top \end{bmatrix}^\top \right\|_{\Xi}^2 ds \end{aligned}$$

$$G_2(\tilde{x}) := \int_{-\tau}^0 \|\tilde{x}(s)\|_S^2 ds - \left\| \tilde{x}(0) - \tilde{x}(-\tau) - \int_{-\tau}^0 \underline{f}(s) ds \right\|_T^2$$

$$\Xi := \begin{bmatrix} X & N \\ N^\top & R \end{bmatrix} \geq 0$$

である。さらに $t \geq \tau$ に対しては、(5) 式は

$$x_t - x_{t-\tau} - \int_{t-\tau}^t f(x_s, x_{s-\tau}) ds = \int_{t-\tau}^t g(x_s) dw_s$$

を意味することに注意すると、 $G_2(\tilde{x})$ に関しては、

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[G_2(\tilde{x}_t)] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{-\tau}^0 \|\tilde{x}_t(s)\|_S^2 ds - \left\| \int_{-\tau}^0 g(\tilde{x}_t(s)) dw_s \right\|_T^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{-\tau}^0 \|\tilde{x}_t(s)\|_S^2 ds - \left\| g(\tilde{x}_t(s)) \right\|_T^2 ds \right] \geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。なお、この式変形において、Itô の等長性と Θ の準正定性を用いた。したがって、

$$\mathbb{E}[\mathcal{A}V(\tilde{x}_t) + \epsilon \|\tilde{x}_t(0)\|^2] \leq \mathbb{E}[\tilde{Y}(\tilde{x}_t(0), \tilde{x}_t(-\tau))]$$

が得られる。最後に、付録に示すように $\tilde{Y}$ は準負定であり、これはただちに (12) 式を意味する。以上の議論より、定理が示された。

4. 主結果の適用例

4.1 2次元量子スピン制御系

本節では、定理 1 を用いて、 $u_t = u(\rho_{t-\tau})$ および (4) 式により定義される (切替えを含まない) 制御則が 2 次元量子スピン系を安定化するための十分条件を与える。

まず目標状態である F_z の固有状態は上向きおよび下向きスピンに対応する

$$\rho_\uparrow := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho_\downarrow := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

のいずれかである。ここで (1) 式の SME を偏差

$$\begin{bmatrix} x_t^{(1)} & x_t^{(2)} + i x_t^{(3)} \\ x_t^{(2)} - i x_t^{(3)} & -x_t^{(1)} \end{bmatrix} := \begin{cases} \rho_f - \rho_t, & \text{if } \rho_f = \rho_\uparrow \\ \rho_t - \rho_f, & \text{if } \rho_f = \rho_\downarrow \end{cases}$$

に関して具体的に書き下すことにより、

$$f(x, x_d) := \begin{bmatrix} -k x_d x^{(2)} \\ k x_d \left(x^{(1)} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} x^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$g(x) := \sqrt{\eta} \begin{bmatrix} 2x^{(1)}(x^{(1)} - 1) \\ (2x^{(1)} - 1)x^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$k := \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix},$$

$$x := \begin{bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} \end{bmatrix}^\top,$$

および領域 C を $\mathbb{R}^2$ 上の円盤

$$C := \left\{ \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^{(1)}(x^{(1)} - 1) + x^{(2)2} \leq 0 \right\}$$

として定義すると、つぎの 2 条件

- $u_t = u(\rho_{t-\tau})$ および (4) 式のもとでの SME(1) の解 ρ_t が、初期条件によらず ρ_f に確率 1 で収束する
- 問題 A の確率遅延微分方程式の解 x_t が、初期条件によらず原点に確率 1 で収束する

は等価であることが確認できる [6, 21]。そこでこの問題に定理 1 を適用すると、つぎの系が得られる：

【系 1】 非負の定数 τ に対して、つぎの条件を満たす $\epsilon, q \in \mathbb{R}$, $Q, R, S, T, U \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $N \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ が存在するとする：

