極配置–安定半径改善問題の一解法*

川端 啓史[†]・森 武宏[†]

A Solution Method for Pole Placement and Stability Radius Enlargement Problem*

Keishi KAWABATA[†] and Takehiro MORI[†]

This paper presents a robust controller design method for linear time-invariant SISO systems based on an optimization approach. The task is to enlarge real stability radius to counter plant parameter perturbations by using extra degree of freedom of the controller parameters in the pole placement scheme. The formula for the real stability radius is known as an infimum of a certain function and that makes its gradients discontinuous. It is shown that by some manipulations, the considered problem can be converted to a nonlinear optimization problem, to which a gradient-based optimization method becomes applicable. The case of complex stability radius is also considered, which is less sharp as a robust stability index than the real counterpart, but has a much simpler form. Numerical examples for both cases are presented to show that they actually work, and some comparisons are discussed, leading to a suggestion on the effective uses of these two stability radius computation methods.

1. はじめに

線形定係数システムの代表的な設計手法に、閉ループシステムが指定された極をもつようにコントローラパラメータを決定する極配置問題がある。この方法はシステムの安定性に加えて収束速度などを満足するように設計がおこなえる。これにより、ノミナルシステムの仕様は満足させることができるが、システムパラメータに変動が生じるなどすると挙動が大きく変わってしまう。たとえば、安定境界から遠く離れた位置に極を配置しても、小さなパラメータ変動で安定性が失われる場合があることが知られている [10]。したがって、パラメータ変動が起きても安定性が保たれるようロバストにするには、それを陽に考慮してコントローラを設計する必要がある [1]。極配置設計問題においてコントローラの次数が大きければパラメータ設計に自由度が含まれるので、この自由度を利用して変動に対してロバストになるように設計することが考えられる。このような背景から、極配置とともに

に、パラメータ変動のロバスト安定度を表す安定半径 [4] が大きくなるようにコントローラを設計する、極配置–安定半径改善問題の解法が検討されている [5]。

この問題はいわゆるロバスト極配置問題の一種であるが、これまでにこの問題を最適化問題で定式化する方法が提案されており、いくつかの対象モデルやロバスト指標のもとで問題の定式化がおこなわれている [8,9]。本論文では 1 入出力線形フィードバックシステムを対象に、コントローラパラメータを変数にして、指定の極を配置するという制約条件のもとで安定半径を最大化するという最適化問題を考える。この問題は微分不可能最適化問題となるため [5]、一般的な非線形最適化法である勾配を利用した解法を適用して解くことができない。本論文の目的はこの問題の変形により勾配法が使える形式で定式化をおこなうことである。

安定半径は通常、実数パラメータの変動に対する安定余裕を表す実安定半径が用いられるが、複素数の場合も許す複素安定半径についても考えられている。後者は不必要な変動を考慮するため、ロバスト指標として保守的であり妥当性は劣るが、その対価として計算の容易さという長所を持つ。そこで、実安定半径と複素安定半径それぞれで安定半径改善問題の定式化をおこなう。最後に数値実験で提案法の有効性を調べるとともに、両者の有

* 原稿受付 2007 年 9 月 18 日

[†] 京都工芸繊維大学 大学院 情報工学専攻 Div. of Information Science, Kyoto Institute of Technology; Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN

Key Words: stability radius, pole placement, linear SISO system, robust stability, controller design.

用性を比較し、検討をおこなう。そしてこの結果に基づいて両安定半径の計算法をそれぞれの特徴を生かしてどのように用いれば効果的かについて示唆する。

2. 対象システムと安定半径公式

Fig. 1 の 1 入出力のプラントとコントローラからなる連続時間定係数線形フィードバックシステムを対象とする。

Fig. 1 Linear SISO system

ここにプラントとコントローラの伝達関数はそれぞれ

$$P(s, q) = \frac{q_{m'+2} + q_{m'+3}s + \dots + q_m s^{m-m'-2}}{q_1 + q_2 s + \dots + q_{m'+1} s^{m'}}, \quad (1)$$

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T \in \mathbb{R}^m \quad (2)$$

$$C(s, r) = \frac{r_{l'+2} + r_{l'+3}s + \dots + r_l s^{l-l'-2}}{r_1 + r_2 s + \dots + r_{l'+1} s^{l'}}, \quad (3)$$

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_l]^T \in \mathbb{R}^l \quad (4)$$

で与えられるとする。プラントの伝達関数 (1) 式は厳密にプロパーな有理関数、コントローラの伝達関数 (3) 式はプロパーな有理関数とすると、システムの特性多項式は次数 $n = m' + l'$ の多項式で表される。特性多項式の係数とプラントパラメータ $\mathbf{q}$ の関係はアフィン線形となるため、係数ベクトル $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ は

$$\mathbf{a}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = T(\mathbf{r})\mathbf{q} + \mathbf{t}(\mathbf{r}) \quad (5)$$

$$T(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times m}, \quad \mathbf{t}(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (6)$$

