複数の勾配を用いる確率的楕円体法*

和田 孝之[†]・藤崎 泰正[‡]

Stochastic Ellipsoid Methods with Multiple Cuts*

Takayuki WADA[†] and Yasumasa FUJISAKI[‡]

A stochastic ellipsoid method with multiple cuts is proposed for a class of robust feasibility problems which is to find a solution satisfying a set of parameter-dependent convex constraints for all possible parameter values. In particular, a new update rule is presented for constructing a smaller ellipsoid which contains the intersection of a previous ellipsoid and strips determined by given multiple gradients. A quantitative analysis of the volume of the updated ellipsoid is also provided, which leads to a further modification of the algorithm achieving fast convergence.

1. はじめに

確率的楕円体法 [1,2] とは, パラメータに依存する制約条件をもつ可解問題を解くために提案されたアルゴリズムであり, ランダムサンプリングと楕円体法を組み合わせたものである. このアルゴリズムの効率を左右する鍵は, ランダムサンプルした不確かさに対応する制約条件に基づいて, 解になり得る領域を含む体積のより小さい楕円体を得るための更新法にある. そこで, 著者らは, ロバスト制御系の設計問題が, 一般に, 不確かさに依存する複数の制約条件で記述されることに注目し, それらを個別に扱い, 一つの不確かさに対して楕円体を複数回更新するアルゴリズムを提案した [3]. そして, このアルゴリズムを用いると, 実際に解を得るまでの不確かさのサンプル数が少なくなることを数値例により示した.

それに対して本論文では, ランダムサンプルした不確かさに対応する複数の制約条件のそれぞれについて劣勾配が与えられるとき, それらをまとめて取り扱う楕円体の新たな更新法を提案する. そして, この更新法では, 用いる劣勾配の数が 1 の場合より必ず小さい体積の楕円

体を得られることを示す. さらに, この更新法の優位性を定量的に評価するために, 更新前後の楕円体の体積比を, 用いる劣勾配の数と劣勾配の数が 1 の場合の更新前後の楕円体の体積比によって特徴づけ, この評価を用いてより早くアルゴリズムが停止するよう改善している. 最後に, それらの効果を数値例にて確認する.

2. 複数の勾配を用いる確率的楕円体法

本論文では, 複数の制約条件をもつロバスト可解問題

$$\text{Find } z \in \mathbb{R}^n \quad \text{s.t. } v_i(z, \theta) \leq 0 \quad \forall \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p \quad (1) \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

について考える. ただし, Θ は可測集合, $v_i: \mathbb{R}^n \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ は z について凸な可測関数とする. なお, 楕円体法を用いるため, $n \geq 2$ と仮定する [4].

いま, v_i は θ について凸性をもつと仮定していないため, この問題の解集合

$$\mathcal{F} \triangleq \{z \in \mathbb{R}^n \mid v_i(z, \theta) \leq 0, \forall \theta \in \Theta, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$$

の要素を見つけることは一般に困難である. そこで, Θ 上に確率測度 $\mathcal{P}$ を導入し, 与えた $\varepsilon \in (0, 1)$ について

$$\mathcal{P}\{\theta \in \Theta \mid v_i(z, \theta) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\} \geq 1 - \varepsilon$$

を満足する確率的解 [2] を信頼度 $\delta \in (0, 1)$ 以上で求めることを考える. 本論文では, 複数の勾配を直接利用する確率的楕円体法を提案する. アルゴリズムの実行に先だって, 初期値 $Q_0 > 0$, z_0 を与え, 初期楕円体を,

* 原稿受付 2007 年 8 月 29 日

[†] 神戸大学 大学院 自然科学研究科 Graduate School of Science and Technology, Kobe University; 1-1 Rokko-dai, Nada ward, Kobe city, Hyogo 657-8501, JAPAN

[‡] 神戸大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Kobe University; 1-1 Rokko-dai, Nada ward, Kobe city, Hyogo 657-8501, JAPAN

Key Words: robust control, randomized algorithm, robust feasibility problem, ellipsoid method.

$$\mathcal{E}_0 \doteq \{z \in \mathbb{R}^n \mid (z - z_0)^T Q_0^{-1} (z - z_0) \leq 1\}$$

と定義し、 $\mu > 0$ を与える．そして、以下の定数

$$\bar{\ell} \doteq \left\lceil 2(n+1) \ln \frac{\text{Vol}(\mathcal{E}_0)}{\mu} \right\rceil, \quad \bar{\kappa} \doteq \left\lceil \ln \frac{\bar{\ell}}{\delta} \left\lceil \ln \frac{1}{1-\varepsilon} \right\rceil \right\rceil \quad (2)$$