- 1) $\epsilon > 0$ かつ R, S, T は正定
- 2) C 上の実数値関数 V_0 は正定、 V_1 は準正定：

$$V_0(x) := [1, 0]x + x^\top U x \quad (16)$$

$$V_1(x) := [q, 0]x + x^\top Q x \quad (17)$$

- 3) (8) 式および次式で定義される $\Upsilon : C \times C \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ は準負定：

$$\begin{aligned} F(x, x_d) &:= f(x, x_d) + 2x^\top U f(x, x_d) \\ &\quad + g(x)^\top U g(x) \\ &\quad + V_1(x) - V_1(x_d) + \|x\|_{\tau S + \epsilon I}^2 \\ &\quad + 2 \begin{bmatrix} x^\top & x_d^\top \end{bmatrix} N (x - x_d) + \tau \|f(x, x_d)\|_R^2 \end{aligned} \quad (18)$$

- 4) (9) 式で定義される $\Theta : C \rightarrow \mathbb{R}$ は準正定

このとき、任意の F_z の固有状態 ρ_f は、(4) 式の $u(\cdot)$ を用いて定義される制御則 $u_t = u(\rho_{t-\tau})$ により指数安定化される。言い換えると、正定数 α, β が存在し、任意の初期条件 $\tilde{\rho}_i \in C_{S, W_0}^\tau$ に対して、(1) 式および

$$\rho_\theta = \tilde{\rho}_i(\theta) \in S, \quad \theta \in [-\tau, 0]$$

の解 ρ_t が

$$\mathbb{E}[\|\rho_t - \rho_f\|^2] < \alpha e^{-\beta t} \cdot \mathbb{E} \left[\sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \|\tilde{\rho}_i(\theta) - \rho_f\|^2 \right]$$

を満たす。ここでノルムは任意の行列ノルムである。

(証明) 定理 1 から明らか。□

(注意 2) この系において V_0 および V_1 に組み込まれている x の第 1 要素 (すなわち $[1, 0] \times x$) は、(3) 式で与えられる目標状態からの距離関数 $V_c(\rho)$ に対応する。

4.2 数値例

系 1 の有効性を数値例により検証する。多項式計画問題を解くにあたっては、SOS 緩和ならびに凸計画問題 (半正定値計画問題) のソルバーをパッケージ化した MATLAB の SOSTOOLS を用いた [15, 18]。

以下では、測定効率を $\eta = 0.9$ とした。Fig. 3 は、制

Fig. 3 Gain (k_1, k_2) versus the maximal delay length for which global stability is guaranteed

御則中のパラメータ k_1, k_2 と安定性が保証される最大の遅延長の関係を示している（図下部は等高線であり、結果は k_1 の符号に依存しなかったため、横軸を $|k_1|$ とした）。これにより、遅延存在下の2次元量子スピン系に対しても切替えを必要としない安定化制御則が存在することが示された。また安定性が保証される遅延長は、ゲインパラメータのとり方に大きく依存する。

参考のため、得られた制御則のもとでの量子スピン系の時間応答を示そう。例として $k_1 = 0.2, k_2 = 2.0$ とすると、Fig. 3 から $\tau \leq 0.25$ であれば安定化が達成される。そこで、 $\tau = 0.25$ 、目標状態は $\rho_f = \rho_i$ 、初期条件は $\{\rho \in \mathcal{S} : V_c(\rho) \geq 1/2\}$ から無作為に抽出した ρ_i に対して $\rho_t \equiv \rho_i, -\tau \leq t \leq 0$ とした。Fig. 4 は Wiener 過程を離散近似し 100 通りの標本経路を生成し、目標状態からの距離 $V_c(\rho)$ およびそれらの各時刻における平均値を示している。すくなくともこの例においては、すべての標本経路が目標状態 ρ_f へ収束している。

（注意 3）この節で示された結果はあくまで理論的なものであり、安定性が保証された遅延長の物理的意義の検討は今後の重要な課題である。

5. おわりに

本論文では、量子スピン安定化問題を統一的に扱うために、“有界な semi-algebraic set 上で時間発展する、多項式係数の確率遅延システム”に対するむだ時間依存型安定性条件を導出した。定理 1 で示したように、この問題は多項式計画問題に帰着されるため、SOS 緩和を介して計算機により効率的に解くことができる。また、むだ時間システムの制御理論としても、著者の知る限り、定理 1 は非線形確率システムに対する新しいむだ時間依存型安定性条件を与えている。