と表すことができる。また、コントローラパラメータ $\mathbf{r}$ ともアフィン線形の関係があるので、(5) 式の行列とベクトルは以下のように表される。

$$T(\mathbf{r}) = M_0 + \sum_{i=1}^l r_i M_i, \quad M_i \in \mathbb{R}^{(n+1) \times m} \quad (7)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^l r_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (8)$$

このフィードバックシステム (1), (3) 式において、プラントパラメータ $\mathbf{q}$ の変動 $\Delta \mathbf{q}$ に対するロバスト安定度を表す指標として安定半径がある。すなわち、安定半径 ρ は以下のように定義される。

$$\rho = \max\{r : P(s, \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}), \|\Delta \mathbf{q}\| < r \text{ に対して Fig.1 のシステムが安定} \} \quad (9)$$

実安定半径は実数変動 $\Delta \mathbf{q} \in \mathbb{R}^l$ に対する (9) 式の値をいう。本論文では、変動のノルム $\|\Delta \mathbf{q}\|$ としてユークリッドノルムを考えるが、このときの Hurwitz 実安定半径 ρ_r の計算式は、

$$\boldsymbol{\theta}_0 = [1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\theta}_\infty = [0, \dots, 0, 1]^T \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (11)$$

$$\Psi_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -y^2 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & y^2 & 0 & -y^4 & \dots \\ 0 & -y^2 & 0 & y^4 & 0 & \dots \\ y^2 & 0 & -y^4 & 0 & y^6 & \dots \\ 0 & y^4 & 0 & -y^6 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}, \quad y > 0 \quad (12)$$

を定義すると、以下のように示されている [4]。

$$\rho_r = \min \left\{ \frac{|\boldsymbol{\theta}_0^T \{T(\mathbf{r})\mathbf{q} + \mathbf{t}(\mathbf{r})\}|}{\|T(\mathbf{r})^T \boldsymbol{\theta}_0\|_2}, \frac{|\boldsymbol{\theta}_\infty^T \{T(\mathbf{r})\mathbf{q} + \mathbf{t}(\mathbf{r})\}|}{\|T(\mathbf{r})^T \boldsymbol{\theta}_\infty\|_2}, \inf_{y>0} \frac{\sqrt{2} \|T(\mathbf{r})^T \Psi_y \{T(\mathbf{r})\mathbf{q} + \mathbf{t}(\mathbf{r})\}\|_2}{\|T(\mathbf{r})^T \Psi_y T(\mathbf{r})\|_F} \right\} \quad (13)$$

ただし、 $\|\cdot\|_2$ はユークリッドノルム、 $\|\cdot\|_F$ はフロベニウスノルムを表す。一方、複素安定半径は複素変動 $\Delta \mathbf{q} \in \mathbb{C}^l$ を許した場合の (9) 式の値をいう。物理パラメータなどは実数変動しか起こり得ないため、複素安定半径は不要な変動を考慮することになり、その値は実安定半径よりも一般に小さくなる。この意味でロバスト安定指標としての妥当性は劣るが、その半面計算式が簡単になるため、扱いが容易になるという利点がある。複素 Hurwitz 安定半径 ρ_c の計算式は、

$$\boldsymbol{\theta}_y = [1, jy, -y^2, -jy^3, \dots]^T \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad y \in \mathbb{R} \quad (14)$$

を用いて、以下のようになる [4]。

$$\rho_c = \inf_{y \in \mathbb{R}} \frac{|\boldsymbol{\theta}_y^* \{T(\mathbf{r})\mathbf{q} + \mathbf{t}(\mathbf{r})\}|}{\|T(\mathbf{r})^T \boldsymbol{\theta}_y\|_2} \quad (15)$$

ここで $*$ は共役転置を表す。

3. 極配置-安定半径改善問題

3.1 実安定半径の場合

前章の設定のもとで、本論文で考える極配置-安定半径改善問題を定義する。

【問題 1】 フィードバックシステム (1), (3) 式が以下の仕様を満たすコントローラ $\mathbf{r}$ を求めよ。

- 指定された n 個の極 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を持つ。ただし、極が複素数の場合はその共役複素極も含まれるとする。
- 実安定半径 ρ_r をできる限り大きくする。

まず、極配置条件について考える。特性多項式の係数ベクトルはコントローラパラメータ $\mathbf{r}$ とアフィン線形の関係があるため、プラントパラメータの値で決まる行列 $S \in \mathbb{R}^{(n+1) \times l}$ とベクトル $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n+1}$ を用いて $S\mathbf{r} + \mathbf{s}$ となる。よって、指定された n 個の極 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ をもつという制約は、それらを零点にもつ多項式の係数ベクトル