をあらかじめ計算しておく．ただし、 Vol は体積を表す．

与えた初期楕円体 $\mathcal{E}_0$ が解を探索する領域であり、その中心 z_0 が解の候補の初期値である．アルゴリズムでは、不確かさをランダムサンプルし、対応する制約条件を解の候補が満足しているかチェックすることを繰り返す．この繰り返しが k で記述する．もし制約を満足していなければ、解の候補を更新し、より体積の小さな楕円体を構成する．そして、解の候補の更新回数 ℓ が $\bar{\ell}$ 以上となれば、初期楕円体内部の解集合 $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{F}$ の体積が十分に小さな値 μ 未満となるため、解なしと出力して停止する．また κ は、ある解の候補が不確かさに対応する制約条件を連続して何回満足し続けたかを表しており、これが $\bar{\kappa}$ となったとき現在の解の候補を出力して停止する．なお、 $\bar{\ell}$ は、更新前後の楕円体の体積比の上界が $\exp(-1/(2n+2))$ となる [4] ことから、 $\mu \geq \exp(-\bar{\ell}/(2n+2)) \text{Vol}(\mathcal{E}_0)$ となるように与えている．また、 $\bar{\kappa}$ は、信頼度に関する不等式 $\bar{\ell}(1-\varepsilon)^{\bar{\kappa}} \leq \delta$ より決定している．

【アルゴリズム 1】

- ステップ 1 $k := 0, \ell := 0, \kappa := 0$ とする．
ステップ 2 もし、 $\ell \geq \bar{\ell}$ ならば、解なしと出力して停止する．
ステップ 3 もし、 $\kappa \geq \bar{\kappa}$ ならば、 z_k を出力して停止する．
ステップ 4 集合 Θ から、確率測度 $\mathcal{P}$ に従い θ_k をランダムサンプルする．
ステップ 5 もし、 $v_i(z_k, \theta_k) > 0$ となるものが存在するならば、そのような $v_i(z, \theta)$ について、 z_k, θ_k での z についての劣勾配 g_i のうち一次独立なものを並べ、

$$G \doteq [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_q], \quad 1 \leq q < n$$

とおく．ただし、 $g_i^T Q_k g_j \leq 0, \forall i \neq j$ となるもののみを選ぶ．そして、楕円体を

$$z_{k+1} := z_k - \gamma Q_k \tilde{G} e \quad (3)$$

$$Q_{k+1} := \eta (Q_k - \sigma Q_k \tilde{G} \tilde{G}^T Q_k) \quad (4)$$

と更新し、 $\ell := \ell + q, \kappa := 0$ とする．ここで、 e は全要素が 1 の q 次元列ベクトルであり、

$$\tilde{G} \doteq G(G^T Q_k G)^{-1/2} \quad (5)$$

$$\gamma \doteq \frac{\alpha}{1+2\alpha} \quad (6)$$

$$\eta \doteq \frac{1+2\alpha+q\alpha^2}{1+2\alpha} \quad (7)$$

$$\sigma \doteq \frac{2\alpha}{1+2\alpha} \quad (8)$$

$$\alpha \doteq \frac{-(n-2) + \sqrt{(n-2)^2 + 4(n-q)}}{2(n-q)} \quad (9)$$

である．

もし、すべての i について $v_i(z_k, \theta_k) \leq 0$ ならば、 $z_{k+1} := z_k, Q_{k+1} := Q_k$ と楕円体を保持し、 $\kappa := \kappa + 1$ とする．

ステップ 6 $k := k + 1$ とし、ステップ 2 へ戻る．

(注意 1) アルゴリズム 1 のステップ 5 で $q = 1$ とすれば、従来の確率的楕円体法 [2] に一致する．

アルゴリズム 1 における正定行列 Q_k とベクトル $z_k, g_1, g_2, \dots, g_q$ を用いて、

$$\mathcal{E}_k \doteq \{z \in \mathbb{R}^n \mid (z - z_k)^T Q_k^{-1} (z - z_k) \leq 1\}$$

$$\mathcal{H}_i \doteq \{z \in \mathbb{R}^n \mid g_i^T (z - z_k) \leq 0\}, \quad 1 \leq i \leq q$$

