対称アフィンシステムの設定点サーボ問題 —PI制御による実用安定化*

志水 清孝[†]・田村 健一[‡]

Setpoint Servo Problem for Symmetric Affine System — Practical Stabilization by PI Control*

Kiyotaka SHIMIZU[†] and Kenichi TAMURA[‡]

This paper is concerned with control of nonholonomic systems. As is well known, symmetric affine system is unable to control with continuous time invariant state feedback control. In this paper we apply PI Control to a setpoint servo problem for the symmetric affine system. PI control possesses two adjustable parameters K_P, K_I , and in addition the so-called manual reset quantity $\mathbf{m}_0$. (Note that adjusting $\mathbf{m}_0$ is equivalent to adjusting an initial condition $\mathbf{z}_0$ of integrator $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{e}$.) By the PI control with the manual reset $\mathbf{m}_0$ appropriately chosen, not only controllable part of symmetric affine system is asymptotically stabilized but also uncontrollable part can be made to converge to the desired point. Applying the PI control with $\mathbf{m}_0$, we can control the symmetric affine system without transforming into the "chained form". We confirmed the effectiveness of the proposed method by the simulation results for various plants like a two-wheeled vehicle and a four-wheeled vehicle, a flying robot, etc.

1. はじめに

とくに非ホロノミックな速度拘束をもつ機械系の多くはドリフト項のない対称アフィンシステムで記述でき、それが劣駆動システムである場合は、たとえ可制御であっても Brockett の定理 [1] から、静的連続時不変の状態フィードバック制御では漸近安定化ができないことが知られている。したがって、制御則の切換えなどの不連続なフィードバック制御 [3,4,2] や時間軸状態制御系方策 [10] や時変フィードバック制御 [7,9–11] を用いる方法が研究されているが、それらの多くは対称アフィンシステムの正準系である "Chained form" に限定される。Khennouf[3] らは不変マニホールドを利用して 2 段階切換えの制御方式を提案した。これは Chained form の構

造を巧みに利用した方式のため、Chained form 以外への拡張が困難である。しかし、Chained form への変換方法は複雑かつ技巧的であるため個別的になりがちで、さらに変換に関する特異点問題も生じてしまうため、あまり実用的ではない。

美多ら [2,4] は、Chained form に変換することなく n 次元 $n-1$ 入力に対称アフィンシステムに適用できる可変拘束制御法を提案した。文献 [8] では可変拘束制御の実現方法として直接勾配降下制御 [5,6] を応用している。可変拘束制御の各段階における評価関数をそれぞれ設定し、2 段階方式の直接勾配降下制御によって実現している。さらに著者らは直接勾配制御の初期条件を最適探索することによる対称アフィンシステムの新しい制御法を提案した [16]。

本論文では対称アフィンシステムの設定点サーボ問題を考える。ここでは、chained form に変換することなく原システムに対して PI 制御を適用する。そのとき PI 制御の手動リセット量や I 動作の初期条件を最良に設定することによって漸近安定化できることを示す。手動リセット量の最適設定には Nelder-Mead 法を用いる。また手動リセット量の最良設定は必ずしも 1 回で行う必要はない。提案手法は、PI 制御という単純な枠組みを利用し、手動リセット量というオンライン探索しやすいパラ

* 原稿受付 2007 年 11 月 26 日

[†] 慶応義塾大学 理工学部 Faculty of Science and Technology, Keio University; 3-14-1, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, Kanagawa 223-8522, JAPAN

[‡] 慶応義塾大学 大学院 理工学研究科 Graduate School of Science and Technology, Keio University; 3-14-1, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, Kanagawa 223-8522, JAPAN

Key Words: nonholonomic system, symmetric affine system, PI control, manual reset quantity, four wheeled vehicle.