$\hat{\mathbf{a}}$ の定数倍で表現できるので、非零の実パラメータ β を使って

$$S\mathbf{r} + \mathbf{s} = \beta \hat{\mathbf{a}} \quad (16)$$

で表される。問題 1 を考えるにあたっては (16) 式を満たす $\mathbf{r}$ が一意に決まらずに自由度が存在する必要がある。(16) 式は変数の個数が $(l+1)$ 、等式制約の個数が $(n+1)$ の $\mathbf{r}, \beta$ に関する線形連立方程式で表されているので、 $\mathbf{r}$ に関する自由度 τ は次のようになる。

$$\tau = (l+1) - \text{rank}[S, -\hat{\mathbf{a}}] \quad (17)$$

問題 1 は、(16) 式のもとで安定半径を最大化することとなるので、

$$\sup_{\mathbf{r}, \beta} \rho_r \quad (18)$$

$$\text{subject to } S\mathbf{r} + \mathbf{s} = \beta \hat{\mathbf{a}} \quad (19)$$

の最適化問題として定式化できる。最適化問題 (18), (19) 式は、(13) 式より目的関数 ρ_r の計算が下限値をとる操作が必要となるため、通常の勾配を利用した最適化法は適用できない。この隘路の解決が本論文の主題のひとつである。以下では問題を逐次変形して、これを含まない形式を導く。そこでまず、安定半径の計算式を書き換えることを考える。

いま、変数 $\gamma_r = \rho_r^2$ を使うと (13) 式は次のようになる。

$$\sup_{\gamma_r} \gamma_r \quad (20)$$

subject to

$$\frac{\boldsymbol{\theta}_0^T \{T(\mathbf{r})\mathbf{q} + \mathbf{t}(\mathbf{r})\} \{ \mathbf{q}^T T(\mathbf{r})^T + \mathbf{t}(\mathbf{r})^T \} \boldsymbol{\theta}_0}{\boldsymbol{\theta}_0^T T(\mathbf{r}) T(\mathbf{r})^T \boldsymbol{\theta}_0} \geq \gamma_r \quad (21)$$

$$\frac{\boldsymbol{\theta}_\infty^T \{T(\mathbf{r})\mathbf{q} + \mathbf{t}(\mathbf{r})\} \{ \mathbf{q}^T T(\mathbf{r})^T + \mathbf{t}(\mathbf{r})^T \} \boldsymbol{\theta}_\infty}{\boldsymbol{\theta}_\infty^T T(\mathbf{r}) T(\mathbf{r})^T \boldsymbol{\theta}_\infty} \geq \gamma_r \quad (22)$$

$$\frac{2\{ \mathbf{q}^T T(\mathbf{r})^T + \mathbf{t}(\mathbf{r})^T \} \Psi_y^T T(\mathbf{r}) \cdot T(\mathbf{r})^T \Psi_y \{ T(\mathbf{r})\mathbf{q} + \mathbf{t}(\mathbf{r}) \}}{\text{tr} \{ T(\mathbf{r})^T \Psi_y^T T(\mathbf{r}) T(\mathbf{r})^T \Psi_y T(\mathbf{r}) \}} \geq \gamma_r \quad \forall y > 0 \quad (23)$$

この段階では (23) 式にパラメータ y が含まれたままになっている。(12) 式より Ψ_y の 0 以外の要素はすべて $y^{2i}, i=0, \dots, n-1$ の形であるので $x=y^2$ とおくと、(23) 式左辺の分子、分母はともに x に関する多項式とみなすことができる。それぞれの係数を $e_i(\mathbf{r}), f_i(\mathbf{r})$ で表すことにすると、(23) 式は左辺の分子、分母がともに正の値であることに注意して

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{i=0}^{2(n-1)} e_i(\mathbf{r}) x^i}{\sum_{i=0}^{2(n-1)} f_i(\mathbf{r}) x^i} \geq \gamma_r \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=0}^{2(n-1)} \{ e_i(\mathbf{r}) - \gamma_r f_i(\mathbf{r}) \} x^i \geq 0, \quad \forall x > 0 \end{aligned} \quad (24)$$

と変形できる。なお、(23) 式より $e_i(\mathbf{r}), f_i(\mathbf{r})$ はともに $\mathbf{r}$ に関してたかだか 4 次の関数であることがわかる。さらに、以下の補題 [6] を用いる。

【補題 1】 半有限区間における多項式の非負性

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n'} p_i t^i \geq 0, \quad t \geq 0 \quad (25)$$

が成り立つための必要十分条件は、 $n_1 = \lfloor \frac{n'}{2} \rfloor, n_2 = \lfloor \frac{n'-1}{2} \rfloor$ を定義したとき

$$p_i = \text{tr} H_{n_1}^{(i)} Y_1 + \text{tr} H_{n_2}^{(i-1)} Y_2, \quad i=0, \dots, n' \quad (26)$$

$$Y_1 \succeq 0, \quad Y_2 \succeq 0 \quad (27)$$

を満たす $Y_1 \in \mathbb{R}^{(n_1+1) \times (n_1+1)}, Y_2 \in \mathbb{R}^{(n_2+1) \times (n_2+1)}$ が存在することである。ここで、 $\lfloor x \rfloor$ は x 以下である最大の整数で、 $\succeq 0$ は行列の半正定値性を表す。また、 $H_n^{(i)} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ は $j+k=i+2$ を満たす j 行 k 列目の要素が 1 で、それ以外の要素は 0 のハンケル行列である。