とおくと、 $\mathcal{E}_k \cap \left(\bigcap_{i=1}^q \mathcal{H}_i\right)$ は解になりえる領域であり、新しい楕円体 $\mathcal{E}_{k+1}$ はこの領域を含む必要がある．提案手法がこの性質を持つことを以下の定理で示す．

【定理 1】 アルゴリズム 1 のステップ 5 で構成した楕円体について、

$$\mathcal{E}_k \cap \left(\bigcap_{i=1}^q \mathcal{H}_i\right) \subseteq \mathcal{E}_{k+1} \quad (10)$$

が成り立つ．

(証明) ベクトル $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_q$ と行列 W を、

$$[\tilde{g}_1 \ \dots \ \tilde{g}_q] \doteq [g_1 \ \dots \ g_q] W, \quad W \doteq (G^T Q_k G)^{-1/2}$$

と定義する．いま、 $G^T Q_k G > 0$ の非対角要素がすべて非正となるように $g_1, g_2, \dots, g_q$ を選んでいるため、平方根行列 $(G^T Q_k G)^{1/2} > 0$ の非対角要素はすべて非正である [5]．よって、その逆行列 W の要素 w_{ij} はすべて非負である [6]．これより、任意の $z \in \bigcap_{i=1}^q \mathcal{H}_i$ に対して、

$$\tilde{g}_j^T (z - z_k) = \sum_{i=1}^q w_{ij} g_i^T (z - z_k) \leq 0 \quad (11)$$

である．よって、 $\tilde{g}_j$ についても同様に

$$\tilde{\mathcal{H}}_j \doteq \{z \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{g}_j^T (z - z_k) \leq 0\}, \quad 1 \leq j \leq q$$

と定義すると、任意の j について、 $\bigcap_{i=1}^q \mathcal{H}_i \subseteq \tilde{\mathcal{H}}_j$ であり、共通部分についても、

$$\bigcap_{i=1}^q \mathcal{H}_i \subseteq \bigcap_{j=1}^q \tilde{\mathcal{H}}_j \quad (12)$$

である．

つぎに、任意の $z \in \mathcal{E}_k$ について、 $\tilde{g}_j^T Q_k \tilde{g}_j = 1$ に注意して展開すると、

$$\begin{aligned} 0 &\geq (z - z_k)^T Q_k^{-1} (z - z_k) - 1 \\ &= (z - z_k + Q_k \tilde{g}_j - Q_k \tilde{g}_j)^T Q_k^{-1} (z - z_k + Q_k \tilde{g}_j - Q_k \tilde{g}_j) \\ &\quad - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (z - z_k + Q_k \tilde{g}_j)^T Q_k^{-1} (z - z_k + Q_k \tilde{g}_j) \\
&\quad - (z - z_k)^T \tilde{g}_j - \tilde{g}_j^T (z - z_k) - 2 \\
&\geq -2(\tilde{g}_j^T (z - z_k) + 1)
\end{aligned}$$

より, 任意の $z \in \mathcal{E}_k$ について $\tilde{g}_j^T (z - z_k) + 1 \geq 0$ である. また, (11) 式より任意の $z \in \tilde{\mathcal{H}}_j$ について, $\tilde{g}_j^T (z - z_k) \leq 0$ である. そこで, 任意の $z \in \mathcal{E}_k \cap \tilde{\mathcal{H}}_j$ については, 各不等式の辺々の積をとれば,

$$\begin{aligned}
&(z - z_k)^T \tilde{g}_j (\tilde{g}_j^T (z - z_k) + 1) + ((z - z_k)^T \tilde{g}_j + 1) \tilde{g}_j^T (z - z_k) \\
&= 2(z - z_k)^T \tilde{g}_j \tilde{g}_j^T (z - z_k) + (z - z_k)^T \tilde{g}_j + \tilde{g}_j^T (z - z_k) \leq 0
\end{aligned}$$

を満足する. そこで, 帯 $\tilde{\mathcal{S}}_j$, $1 \leq j \leq q$ を,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{S}}_j &\doteq \{ z \in \mathbb{R}^n \mid \\
&\quad 2(z - z_k)^T \tilde{g}_j \tilde{g}_j^T (z - z_k) + (z - z_k)^T \tilde{g}_j + \tilde{g}_j^T (z - z_k) \leq 0 \}
\end{aligned}$$

と定義すると,

$$\mathcal{E}_k \cap \left(\bigcap_{i=1}^q \tilde{\mathcal{H}}_i \right) = \mathcal{E}_k \cap \left(\bigcap_{i=1}^q \tilde{\mathcal{S}}_i \right) \quad (13)$$

である.