メータをうまく選ぶことで実装しやすい制御方式を与えている点の特徴である。

2. 対称アフィンシステムのPI制御

ドリフト項のない非線形アフィンシステムであるところの対称アフィンシステム

$$\dot{\mathbf{x}} = G(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

を考える。ここで $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^r$ は状態ベクトルと制御入力であり, $G(\mathbf{x})$ は R^n の各点で列フルランクである。車輪移動体や宇宙ロボットなどがこれにあたる。対称アフィンシステムは不適切な制御を行うと $G(\mathbf{x}^s)\mathbf{u}^s = \mathbf{0}$ なる点 $\mathbf{x}^s \neq \mathbf{0}$ へ収束してしまうことが難しい点である。

システム (1) に対してPI制御

$$\mathbf{u} = K_P(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) + K_I \int_0^t (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) d\tau + \mathbf{m}_0 \quad (2)$$

を考える。ここで $\mathbf{x}^*$ は目標値, $K_P \in R^{r \times n}$, $K_I \in R^{r \times n}$ はそれぞれ比例ゲイン行列と積分ゲイン行列, $\mathbf{m}_0$ は手動リセット量である。PI制御則 (2) は等価的に次のように書ける。

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = K_P(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) + K_I \mathbf{z} + \mathbf{m}_0 \quad (4)$$

(1), (3), (4) 式は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} O & O \\ -I & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(\mathbf{x}) \\ O \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ &\quad + \begin{bmatrix} O \\ \mathbf{x}^* \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{z}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = K_P(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) + K_I \mathbf{z} + \mathbf{m}_0 \quad (6)$$

と表せる。(5), (6) 式は平衡状態 $(\mathbf{x}_e, \mathbf{z}_e)$ で $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}^*$ となると、対応した $\mathbf{z}$ と $\mathbf{u}$ は $G(\mathbf{x}^*)\{K_I \mathbf{z}_e + \mathbf{m}_0\} = \mathbf{0}$ を満たさねばならないが, $G(\mathbf{x}^*)$ は列フルランクなので $K_I \mathbf{z}_e + \mathbf{m}_0 = \mathbf{0}$ である。ゆえに $\mathbf{x}_e$ と $\mathbf{z}_e$ に対応した入力は $\bar{\mathbf{u}} = K_P(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_e) + K_I \mathbf{z}_e + \mathbf{m}_0 = \mathbf{0}$ である。

さて、(5) 式を $(\mathbf{x}_e, \mathbf{z}_e, \bar{\mathbf{u}}) = (\mathbf{x}^*, \mathbf{z}_e, \mathbf{0})$ のまわりで線形化すると、 $\mathbf{z}_e$ の値にかかわらず

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} O & O \\ -I & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(\mathbf{x}^*) \\ O \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ &:= \hat{A} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \hat{B} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (7)$$

となる。ただし、ここでは線形化変数 $\delta \mathbf{x}$, $\delta \mathbf{z}$, $\delta \mathbf{u}$ を記述簡単化のため、あらためて $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{u}$ とおいた。これは、 $r < n$ のとき可制御行列 M_c の階数が $\text{rank} M_c = 2r < 2n$ となり、不可制御な虚軸上の固有値 (固有値 0) を有する。したがって、線形化システム (7) は相似変換

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}^S \\ \bar{\mathbf{x}}^C \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (8)$$

によって、次のような可制御部分と不可制御部分にブロック対角化された正準形に変換できる。

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}^S \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}^S & O \\ O & \bar{A}^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}^S \\ \bar{\mathbf{x}}^C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}^S \\ O \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (9)$$

where

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^S & O \\ O & \bar{A}^C \end{bmatrix} = T \hat{A} T^{-1}, \quad \begin{bmatrix} \bar{B}^S \\ O \end{bmatrix} = T \hat{B}$$

ただし、 $\bar{\mathbf{x}}^S \in R^{2r}$, $\bar{\mathbf{x}}^C \in R^{2n-2r}$ はそれぞれ可制御な状態ベクトルと不可制御な状態ベクトルである。ここで、あきらかに $\bar{A}^C$ の固有値はすべて 0 であり、線形化システム (7) の不可制御なモードである。しかし、不可制御な状態変数は Lyapunov の意味 (発散しないという意味) で安定である。

さて、 $\{\bar{A}^S, \bar{B}^S\}$ は可制御なので、状態フィードバック

$$\mathbf{u} = -[\bar{K}^S \ O] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}^S \\ \bar{\mathbf{x}}^C \end{bmatrix} = -\bar{K}^S \bar{\mathbf{x}}^S \quad (10)$$