(24) 式は 補題 1 の $n' = 2(n-1)$ の場合に相当するから、これを適用すると、以下の代数条件

$$e_i(\mathbf{r}) - \gamma_r f_i(\mathbf{r}) = \text{tr} H_{n-1}^{(i)} Y_{r1} + \text{tr} H_{n-2}^{(i-1)} Y_{r2}, \quad i=0, \dots, 2(n-1) \quad (28)$$

$$Y_{r1} \succeq 0, \quad Y_{r1} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (29)$$

$$Y_{r2} \succeq 0, \quad Y_{r2} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)} \quad (30)$$

で表される。結局、元の最適化問題 (18), (19) 式は、(18) 式の代わりに (20)~(22), (28)~(30) 式を用いて、以下のように定式化できる。

$$\sup_{\mathbf{r}, \beta, \gamma_r, Y_{r1}, Y_{r2}} \gamma_r \quad (31)$$

subject to

$$\boldsymbol{\theta}_0^T \{T(\mathbf{r})\mathbf{q} + \mathbf{t}(\mathbf{r})\} \{ \mathbf{q}^T T(\mathbf{r})^T + \mathbf{t}(\mathbf{r})^T \} \boldsymbol{\theta}_0 - \gamma_r \boldsymbol{\theta}_0^T T(\mathbf{r}) T(\mathbf{r})^T \boldsymbol{\theta}_0 \geq 0 \quad (32)$$

$$\boldsymbol{\theta}_\infty^T \{T(\mathbf{r})\mathbf{q} + \mathbf{t}(\mathbf{r})\} \{ \mathbf{q}^T T(\mathbf{r})^T + \mathbf{t}(\mathbf{r})^T \} \boldsymbol{\theta}_\infty - \gamma_r \boldsymbol{\theta}_\infty^T T(\mathbf{r}) T(\mathbf{r})^T \boldsymbol{\theta}_\infty \geq 0 \quad (33)$$

$$e_i(\mathbf{r}) - \gamma_r f_i(\mathbf{r}) = \text{tr} H_{n-1}^{(i)} Y_{r1} + \text{tr} H_{n-2}^{(i-1)} Y_{r2}, \quad i=0, \dots, 2(n-1) \quad (34)$$

$$Y_{r1} \succeq 0, \quad Y_{r1} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (35)$$

$$Y_{r2} \succeq 0, \quad Y_{r2} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)} \quad (36)$$

$$S\mathbf{r} + \mathbf{s} = \beta \hat{\mathbf{a}} \quad (37)$$

このようにして得られた最適化問題は、下限値を見つける操作などが含まれない形式となっていることに注意しよう。

問題 (31)~(37) 式の解法については、(35), (36) 式の半正定値制約を

$$Y_{r1}, Y_{r2} \text{ のすべての主小行列式 } \geq 0 \quad (38)$$

で置き換えると、非線形制約最適化問題とみることができ。非線形最適化問題を解くにあたって必要となる初期値の計算は、まず線形等式条件 (37) 式を満たす $\mathbf{r}, \beta$ を求める。 $\mathbf{r}$ の値を固定すると (34) 式は γ_r と Y_{r1}, Y_{r2} に関する線形等式制約であり、(32), (33) 式はそれぞれスラック変数 $u_0, u_\infty > 0$ を導入することにより線形等式制約にすることができる。そこで、これらの変数をブロック対角状に配置した変数行列

$$X_r = \text{diag}[\gamma_r, u_0, u_\infty, Y_{r1}, Y_{r2}] \in \mathbb{R}^{2(n+1) \times 2(n+1)} \quad (39)$$

と、対応する係数行列

$$C_r = \text{diag}[-1, 0, 0, O, O] \quad (40)$$

$$R_0 = \text{diag}[\theta_0^T T(\mathbf{r}) T(\mathbf{r})^T \theta_0, 1, 0, O, O] \quad (41)$$

$$R_\infty = \text{diag}[\theta_\infty^T T(\mathbf{r}) T(\mathbf{r})^T \theta_\infty, 0, 1, O, O] \quad (42)$$

$$A_{r,i} = \text{diag}[f_i(\mathbf{r}), 0, 0, H_{n-1}^{(i)}, H_{n-2}^{(i-1)}], \quad (43)$$