つぎに個々の具体的な問題への適用例として、2次元量子スピン制御系の設計をおこなった。ここでは、文

Fig. 4 Time response of average process

献 [6] の手法では得られなかった、遅延影響下での連続的なフィードバック制御則を与えることにより、提案手法の有効性を確認した。なお、近年、むだ時間系の安定性判別に関する論文が数多く発表されており、さまざまなベンチマーク問題が存在する。これらの問題と比較しても、量子スピン制御問題は現実的な意義があるのみならず、

(1) 確率雑音、非線形性の影響が強く、

(2) 今後、より高次元の系への適用が不可欠

という点で、ベンチマーク問題としても興味深い問題であるといえる。

最後に本研究の今後の課題を述べる。本論文における問題設定は、基本的には複数量子系の制御問題（たとえば文献 [25] にある 2 粒子のエンタングルメント生成）にも適用可能である。しかしながら、本論文では SOS 緩和において探索する多項式の次数と保守性、計算時間等の関係の議論をおこなっていないため、より大規模の問題が現実的な時間で解けるのかは自明ではない。新しい補償器（たとえば動的な補償器など）による制御性能の改善を図りつつ、こうした計算論的複雑さとの関係を探ることは大きな意義のある課題である。

本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金（若手研究 (B) No. 18760316）による支援を受けて行われています。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- [1] C. Altafini and F. Ticozzi: Almost global stochastic feedback stabilization of conditional quantum dynamics; *arXiv:quant-ph/0510222* (2005)
- [2] V. P. Belavkin: Quantum stochastic calculus and quantum nonlinear filtering; *J. Multivariate Anal.*, Vol. 42, pp. 171–201 (1992)
- [3] L. Bouten, R. van Handel and M. R. James: An introduction to quantum filtering; *SIAM J. Control Optim.*, Vol. 46, Issue. 6, pp. 2199–2241 (2006)

- [4] J. M. Geremia, J. K. Stockton and H. Mabuchi: Real-time quantum feedback control of atomic spin-squeezing; *Science*, Vol. 304, pp. 270–273 (2004)
- [5] H. J. Kushner: On the stability of processes defined by stochastic difference-differential equations; *J. Differential Equations*, Vol. 4, pp. 424–443 (1968)
- [6] K. Kashima and K. Nishio: Global stabilization of two-dimensional quantum spin systems despite estimation delay; *Proc. 46th IEEE CDC* (2007)
- [7] X. Mao: Exponential stability of stochastic delay interval systems with Markovian switching; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-47, No. 10, pp. 1604–1612 (2002)
- [8] M. Mirrahimi and R. van Handel: Stabilizing feedback controls for quantum systems; *SIAM J. Cont. Optim.*, Vol. 46, Issue. 2, pp. 445–467 (2007)
- [9] S. A. Mohammed: Stochastic differential systems with memory: Theory, examples and applications; *Stochastic Analysis and Related Topics VI (Geilo, 1996)*, pp. 1–77, Birkhäuser (1998)
- [10] M. A. Nielsen and I. L. Chuang: *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge Univ. Press (2000)
- [11] A. Papachristodoulou: Analysis of nonlinear time delay systems using the sum of squares decomposition; *Proc. ACC* (2004)
- [12] A. Papachristodoulou: Robust stabilization of nonlinear time delay systems using convex optimization; *Proc. Joint 44th IEEE CDC and ECC '05* (2005)
- [13] P. A. Parillo: Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization; PhD thesis, California Institute of Technology (2000)
- [14] P. A. Parillo: Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems; *Math. Program.*, Ser. B, Vol. 96, pp. 293–320 (2003)
- [15] S. Prajna, A. Papachristodoulou and P. A. Parillo: SOSTOOLS ver 2.02: Sum of squares optimization toolbox for MATLAB (2004); Available from <http://www.cds.caltech.edu/sostools/>
- [16] J. J. Sakurai: *Modern Quantum Mechanics* (revised ed.), Addison Wesley (1994)
- [17] D. A. Steck, K. Jacobs, H. Mabuchi, S. Habib and T. Bhattacharya: Feedback cooling of atomic motion in cavity QED; *Phys. Rev. A*, Vol. 74, No. 1, 012322 (2006)
- [18] J. Sturm: SeDuMi version 1.1 (2006); Available from <http://sedumi.mcmaster.ca/>
- [19] J. Stockton, M. Armen and H. Mabuchi: Programmable logic devices in experimental quantum optics; *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. 19, pp. 3019–3027 (2002)
- [20] 竹内：量子コンピュータ，講談社 (2005)
- [21] R. van Handel, J. K. Stockton and H. Mabuchi: Feedback control of quantum state reduction; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-50, No. 6, pp. 768–780 (2005)
- [22] H. M. Wiseman: Quantum theory of continuous feedback; *Phys. Rev. A*, Vol. 49, No. 3, pp. 2133–2150 (1994)
- [23] 山本：フィードバック制御による量子エンタングルメント生成；システム/制御/情報，Vol. 49, No. 11, pp. 448–453 (2005)
- [24] 山本，津村：量子系のシステム制御理論；計測と制御，Vol. 46, No. 3, pp. 170–177 (2007)
- [25] N. Yamamoto, K. Tsumura and S. Hara: Feedback control of quantum entanglement in a two-spin system; *Automatica*, Vol. 43, pp. 981–992 (2007)
- [26] 柳澤：量子制御の展望 – その定式化と制御理論の接点；システム/制御/情報，Vol. 49, No. 11, pp. 442–447 (2005)
- [27] D. Yue and Q.-L. Han: Delay-dependent exponential stability of stochastic systems with time-varying delay, nonlinearity, and Markovian switching; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-50, No. 2, pp. 217–222 (2005)