によって、(9) 式は

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}^S \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}^S - \bar{B}^S \bar{K}^S & O \\ O & \bar{A}^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}^S \\ \bar{\mathbf{x}}^C \end{bmatrix} \quad (11)$$

となり、拡大システム (9) の可制御部分 $\bar{\mathbf{x}}^S$ は漸近安定化される。

$\bar{K}^S$ の具体的な求め方は最適レギュレータの代数 Riccati 方程式を用いてもよいし、Lyapunov 方程式を LMI で解いてもよいし、任意極配置法を用いてもよい。

つぎに、線形化システムにおいて可制御変数を漸近安定化するような PI パラメータ行列を求めるために、PI 制御則 ((1), (3) 式に対する PI 制御則 (4) 式を (7) 式に対するものとして書き換えたもの)

$$\mathbf{u} = -K_P \mathbf{x} + K_I \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -K_P & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (12)$$

が線形フィードバック (10) 式と等しくなるような K_P , K_I を求めることを考える。(10) 式は

$$\mathbf{u} = -[\bar{K}^S \ O] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}^S \\ \bar{\mathbf{x}}^C \end{bmatrix} = -[\bar{K}^S \ O] T \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (13)$$

と書けるので、(12) 式と (10) 式が等しくなるためには

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -K_P & K_I \end{bmatrix} &= -[\bar{K}^S \ O] T \\ &= -[\bar{K}^S \ O] \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

が成立すればよい。つまり、 K_P , K_I は

$$K_P = \bar{K}^S T_{11}, \quad K_I = -\bar{K}^S T_{12} \quad (15)$$

のように求められる。

このような可制御部分を漸近安定化する K_P, K_I を用いた手動リセット量付PI制御 (3), (4) を元の非線形システム (1) に適用すると, (x^*, z_e) 近傍では可制御部分は局所的に漸近安定化され, 不可制御部分は後述の通り, もし中心多様体上のダイナミクスが安定であればオフセットは残るが定常値に収束する。

さて, (5) 式に (4) 式を代入すると,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} O & O \\ -I & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(x) \\ O \end{bmatrix} \\ &\quad \times \left\{ \begin{bmatrix} -K_P & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + m_0 + K_P x^* \right\} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ x^* \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

となる。これを

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = F \left(\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}; K_P, K_I; m_0 \right), \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

とおくと, これは相似変換 (8) によって

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}^S \\ \dot{\bar{x}}^C \end{bmatrix} &= TF \left(T^{-1} \begin{bmatrix} \bar{x}^S \\ \bar{x}^C \end{bmatrix}; K_P, K_I; m_0 \right), \\ \begin{bmatrix} \bar{x}^S(0) \\ \bar{x}^C(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{x}_0^S \\ \bar{x}_0^C \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

へ変換される。

一般的に言えば, 線形化システムが実部が0の固有値をもつ場合には, 中心多様体の理論を用いて安定性を議論する。中心多様体に関して次のことが知られている。

“原点の近傍から出発した軌道はすべて中心多様体 $S^c(0)$ に指数的に引き寄せられ, 平衡点の安定性は中心多様体上のダイナミクスだけから判定できる。すなわち $S^c(0)$ 上だけで考えたとき平衡点が安定, 漸近安定, 不安定であれば, 全体でも平衡点は安定, 漸近安定, 不安定である。”

システム (18) の中心多様体写像を $\bar{x}^S = \pi(\bar{x}^C)$ とおくと, 中心多様体上のダイナミクスは

$$\dot{\bar{x}}^C = F^C(\pi(\bar{x}^C), \bar{x}^C) \quad (19)$$

で与えられる。ここで F^S と F^C はそれぞれ TF の $\bar{x}^S$ と $\bar{x}^C$ に対応する部分である。 $\bar{x}^S$ のダイナミクスは局所的に指数安定であるので, 上述のことより, もし (19) 式が安定であれば, システム (18) の安定性が保証される [17, 15, 12]。