$$i = 0, \dots, 2(n-1)$$

を定義する。ここに O は適当なサイズの零行列を表す。このとき、初期値を求める問題は

$$\inf_{X_r} \text{tr} C_r X_r \quad (44)$$

subject to

$$\text{tr} R_0 X_r = \theta_0^T \{T(\mathbf{r})\mathbf{q} + \mathbf{t}(\mathbf{r})\} \{ \mathbf{q}^T T(\mathbf{r})^T + \mathbf{t}(\mathbf{r})^T \} \theta_0 \quad (45)$$

$$\text{tr} R_\infty X_r = \theta_\infty^T \{T(\mathbf{r})\mathbf{q} + \mathbf{t}(\mathbf{r})\} \{ \mathbf{q}^T T(\mathbf{r})^T + \mathbf{t}(\mathbf{r})^T \} \theta_\infty \quad (46)$$

$$\text{tr} A_{r,i} X_r = e_i(\mathbf{r}), \quad i = 0, \dots, 2(n-1) \quad (47)$$

$$X_r \succeq 0 \quad (48)$$

という半正定値計画問題で表され、問題 (44)~(48) 式を解けば γ_r, Y_{r1}, Y_{r2} の初期値が求まる。また、このときの $\rho_r = \gamma_r^{1/2}$ が固定した $\mathbf{r}$ における実安定半径である。初期値を求めるこのプロセスは既存の最適化問題に帰着し、その計算に大きな困難はない。

しかしながら、実安定半径をロバスト指標とした場合の設計を最適化問題 (31)~(37) 式で定式化した当初の問題では、(34) 式が $\mathbf{r}$ に関して 4 次関数であるなど非線形性の強い制約条件となっており求解に困難が予想される。そこで実用性を考慮し、もう少し扱いが容易な複素安定半径を用いた場合についても考え、のちの実際の適用にあたってこれら二つの安定半径の計算法をそれぞれどのように用いればよいか検討する。

3.2 複素安定半径の場合

安定半径改善問題 (18), (19) 式の ρ_r のかわりに (15) 式の複素安定半径 ρ_c を用いる場合を考える。実安定半径の場合と同様に、 $\gamma_c = \rho_c^2$ を使うと同式は次のようになる。

$$\sup_{\gamma_c} \quad (49)$$

subject to

$$\frac{\theta_y^T \{T(\mathbf{r})\mathbf{q} + \mathbf{t}(\mathbf{r})\} \{ \mathbf{q}^T T(\mathbf{r})^T + \mathbf{t}(\mathbf{r})^T \} \theta_y}{\theta_y^T T(\mathbf{r}) T(\mathbf{r})^T \theta_y} \geq \gamma_c \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (50)$$

表現を簡潔にするため、以下の行列

$$J = \text{diag} [1, j, -1, -j, \dots] \in \mathbb{C}^{(n+1) \times (n+1)} \quad (51)$$

$$E(\mathbf{r}) = J^* \{T(\mathbf{r})\mathbf{q} + \mathbf{t}(\mathbf{r})\} \{ \mathbf{q}^T T(\mathbf{r})^T + \mathbf{t}(\mathbf{r})^T \} J \quad (52)$$

$$F(\mathbf{r}) = J^* T(\mathbf{r}) T(\mathbf{r})^T J \quad (53)$$

を定義し、 $x = y^2$ とおくと、(50) 式は

$$\sum_{i=0}^n \text{tr} H_n^{(2i)} (E(\mathbf{r}) - \gamma_c F(\mathbf{r})) \cdot x^i \geq 0, \quad \forall x \geq 0 \quad (54)$$

と整理できる。よって、これに補題 1 を適用すると、複素安定半径を用いた場合の改善問題は

$$\sup_{\mathbf{r}, \beta, \gamma_c, Y_{c1}, Y_{c2}} \gamma_c \quad (55)$$

subject to

$$\text{tr} H_n^{(2i)} E(\mathbf{r}) - \gamma_c \cdot \text{tr} H_n^{(2i)} F(\mathbf{r}) = \text{tr} H_{n_1}^{(i)} Y_{c1} + \text{tr} H_{n_2}^{(i-1)} Y_{c2}, \quad i = 0, \dots, n \quad (56)$$

$$Y_{c1} \succeq 0, \quad Y_{c1} \in \mathbb{R}^{(n_1+1) \times (n_1+1)}, \quad n_1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad (57)$$

$$Y_{c2} \succeq 0, \quad Y_{c2} \in \mathbb{R}^{(n_2+1) \times (n_2+1)}, \quad n_2 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \quad (58)$$

$$S\mathbf{r} + \mathbf{s} = \beta \hat{\mathbf{a}} \quad (59)$$

で定式化ができる。初期値の計算も同様に、等式制約 (59) 式を満たす $\mathbf{r}, \beta$ を定めた後に、ブロック対角状に配置した変数行列

$$X_c = \text{diag}[\gamma_c, Y_{c1}, Y_{c2}] \in \mathbb{R}^{(n+2) \times (n+2)} \quad (60)$$