最後に, $z \in \mathcal{E}_k \cap \left(\bigcap_{j=1}^q \tilde{\mathcal{S}}_j \right)$ ならば, 任意の正の数 $r > 0$ について,

$$\begin{aligned}
&(z - z_k)^T Q_k^{-1} (z - z_k) - 1 \\
&+ r \sum_{j=1}^q \left(2(z - z_k)^T \tilde{g}_j \tilde{g}_j^T (z - z_k) \right. \\
&\quad \left. + (z - z_k)^T \tilde{g}_j + \tilde{g}_j^T (z - z_k) \right) \leq 0
\end{aligned}$$

を満足する. いま, (9) 式より $\alpha > 0$ だから, $r = \alpha$ とおき, (3), (4) 式を用いると,

$$\begin{aligned}
&(z - z_k)^T Q_k^{-1} (z - z_k) - 1 \\
&+ \alpha \sum_{j=1}^q \left(2(z - z_k)^T \tilde{g}_j \tilde{g}_j^T (z - z_k) \right. \\
&\quad \left. + (z - z_k)^T \tilde{g}_j + \tilde{g}_j^T (z - z_k) \right) \\
&= (z - z_k)^T Q_k^{-1} (z - z_k) - 1 \\
&\quad + \alpha \left(2(z - z_k)^T \tilde{G} \tilde{G}^T (z - z_k) \right. \\
&\quad \left. + (z - z_k)^T \tilde{G} e + e^T \tilde{G}^T (z - z_k) \right) \\
&= (z - z_k)^T Q_k^{-1} (z - z_k) + \gamma^2 (1 + 2\alpha) e^T e - \eta \\
&\quad + 2\alpha (z - z_k)^T \tilde{G} \tilde{G}^T (z - z_k) \\
&\quad + \gamma (1 + 2\alpha) (z - z_k)^T \tilde{G} e + \gamma (1 + 2\alpha) e^T \tilde{G}^T (z - z_k) \\
&= (z - z_k + \gamma Q_k \tilde{G} e)^T \\
&\quad \cdot (Q_k^{-1} + 2\alpha \tilde{G} \tilde{G}^T) (z - z_k + \gamma Q_k \tilde{G} e) - \eta \\
&= (z - z_k + \gamma Q_k \tilde{G} e)^T \\
&\quad \cdot (Q_k - \sigma Q_k \tilde{G} \tilde{G}^T Q_k)^{-1} (z - z_k + \gamma Q_k \tilde{G} e) - \eta \\
&= \eta \left((z - z_{k+1})^T Q_{k+1}^{-1} (z - z_{k+1}) - 1 \right)
\end{aligned}$$

となる. ここで, (7) 式より $\eta > 0$ だから,

$$\mathcal{E}_k \cap \left(\bigcap_{j=1}^q \tilde{\mathcal{S}}_j \right) \subseteq \mathcal{E}_{k+1} \quad (14)$$

であり, 結局 (12)~(14) 式より (10) 式が成り立つ. $\square$

つぎに, 更新後の楕円体の体積と用いる劣勾配の数の関係を以下で与える.

【定理 2】 自然数 n , $q \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ について, (9) 式の α を用いて,

$$f(n, q) \doteq \sqrt{\frac{(1 + 2\alpha + q\alpha^2)^n}{(1 + 2\alpha)^{q+n}}} \quad (15)$$

と定義すると, 更新前後の楕円体の体積比は,

$$\frac{\text{Vol}(\mathcal{E}_{k+1})}{\text{Vol}(\mathcal{E}_k)} = f(n, q) < 1 \quad (16)$$

である. さらに, $q \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ のとき,

$$f(n, q) > f(n, q+1) \quad (17)$$

であり, $q \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ のとき,

$$f(n, q) < (f(n, 1))^q \quad (18)$$

が成り立つ.