さて, $\begin{bmatrix} \bar{x}^S \\ \bar{x}^C \end{bmatrix}$ の所望の平衡点は

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^{S*} \\ \bar{x}^{C*} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x^* \\ z_e \end{bmatrix}$$

の関係から計算される。(18) 式の解 $\begin{bmatrix} \bar{x}^S(t) \\ \bar{x}^C(t) \end{bmatrix}$ は m_0 の関数なので, $\bar{x}^S(t)$ が $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} \bar{x}_0^S \\ \bar{x}_0^C \end{bmatrix}$ の値にかかわらず $\bar{x}^{S*}$ に収束するとき, $\bar{x}^C(t)$ も $\bar{x}^{C*}$ へ収束させるためには, m_0 の値をそのような値に適切に選択しなければならない。

以上のことを変換前の原システムで考えると, $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$ の可制御変数も, 不可制御だがLyapunovの意味で安定な変数も $\begin{bmatrix} x^* \\ z_e \end{bmatrix}$ へ収束させるためには m_0 を適当な値に選択しなければならない。そこで次の仮定をおく。

【仮定1】 システム (1) は可到達で, PI制御 (2) の手動リセット量 m_0 は, $t \rightarrow \infty$ のとき状態 $x(t)$ を x^* へ近づけるための十分な自由度をもっている。

したがって, PI制御によって目標点 x^* へ収束させるためには平衡点 $x(\infty)$ のノルム $\|x^* - x(\infty)\|$ を最小にするような m_0 を見つけばよい。そのために実際には $t \rightarrow \infty$ としなくても, ほぼ平衡に達したと考えられる十分大きな t_1 において, 次の問題を解くことによって m_0 を見つけることができる。

$$\min_{m_0} \sum_{j=1}^n w_j (x_j^* - x_j(t_1))^2, \quad w_j > 0 \quad (20a)$$

$$\text{subj. to } \dot{x}(t) = G(x(t))u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (20b)$$

$$\dot{z}(t) = x^* - x(t), \quad z(0) = 0 \quad (20c)$$

$$u(t) = K_P(x^* - x(t)) + K_I z(t) + m_0 \quad (20d)$$

ここで, w_j は重み係数である。最適な m_0 の提案は基本的には1回で行う。しかし, 最適な m_0 の探索は必ずしも1段階で行わなくてもよい。まだ完全に最適値に達していない m_0 でPI制御を実行した結果, まだオフセットが残り $x_j(\infty)$, $j \in J$ が非所望の平衡点 x_j^e , $j \in J$ へ収束してしまった場合には, 今度は

$$x_j(t_1) \approx \begin{cases} x_j^e, & j \in J \\ 0, & j \notin J \end{cases}$$

を初期状態として, 第2段階目のPI制御の手動リセット量を探索する。ただし, J は非所望の平衡点へ収束してしまった状態変数の添字集合である。すなわち十分おっきな t'_1 に対して次の問題を解く。

$$\min_{m_0} \sum_{j \in J} w_j (x_j^* - x_j(t'_1))^2, \quad w_j > 0 \quad (21a)$$

$$\text{subj. to } \dot{x}(t) = G(x(t))u(t), \quad x(0) = x(t_1) \quad (21b)$$

$$\dot{z}(t) = x^* - x(t), \quad z(0) = 0 \quad (21c)$$

$$u(t) = K_P(x^* - x(t)) + K_I z(t) + m_0 \quad (21d)$$

m_0 に関する最適化は必ずしも厳密に行われなくても、このようなプロセスを何回か繰り返すことによって、次々にすべての状態変数を十分な精度で $\mathbf{x}^*$ へ収束させることができる。毎回部分状態が $\mathbf{x}^*$ 方向へ接近していけば、何回かの繰り返しで実用上問題のない精度で $\mathbf{x}^*$ へ到達することが期待できる。証明はないのですがすべてのプラントで成り立つ保証はないが、いくつかの実例（プラント）では有効に機能することを確認した。