と、それに対応する係数行列

$$C_c = \text{diag}[-1, O, O] \quad (61)$$

$$A_{c,i} = \text{diag}[\text{tr} H_n^{(2i)} F(\mathbf{r}), H_{n_1}^{(i)}, H_{n_2}^{(i-1)}], \quad i = 0, \dots, n \quad (62)$$

を定義する。このとき、

$$\inf_{X_c} \text{tr} C_c X_c \quad (63)$$

subject to

$$\text{tr} A_{c,i} X_c = \text{tr} H_n^{(2i)} E(\mathbf{r}), \quad i = 0, \dots, n \quad (64)$$

$$X_c \succeq 0 \quad (65)$$

という半正定値計画問題を解けば γ_c, Y_{c1}, Y_{c2} の初期値が求まる。

複素安定半径を用いた場合の最適化問題 (55)~(59) 式を見ると、実安定半径の場合と同じく非線形制約最適化問題であるが、制約式の (56) 式が $\mathbf{r}$ に関して 2 次の関数であることや変数行列 (57), (58) 式のサイズが半分程度

に縮小されることより，簡単な形で定式化されていることがわかる．このように，得られた実安定半径，複素安定半径の定式化による計算には，複雑さと鋭さのトレードオフがあると考えられる．次章では，数値例によりこの点について検討する．

4. 数値例と考察

4.1 数値例

ここでは，定式化した最適化問題を実際に数値例により検証する．

【例題 1】 Fig.1 のシステムで以下の場合を対象とする．

$$P(s, \mathbf{q}) = \frac{q_3 + s}{q_1 + q_2 s + s^2}, \quad \mathbf{q} = [-2, 1, 3]^T \quad (66)$$

$$C(s, \mathbf{r}) = \frac{r_5 + r_6 s + r_7 s^2 + s^3}{r_1 + r_2 s + r_3 s^2 + r_4 s^3} \quad (67)$$

フィードバックシステムの極をすべて -1 と設定すると，コントローラパラメータの組合せのひとつに

$$\mathbf{r}_0 = [7, 5, 3, 1, 5, 1, 1]^T \quad (68)$$

がある．初期パラメータとして $\mathbf{r}_0$ と $\beta = 1$ を用いて (44)~(48) 式を SDPT3[7] を用いて解くと

$$\gamma_r = 0.0135 \quad (69)$$

$$Y_{r1} = \begin{bmatrix} 2943 & -6477 & 2939 & -264 & -7.0 \\ -6477 & 18395 & -11378 & 1650 & -12.0 \\ 2939 & -11378 & 10927 & -2357 & 65.0 \\ -264 & 1650 & -2357 & 632 & -25.0 \\ -7.0 & -12.0 & 65.0 & -25.0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$Y_{r2} = \begin{bmatrix} 3383 & -6483 & 2413 & -179 \\ -6483 & 16883 & -7325 & 604 \\ 2413 & -7345 & 3736 & 381 \\ -179 & 604 & 381 & 50.0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

となり， $\rho_r = 0.0135^{1/2} = 0.116$ であった．これらを変数として，最適化問題 (31)~(37) 式を MATLAB Optimization Toolbox の非線形最適化関数 `fmincon` を利用して解く．ただし，(35) 式に関しては (38) 式にあるように， Y_{r1} の主小行列式 31 個をすべて書き出した形で表現する．(36) 式の Y_{r2} も同様である．

得られた安定半径は $\rho_r = 0.0158^{1/2} = 0.133$ となり，初期値からあまり改善されていない結果となったので，他の初期値で試みる．(17) 式の自由度は $\tau = 2$ であるので，コントローラパラメータは，正規直交ベクトル $\mathbf{b}_1$ ， $\mathbf{b}_2$ を使って

$$\mathbf{r}(k_1, k_2) = \mathbf{r}_0 + k_1 \mathbf{b}_1 + k_2 \mathbf{b}_2 \quad (72)$$

$$\mathbf{b}_1 = [-0.75, -0.25, 0, 0, -0.5, 0.25, 0.25]^T \quad (73)$$

$$\mathbf{b}_2 = [0.027, -0.627, 0.436, 0.109, 0.054, 0.573, 0.245]^T \quad (74)$$

と表すことができる．(72) 式の (k_1, k_2) の値を適当に与えたものを初期値として，同じように問題 (31)~(36) 式の解の計算をおこなった．その結果を Table 1 に示す．初期値の取り方によっては大きく改善されている例が見られる．この結果について考察しやすくするため，(72) 式の (k_1, k_2) をグリッドディングして (44)~(48) 式を解き，安定半径 γ_r を計算する．計算結果によるグラフは Fig.2 のようになる．Table 1 の iv では，終了時の γ_r が Fig.2 で最も値が大きくなっている箇所に対応しており，局所最適解が得られていると考えられる．