(証明) はじめに (16) 式を示す. 楕円体の体積比は,

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Vol}(\mathcal{E}_{k+1})}{\text{Vol}(\mathcal{E}_k)} &= \sqrt{\frac{\det[\eta(Q_k - \sigma Q_k \tilde{G} \tilde{G}^T Q_k)]}{\det[Q_k]}} \\
&= \sqrt{\frac{\det[\eta I] \det[I - \sigma \tilde{G}^T Q_k \tilde{G}]}{\det[Q_k]}} \\
&= \sqrt{\frac{(1 + 2\alpha + q\alpha^2)^n}{(1 + 2\alpha)^{q+n}}} \\
&= f(n, q)
\end{aligned}$$

である. ここで, n を定数とみなし, $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ についての関数

$$\tilde{f}(q, \alpha) \doteq n \log(1 + 2\alpha + q\alpha^2) - (q + n) \log(1 + 2\alpha) \quad (19)$$

を定義する. これは, (15) 式の右辺の二乗にとったものであるから, $q \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ と α を (9) 式を満足するようにとると, $f(n, q)$ の大小関係は, $\tilde{f}(q, \alpha)$ の大小関係と一致する. そこで, 以下では $\tilde{f}(q, \alpha)$ を用いて, (16) 式の右辺と (17), (18) 式を示す.

まず, 関数 $\tilde{f}(q, \alpha)$ の α に関する偏導関数は,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \tilde{f}(q, \alpha) = 2q \frac{(n - q)\alpha^2 + (n - 2)\alpha - 1}{(1 + 2\alpha + q\alpha^2)(1 + 2\alpha)}$$

より, 停留点は,

$$\alpha = \frac{-(n - 2) + \sqrt{(n - 2)^2 + 4(n - q)}}{2(n - q)}$$

である. いま, $n - q > 0$ より, 関数 $\tilde{f}(q, \alpha)$ はこの点で最小値をとる. この値は (9) 式に一致しており, さらに $\tilde{f}(q, 0) = 0$ であるため, (16) 式が成り立つ.

つぎに, (17)式を示す. はじめに,

$$\alpha_q \doteq \frac{-(n-2) + \sqrt{(n-2)^2 + 4(n-q)}}{2(n-q)}$$

とおき, $\tilde{q} \in (0, n-q)$ について,

$$\tilde{f}(q, \alpha_q) \geq \tilde{f}(q + \tilde{q}, \alpha_q) \quad (20)$$

となることを示す. いま, $\tilde{f}(q, \alpha)$ の $\alpha_q > 0$ における q についての導関数を求め, 補題 1(付録参照) と α_q が

$$(n-q)\alpha_q^2 + (n-2)\alpha_q - 1 = 0$$

を満たすことを用いると, $\tilde{q} \in [0, n-q)$ について,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tilde{q}} \tilde{f}(q + \tilde{q}, \alpha_q) &= \left(\frac{n\alpha_q^2}{1 + 2\alpha_q + (q + \tilde{q})\alpha_q^2} - \log(1 + 2\alpha_q) \right) \\ &\leq \left(\frac{n\alpha_q^2}{1 + 2\alpha_q + (q + \tilde{q})\alpha_q^2} - \frac{2\alpha_q}{1 + 2\alpha_q} \right) \\ &= \frac{-\tilde{q}\alpha_q^3 - n\alpha_q^2}{(1 + 2\alpha_q + (q + \tilde{q})\alpha_q^2)(1 + 2\alpha_q)} < 0 \end{aligned}$$

であり, (20)式が成り立つ. さらに, (16)式の証明で示したように, q を固定すると α_q において $\tilde{f}(q, \alpha)$ は最小値をとり, $\alpha_{q+1} \neq \alpha_q$ より,

$$\tilde{f}(q+1, \alpha_q) > \tilde{f}(q+1, \alpha_{q+1})$$

である. これを, (20)式とあわせれば,

$$\tilde{f}(q, \alpha_q) \geq \tilde{f}(q+1, \alpha_q) > \tilde{f}(q+1, \alpha_{q+1})$$

となることから, (17)式が成り立つことがわかる.

最後に (18)式を示す. はじめに上と同様に,

$$\tilde{f}(q, \alpha_1) - q\tilde{f}(1, \alpha_1) < 0, \quad q \in (1, n) \quad (21)$$

を示す. まず, $\alpha_1 = 1/(n-1)$ を (21)式に代入し, 左辺を q について微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} \left(\tilde{f}\left(q, \frac{1}{n-1}\right) - q\tilde{f}\left(1, \frac{1}{n-1}\right) \right) \\ = \frac{n}{n^2 + q - 1} + n \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

である. また, $n^2 + q - 1 > n^2$ と, 補題 1(付録参照) より,

$$\frac{d}{dq} (\tilde{f}(q, \alpha_1) - q\tilde{f}(1, \alpha_1)) < \frac{n}{n^2} + n\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