このような $\mathbf{m}(0)=\mathbf{m}_0$ の最良決定あるいは更新は、状態フィードバック制御則の切換えと同様の効果を与える。

最適化問題(20)あるいは(21)を解くためにはNelder-Mead法[13,14]を応用する。これは勾配を用いない最適化探索法の一つであるシンプレックス法を改良したアルゴリズムだが、原理が非常に簡単で、決定変数の次元が低い問題には非常に有効であり、有限回の探索で十分に許容精度以内の近似解が得られる。

さて、PI制御(2)は等価的に次のようにも書ける。

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \quad (22)$$

$$\mathbf{u} = K_P(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) + K_I \mathbf{z} \quad (23)$$

(22)式より

$$\mathbf{z} = \int_0^t (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) dt + \mathbf{z}_0$$

だから、(23)式に代入すると

$$\mathbf{u} = K_P(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) + K_I \int_0^t (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) dt + K_I \mathbf{z}_0 \quad (24)$$

となる。それゆえ、(22)、(23)式のPI制御則は手動リセット量 $\mathbf{m}_0 = K_I \mathbf{z}_0$ をもつPI制御である。

(1)、(22)、(23)式は

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^* \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{z}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{u} = K_P(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) + K_I \mathbf{z} \quad (26)$$

と表せる。

この後は(12)～(15)式と同様の議論により

$$K_P = \bar{K}^S T_{11}, \quad K_I = -\bar{K}^S T_{12}$$

を得る。さらに(16)式に対応して、

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -K_P & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + K_P \mathbf{x}^* \right\} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^* \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{z}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

となる。これを

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} := F \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}; K_P, K_I \right), \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{z}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

とおくと、これは相似変換(8)によって

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}^S \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}^C \end{bmatrix} = T F \left(T^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}^S \\ \bar{\mathbf{x}}^C \end{bmatrix}; K_P, K_I \right), \quad \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}^S(0) \\ \bar{\mathbf{x}}^C(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0^S \\ \bar{\mathbf{x}}_0^C \end{bmatrix} \quad (29)$$

へ変換される。

そこで、(29)式の解 $\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}^S(t) \\ \bar{\mathbf{x}}^C(t) \end{bmatrix}$ は $\bar{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0^S \\ \bar{\mathbf{x}}_0^C \end{bmatrix}$ の関数なので、 $\bar{\mathbf{x}}^S(t)$ が $\bar{\mathbf{x}}(0)$ の値にかかわらず $\bar{\mathbf{x}}^{S*}$ に収束するとき、 $\bar{\mathbf{x}}^C(t)$ も $\bar{\mathbf{x}}^{C*}$ へ収束させるためには $\bar{\mathbf{x}}(0)$ をそのような値に適切に選択しなければならない。それは $\bar{\mathbf{x}}(0) = T \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix}$ だから、 $\mathbf{z}_0$ を適切に選択することを意味する。

以上の事柄を変換前の原システムで考えると、 $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$ の可制御変数も、不可制御だがLyapunovの意味で安定な変数も $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{z}_e \end{bmatrix}$ に収束させるためには $\begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{z}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix}$ を適切に選択しなければならない。それは任意に与えられた $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ に対して $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ を $\mathbf{x}_0$ の関数 $\mathbf{z}_0(\mathbf{x}_0)$ として適当に選択することによって達成される。

以下、最適な $\mathbf{z}_0$ の探索は前述の $\mathbf{m}_0$ の探索と同様にしてNelder-Mead法を用いて実行できる。

3. 4輪車のPI制御

Fig.1で表される4輪車を考える。この車両の後輪の軸の中心から前輪の軸の中心までの長さは L である。

4輪車の一般化座標を車体の平面位置 (x, y) 、車体の姿勢角 θ 、前輪の操舵角 ϕ とし、制御入力を進行速度 $u_1 = v$ および前輪の操舵角速度 $u_2 = \dot{\phi}$ とすると、次のようにモデル化される[4]。

Fig. 1 Four-wheeled vehicle

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x_3 & 0 \\ \sin x_3 & 0 \\ \frac{1}{L} \tan x_4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = G(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (30)$$

ただし $\mathbf{x} = (x, y, \theta, \phi)^T \in R^4$ である. また, $L = 1.5$ とする.