Table 1 Computation results for several initial points

	initial point		terminal point	
	(k_1, k_2)	γ_r	(k_1, k_2)	γ_r
i	(0,0)	0.0135	(1.089, -0.388)	0.0159
ii	(5,0)	0.0595	(6.472, 2.557)	0.192
iii	(10,0)	0.511	(8.698, 2.027)	0.843
iv	(10, -5)	0.430	(9.081, -3.517)	2.748

Fig. 2 Values of real stability radius

一方，同じシステムに対して複素安定半径を用いた場合は次のようになる．まず，実安定半径の場合と同じ初期パラメータ $\mathbf{r}_0$ を用いて問題 (63)~(65) 式を解くと

$$\gamma_c = 0.0135 \quad (75)$$

$$Y_{c1} = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.0004 & -0.0001 \\ -0.0004 & 25.7620 & -9.8244 \\ -0.0001 & -9.8244 & 9.1431 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$Y_{c2} = \begin{bmatrix} 4.6899 & -7.7525 & 0.3420 \\ -7.7525 & 28.9513 & -2.0783 \\ 0.3420 & -2.0783 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (77)$$

が得られた．すなわち，複素安定半径は $\rho_c = 0.0135^{1/2} = 0.116$ であった．これらを変数の初期値として，最適化問題 (55)~(59) 式を解くと複素安定半径は $\rho_c = 0.7874^{1/2} = 0.8873$ になった．これは， $(k_1, k_2) = (8.036, 1.239)$ に対応しており，実安定半径の場合よりも初期値からの動きが大きくなっている．また，このパラメータ値での実

安定半径は $\rho_r = 1.316^{1/2} = 1.147$ であり, 実安定半径を用いた場合よりもよい値が得られている. Table 1 と同じ初期値から始めたときの計算結果を Table 2 に示す. 表には比較のため, 終了時の $\mathbf{r}$ での実安定半径 γ_r も載せている. 複素安定半径を用いた方が改善度が大きくなる場合が多く見られるが, iv の場合は局所的最適解が得られておらず, 必ずしも複素安定半径を用いた方がよい結果となるわけではない.

Table 2 Computation results for the complex case

	initial point		terminal point	
	γ_c	(k_1, k_2)	γ_c	γ_r
i	0.0135	(8.036, 1.239)	0.787	1.316
ii	0.0595	(8.658, -0.344)	0.765	1.377
iii	0.430	(8.490, -0.368)	0.776	0.993
iv	0.349	(8.620, -0.810)	0.818	1.222

Fig. 3 Values of complex stability radius

実安定半径と複素安定半径それぞれの場合で, 各初期値からの解の計算に要した時間を Table 3 に示す. なお, 使用したマシンは Athlon 64 2.4GHz, メモリ 448MB で, MATLAB のバージョンは R2007a である. また, fmincon の最大反復回数 MaxIter は 100 とした.

Table 3 Comparison of computation time [s]

	real stability	complex stability
i	9.828	4.484
ii	16.875	2.719
iii	7.641	3.344
iv	10.172	1.766

【例題 2】 例題 1 よりもプラント, コントローラいずれも次数の大きな場合として, 以下のモデルを扱う [3].

$$P(s, \mathbf{q}) = \frac{q_1 + q_2 s}{0.40 + 4.118s + 2.184s^2 + 10s^3} \quad (78)$$

$$\mathbf{q} = [0.0068, 0.3408]^T$$

$$C(s, \mathbf{r}) = \frac{r_6 + r_7 s + r_8 s^2 + r_9 s^3 + s^4}{r_1 + r_2 s + r_3 s^2 + r_4 s^3 + r_5 s^4} \quad (79)$$

指定した極 $-0.2 \pm j\sqrt{0.46}, -0.5 \pm j\sqrt{0.75}, -0.2, -0.5, -1$ を満たすコントローラパラメータは

$$\mathbf{r}(k_1, k_2) = \mathbf{r}_0 + k_1 \mathbf{b}_1 + k_2 \mathbf{b}_2 \quad (80)$$

$$\mathbf{r}_0 = [0.119, 0.316, 0.438, 0.288, 0.10, 0.367, -0.064, 0.313, 0.0]^T \quad (81)$$

$$\mathbf{b}_1 = [-0.0006, 0.0308, 0, 0, 0, 0.0362, 0.3728, 0.1977, 0.9053]^T \quad (82)$$

$$\mathbf{b}_2 = [0.0962, 0.2628, 0.3277, 0.2338, 0.0811, 0.3045, -0.0143, -0.0429, -0.0058]^T \quad (83)$$

と表される. いくつかの初期値から (31)~(37) 式と (55)~(59) 式を計算した結果はそれぞれ Tables 4, 5 に示すようになった.