である. これと, $q=1$ のとき $\tilde{f}(1, \alpha_1) - 1\tilde{f}(1, \alpha_1) = 0$ より, (21)式が成り立つ. また, (16)式の証明で示したように, q を固定すると α_q において $\tilde{f}(q, \alpha)$ は最小値をとり, $\alpha_1 \neq \alpha_q$, $q \neq 1$ より

$$\tilde{f}(q, \alpha_q) < \tilde{f}(q, \alpha_1)$$

である. これと (21)式をあわせれば

$$\tilde{f}(q, \alpha_q) < \tilde{f}(q, \alpha_1) < q\tilde{f}(1, \alpha_1)$$

となることから, (18)式が成り立つことがわかる. $\square$

この定理における (16)式は, 更新前後で楕円体の体積が常に減少していることを示している. また, (17)式は, 用いる劣勾配の数を増やせば増やすほど, 更新前後の楕円体の体積比がより小さくなることを示している. さらに, (18)式は, q 個の劣勾配を用いて更新した楕円体の体積が, 1 個の劣勾配による更新を q 回行った楕円体の体積よりも小さくなることを示している. このことが, ステップ 5 において, ℓ を $\ell+q$ と更新してもよいことを保証している.

以上より, 提案アルゴリズムでは, 従来の確率的楕円体法 [2] のもつ以下の性質がそのまま成り立つ.

【定理 3】

- (1) 不確かさのサンプル数は, $\bar{\kappa}\bar{\ell}$ 以下である.
- (2) 解の更新回数は $\bar{\ell}$ 以下である.
- (3) ステップ 3 で出力された z_k が

$$\mathcal{P}\{\theta \in \Theta \mid v_i(z, \theta) \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}\} \leq 1 - \varepsilon$$

を満足する確率は δ 以下である.

- (4) ステップ 2 で解なしと出力された場合,

$$\text{Vol}(\mathcal{F} \cap \mathcal{E}_0) < \mu$$

が成り立つ.

(証明) (1), (2) については, アルゴリズムより明らかである. (3) については, 参考文献 [2] の 定理 9(c) の証明と基本的に同じであるため省略する. 最後に (4) については, (18)式より, q 個の劣勾配を用いて楕円体を更新したとき,

$$\text{Vol}(\mathcal{E}_{k+1}) < \exp\left(-\frac{q}{2(n+1)}\right) \text{Vol}(\mathcal{E}_k)$$

を満足する. よって, アルゴリズム 1 中の ℓ が $\bar{\ell}$ に達すると, 定理 1 と, 上の式と, (2)式の $\bar{\ell}$ の定義より,

$$\text{Vol}(\mathcal{F} \cap \mathcal{E}_0) < \exp\left(-\frac{\bar{\ell}}{2(n+1)}\right) \text{Vol}(\mathcal{E}_0) \leq \mu$$

が成り立つ. $\square$

(注意 2) アルゴリズム 1 のステップ 5 における $\tilde{G}$ を構成するために用いた $(G^T Q_k G)^{1/2}$ は, $G^T Q_k G$ の Cholesky 分解から求めた三角行列に置き換えてもよい. なぜなら, この三角行列は非対角要素が非正となることより (参考文献 [7], 補題 5.7), 定理 1 が同様に成立するためである.

3. 数値例

提案法を LPV 制御系の設計問題に適用し, 従来法との比較を行った.

対象とする問題は, LPV システム

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B_1(\theta(t))d(t) + B_2(\theta(t))u(t) \\ e(t) &= C_1(\theta(t))x(t) + D_{12}(\theta(t))u(t) \\ y(t) &= C_2(\theta(t))x(t) + D_{21}(\theta(t))d(t)\end{aligned}$$

を二次安定化しつつ、外乱 $d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$ から制御出力 $e(t) \in \mathbb{R}^{n_e}$ までの $\mathcal{L}_2$ ゲインを γ 未満とするゲインスケジューリングコントローラ

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c(\theta(t))x_c(t) + B_c(\theta(t))y(t) \\ u(t) &= C_c(\theta(t))x_c(t)\end{aligned}$$

を設計する問題である。ただし、 $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ は状態変数、 $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ は制御入力、 $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ は観測出力、 $\theta(t) \in \Theta$ はスケジューリングパラメータである。ただし、与えた $B_1(\theta)$, $C_1(\theta)$, $D_{12}(\theta)$, $D_{21}(\theta)$ は

$$\begin{aligned}D_{12}^T(\theta) \begin{bmatrix} C_1(\theta) & D_{12}(\theta) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_1(\theta) \\ D_{21}(\theta) \end{bmatrix} D_{21}^T(\theta) &= \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}\end{aligned}$$