付 録

付録 1. 内積の上限の評価

【補題 1】 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ および正定行列 $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して、

$$2|x^T y| \leq \|x\|_T^2 + \|y\|_{T^{-1}}^2$$

が成り立つ。

(証明) 平方根行列 $T^{1/2}$ に対して

$$(T^{1/2}x \pm T^{-1/2}y)^T (T^{1/2}x \pm T^{-1/2}y) \geq 0$$

を計算すればよい。 $\square$

付録 2. $\tilde{\Upsilon}$ の準負定性

まず，Schur complement を変形したつぎの補題を示そう。

【補題 2】 領域 D を原点を含む $\mathbb{R}^n$ の部分集合， $N \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ， $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ とする。このとき $W < 0$ かつ $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ に対して， $D \times \mathbb{R}^m$ 上の関数

$$\Upsilon(z, y) := F(z) + \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & N \\ N^T & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}$$

が (準) 負定となるならば， D 上の関数

$$\tilde{\Upsilon}(z) := F(z) - z^T N W^{-1} N^T z$$

も (準) 負定である。

(証明) いま Υ が負定ならば，ある $\epsilon > 0$ が存在し，

$$|\Upsilon(z, y)| \leq -\epsilon(\|z\|^2 + \|y\|^2)$$

が任意の $z \in D$ ， $y \in \mathbb{R}^m$ に対して成り立つ。ここで

$$\bar{y} := -W^{-1} N^T z \in \mathbb{R}^m$$

に対しては

$$\Upsilon(z, \bar{y}) = \tilde{\Upsilon}(z)$$

が成り立つことに注意すると、任意の $z \in D$ に対して

$$\tilde{\Upsilon}(z) \leq -\epsilon(\|z\|^2 + \|\bar{y}\|^2) \leq -\epsilon\|z\|^2$$

を得る。準負定性に関しても同様。 $\square$

もしも $D = \mathbb{R}^n$ かつ $F(\cdot)$ が2次形式ならば、この補題は Schur complement であり、負定性に関する2条件は等価となる。ここで、 $\tilde{\Upsilon}$ の D における負定性の十分条件を判定するには、 Υ の定義域を $D \times \mathbb{R}^m$ に制限してもよいという点がこの補題の主張である。補題 2 と Υ の正定性の仮定から $\tilde{\Upsilon}$ の正定性が示される。