Table 4 Computation results for the real case

	initial point		terminal point	
	(k_1, k_2)	γ_r	(k_1, k_2)	γ_r
v	(0, 0)	0.0073	(-0.549, -1.065)	0.0321
vi	(-1, 1)	0.0140	(1.270, -1.382)	0.1594
vii	(-2, 0)	0.0289	(-2.001, -0.002)	0.0289
viii	(2, -2)	0.0335	(1.968, -1.971)	0.0342

Table 5 Computation results for the complex case

	initial point		terminal point	
	γ_c	(k_1, k_2)	γ_c	γ_r
v	0.0020	(0.220, -1.230)	0.0165	0.4392
vi	0.0038	(-1.928, -0.590)	0.0064	0.0432
vii	0.0083	(-3.640, -0.322)	0.0153	0.0687
viii	0.0152	(0.435, -1.319)	0.0341	0.0358

また, 両安定半径の値の (k_1, k_2) 平面における形状は Figs. 4, 5 のようになる. ただし, 両図の縦軸のスケール

Fig. 4 Values of real stability radius

Fig. 5 Values of complex stability radius

Table 6 Comparison of computation time [s]

	real stability	complex stability
v	28.469	5.266
vi	30.609	4.469
vii	41.672	4.234
viii	59.047	4.313

ルが異なることに注意しよう.

計算に要した時間は Table 6 に示す.

4.2 考察

得られた最適化問題 (31)~(37) 式と (55)~(59) 式は非凸非線形の最適化問題のため, 局所最適解が得られるという保証はなく, 実際に上記の数値例でも局所最適解が得られた例は限られている. そこで, より大きな安定半径を得るという観点から, 特に複素安定半径を用いる効用について考察をおこなう. Tables 1, 2 と Tables 4, 5 の結果を見ると, 例題 1 では i, ii, iii で, 例題 2 では v, vii, viii の場合で複素安定半径を用いた方がよりよい値が得られた. このことから複素安定半径を用いることの有用性が考えられる. また, 解の計算に要する時間を比較した Tables 3, 6 から複素安定半径の優位性を挙げることができる.

複素安定半径が大きくなるコントローラパラメータは実安定半径も大きくなるという傾向が望ましいが, Figs. 2, 3 と Figs. 4, 5 をそれぞれ見比べると, この大小関係の対応がある程度は取れているといえる. もちろんこのような傾向が必ずしも一般に成り立つとは限らないが, 複素安定半径を用いる方が問題の解きやすさから安定半径が大きくなるコントローラパラメータ $\mathbf{r}$ を見いだしやすいということは期待できよう. したがって, 実安定半径を用いた場合に変数の動きが小さく改善が見られない場合は, 複素安定半径を用いる方法は改善が見込まれる代替手段として扱える. このように, 二つの安定半径計算を相補的に用いることが一つの計算戦略である.

5. おわりに

1 入出力フィードバックシステムの極配置-安定半径改善問題を勾配法が利用できる形式で定式化をおこなった. これにより既存の数値計算パッケージが利用できる. 数値例にて MATLAB のライブラリを利用して最適化問題を解くと初期値よりも安定半径が改善されたコントローラパラメータが得られたが, 制約条件の非線形性の強さが原因であまり改善されない例も見られた. つまり, 効率のよいロバストコントローラの探索には試行錯誤が不可避であると考えられる. このためにも, 非線形性が弱い複素安定半径を組み合わせることは有効な計算方法といえる. よりよい解を得るため, 多項式制約などを利用した他の最適化法を適用することを今後の検討課題としたい.

参考文献

- [1] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat and L. H. Keel: *Robust Control*, Prentice-Hall (1995)
- [2] J. C. Doyle, B. A. Francis and A. R. Tannenbaum: *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company (1992)
- [3] U. Mackenroth: *Robust Control Systems*, Springer-Verlag (2004)
- [4] H. Kokame and T. Mori: An explicit formula for Γ -stability robustness margin; *Proc. 12th IFAC World Congress*, Vol. 10, pp.247–252 (1993)
- [5] 川端, 森: 微分不可能関数最適化法を用いたフィードバック安定半径改善; 電気学会論文誌 C, Vol. 126, No. 11, pp. 1318–1323 (2006)
- [6] Y. Nesterov: Squared functional systems and optimization problems; *High Performance Optimization*, pp. 405–440, Kluwer Academic (2000)
- [7] K. C. Toh, R. H. Tütüncü and M. J. Todd: On the implementation and usage of SDPT3; <http://www.math.nus.edu.sg/~mattohc/sdpt3.html>
- [8] T. Hu and J. Lam: Improvement of parametric stability margin under pole assignment; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 44, No. 10, pp. 1938–1942 (1999)
- [9] G. P. Liu and S. Daley: Stable dynamical controller design for robust polynomial pole assignment; *IEE Proc. Control Theory Appl.*, Vol. 145, No. 3, pp. 259–264 (1998)
- [10] C. V. Loan: How near is a stable matrix to an unstable matrix; *Contemporary Mathematics*, Vol. 47, pp. 465–478, American Mathematical Society (1985)