を満足すると仮定する。この設計問題は、

$$V_1(X, \theta) \leq 0, \quad V_2(Y, \theta) \leq 0, \quad V_3(X, Y) \leq 0 \quad \forall \theta \in \Theta$$

を満足する対称行列 X , Y を求める問題として書き表すことができる。ここで、

$$\begin{aligned}V_1(X, \theta) &\doteq A(\theta)X + XA^T(\theta) + XC_1^T(\theta)C_1(\theta)X \\ &\quad + \gamma^{-2}B_1(\theta)B_1^T(\theta) - B_2(\theta)B_2^T(\theta) + \varepsilon I \\ V_2(Y, \theta) &\doteq A^T(\theta)Y + YA(\theta) + YB_1(\theta)B_1^T(\theta)Y \\ &\quad + \gamma^{-2}C_1^T(\theta)C_1(\theta) - C_2^T(\theta)C_2(\theta) + \varepsilon I \\ V_3(X, Y) &\doteq - \begin{bmatrix} X & \gamma^{-1}I \\ \gamma^{-1}I & Y \end{bmatrix}\end{aligned}$$

であり、 $\varepsilon > 0$ は適当な定数である。

これを、

$$v(z, \theta) \doteq \left\| \begin{bmatrix} [V_1(X, \theta)]^+ & 0 & 0 \\ 0 & [V_2(Y, \theta)]^+ & 0 \\ 0 & 0 & [V_3(X, Y)]^+ \end{bmatrix} \right\| \quad (22)$$

とおくと、 $m=1$ とした (1) 式のロバスト可解問題に帰着できる [8]。ただし、 z は X と Y の独立な要素からなるベクトル、 $\|\cdot\|$ はフロベニウスノルム、 $[\cdot]^+$ は半正定対称行列上への射影を表す。一方、

$$\begin{aligned}v_1(z, \theta) &\doteq \|[V_1(X, \theta)]^+\|, \quad v_2(z, \theta) \doteq \|[V_2(Y, \theta)]^+\|, \\ v_3(z) &\doteq \|[V_3(X, Y)]^+\|\end{aligned} \quad (23)$$

とおくと、 $m=3$ とした (1) 式のロバスト可解問題に帰着できる。実際、すべての $\theta \in \Theta$ について $v_1(z, \theta) \leq 0$, $v_2(z, \theta) \leq 0$, $v_3(z) \leq 0$ を満たす z は、すべての $\theta \in \Theta$ について $v(z, \theta) \leq 0$ を満たし、逆もまた成り立つ。そこで、(22) 式によるロバスト可解問題と (23) 式によるロバスト可解問題を、それぞれアルゴリズム 1 を用いて解き比

較する。前者が従来法 [2] に対応する。

いま、対象システムを

$$\begin{aligned}A(\theta) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_5 & \theta_9 & \theta_{13} \\ \theta_2 & \theta_6 & \theta_{10} & \theta_{14} \\ \theta_3 & \theta_7 & \theta_{11} & \theta_{15} \\ \theta_4 & \theta_8 & \theta_{12} & \theta_{16} \end{bmatrix} = A_0 + \Delta \\ B_1 &= \begin{bmatrix} B_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ C_1 &= \begin{bmatrix} C_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ D_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}^T, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \\ \Theta &= \{ \Delta^T \Delta \leq 10^{-2} I \} \\ n_x &= 4, \quad n_d = n_e = 4, \quad n_u = n_y = 2\end{aligned}$$

とすると、 z の次元 n は 20 となる。このとき、 $q=1, 2, 3$ 個の劣勾配を用いたときの更新前後の楕円体の体積比 $f(n, q)$ は、定理 2 より、 $f(20, 1)=0.975$, $f(20, 2)=0.951$, $f(20, 3)=0.927$ である。従来法では $f(20, 1)$ なので、提案法のステップ 5 において $q=2, 3$ で更新を行うことがあれば、より早く楕円体の体積が減少するため、アルゴリズムが停止するまでに必要なランダムサンプル数が少なくなることが予想できる。

この問題の γ の値をいくつか選び、アルゴリズム 1 を 100 回実行した。なお、Pentium4 3.0GHz、メモリ 2 GB を備えた計算機を使用した。また、 Θ 上には一様分布 [9] を設定し、 δ, ε は、それぞれ 0.01, $\mu=1$ 、初期値は $z_0=0$, $Q_0=100I$ と与えた。実行結果を Table 1 に示す。ここで、 k_{ave}^m は、(23) 式による問題を解いたときの平均サンプル数、 r_{feas}^m はステップ 3 で解を出力して停止した割合、 t_{ave}^m は平均実行時間 [s] を表す。また、 k_{ave}^s , r_{feas}^s , t_{ave}^s は、(22) 式に対応する問題を解いたときの平均サンプル数と解を出力して停止した割合、平均実行時間 [s] を表す。この表より、制約条件が厳しいときには特に、アルゴリズムが停止するまでに生成される不確かさのサンプル数が少なくなり、計算時間も短くなることが確認できる。

Table 1 The average numbers of random samples θ with each γ

γ	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5
k_{ave}^m	1,100.4	1,140.9	1,228.8	1,975.2	1,465.1
r_{feas}^m	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00
t_{ave}^m	6.91	7.16	7.61	9.64	7.06
k_{ave}^s	1,782.0	1,782.0	1,825.2	2,753.6	1,714.9
r_{feas}^s	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00
t_{ave}^s	10.19	10.14	10.36	13.17	8.06

4. おわりに

本論文では、複数の勾配を直接用いる新たな確率的楕円体法を提案し、このアルゴリズムの性能の解析を行った。とくに、用いる劣勾配の数を増やせば増やすほど、更新後の楕円体の体積はより小さくなり、さらに、 q 個の劣勾配を用いて更新した楕円体の体積は、1 個の劣勾配による更新を q 回行った楕円体の体積より小さくなることを示した。また、この性質を用いて、より早く停止するようアルゴリズムの修正を行った。最後に数値例にて、その有効性の確認を行った。

なお、本研究の一部は、科学研究費補助金(基盤研究(C)課題番号 17560395)より援助を受けた。

参考文献

- [1] S. Kanev, B. D. Schutter and M. Verhaegen: An ellipsoid algorithm for probabilistic robust controller design; *Systems & Control Letters*, Vol. 49, No. 5, pp. 365–375 (2003)
- [2] Y. Oishi: Polynomial-time algorithms for probabilistic solutions of parameter-dependent linear matrix inequalities; *Automatica*, Vol. 43, No. 3, pp. 538–545 (2007)
- [3] 和田, 藤崎: ロバスト可解問題に対する効率的なランダムイズドアルゴリズム; システム制御情報学会論文誌, Vol. 19, No. 2, pp. 81–83 (2006)
- [4] R. G. Bland, D. Goldfarb and M. J. Todd: The ellipsoid method: A survey; *Operations Research*, Vol. 29, No. 6, pp. 1039–1091 (1981)
- [5] G. Alefeld and N. Schneider: On square roots of M-matrices; *Linear Algebra and Its Applications*, Vol. 42, pp. 119–132 (1982)
- [6] 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論; 計測自動制御学会 (1981)
- [7] A. Graham: *Nonnegative Matrices and Applicable Topics in Linear Algebra*, Halsted Press (1987)
- [8] Y. Fujisaki, F. Dabbene and R. Tempo: Probabilistic design of LPV control systems; *Automatica*, Vol. 39, No. 8, pp. 1323–1337 (2003)
- [9] G. Calafiore, F. Dabbene and R. Tempo: Randomized algorithms for probabilistic robustness with real and complex structured uncertainty; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 12, pp. 2218–2235 (2000)

付 録

【補題 1】 任意の $x \in (0, 1)$ について,

$$\log \frac{1}{1-x} - x \geq 0 \quad (\text{A1})$$

であり, 任意の $x \in (-1, \infty)$ について,

$$\log(1+x) - x \leq 0 \quad (\text{A2})$$

が成り立つ。

(証明) 指数関数 $\exp(-x)$ の x に関する凸性より, $x=0$ における接線 $1-x$ と $\exp(-x)$ について,

$$\exp(-x) \geq 1-x$$

が成り立つ。さらに, $x \in (0, 1)$ より, 逆数を取り, 対数をとると, (A1) 式が示される。(A2) 式も同様に, $\exp(x)$ の $x=0$ における接線 $1+x$ と $\exp(x)$ について,

$$\exp(x) \geq 1+x$$

であることから, 対数をとることで確認できる。□