目標値を $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)^T$ とする PI 制御 (2) による設定点サーボ問題を考える.

最初に, $\mathbf{x}^*$ 近傍での線形化システムの可制御部を漸近安定化する PI パラメータ行列を計算する. まず, 拡大システム (5) を目標値で線形化すると次のようになる.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O \\ -I_4 & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(\mathbf{x}^*) \\ O \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (31)$$

where

$$G(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} \cos x_3^* & 0 \\ \sin x_3^* & 0 \\ (1/L) \tan x_4^* & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

システム (31) の可制御行列 M_c は $\text{rank} M_c = 4$ なので, 不可制御部の次数は $8 - 4 = 4$ である. よって, 相似変換

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos x_3^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\cos x_3^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\sin x_3^*}{\cos x_3^*} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tan x_4^*}{L \cos x_3^*} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin x_3^*}{\cos x_3^*} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\tan x_4^*}{L \cos x_3^*} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を行うと正準形 (9) を得る. ただし,

$$\bar{A}^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}^S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}^C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である. よって, 可制御部分の行列 $\bar{A}^S - \bar{B}^S \bar{K}^S$ を漸近安定化する状態フィードバックゲイン $\bar{K}^S$ を Riccati 方程式を解いて求めると

$$\bar{K}^S = \begin{bmatrix} 1.7321 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.7321 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

となる. このとき可制御部の極は $\sigma(\bar{A}^S - \bar{B}^S \bar{K}^S) = \{-0.8660 \pm 0.5000i, -0.8660 \pm 0.5000i\}$ である. また, $\bar{A}^C$ の固有値は 0 である.

よって, (15) 式より

$$K_P = \begin{bmatrix} 1.7321/\cos x_3^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.7321 \end{bmatrix},$$

$$K_I = \begin{bmatrix} 1/\cos x_3^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を得る. 最後に $\mathbf{x}^*$ を漸近安定化する $\mathbf{m}_0$ を求めるために, Nelder-Mead 法によって問題 (20) を解く.

Nelder-Mead 法で解くとき, 評価関数 (20a) の重みを $w_1 = 1, w_2 = 1, w_3 = 1$ のように設定する. また, シンプレックス法の鏡像係数 α , 拡張係数 γ , 縮小係数 β はそれぞれ $\alpha = 1.0, \gamma = 1.5, \beta = 0.5$ とする.

Example 1 は $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ のレギュレーション問題である. 初期状態は $\mathbf{x}(0) = (5, -5, \pi/6, \pi/4)^T$ とする. 初期シンプレックスを

$$\mathbf{m}_0^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_0^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_0^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と与えると, 最適な $\mathbf{m}_0$ は 66 回のイテレーションで $\mathbf{m}_0 = (-10.25, -1.754)^T$ のように得られる. シミュレーション結果は Fig. 2 のようになる.

Example 2 は $\mathbf{x}^* = (6, 5, \pi/4, 0)^T$ の設定点サーボ問題である. 初期状態は $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ とする. 初期シンプレックスを

$$\mathbf{m}_0^1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_0^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_0^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

と与えると, 最適な $\mathbf{m}_0$ は 70 回のイテレーションで $\mathbf{m}_0 = (-31.00, 0.5216)^T$ のように得られる. シミュレーション結果を Fig. 3 に示す.

Example 3 もまた $\mathbf{x}^* = (-5, -10, \pi/4, \pi/4)^T, \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ とする設定点サーボ問題である. 初期シンプレックスを

$$\mathbf{m}_0^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_0^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_0^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と与えると, 最適な $\mathbf{m}_0$ は 42 回のイテレーションで $\mathbf{m}_0 = (5.758, -3.233)^T$ のように得られる. シミュレーション結果は Fig. 4 のようになる.

Example 1, 2, 3 とも 1 段階で全状態が速やかに所望点へ収束する様子がわかる.

さらに別のシミュレーションにおいて, 1 段階目の $\mathbf{m}_0$ ではいくつかの変数にオフセットが残った場合, 2 段階目で $\mathbf{m}_0$ を再更新した結果, 所望点へ漸近安定化できる

Fig. 2 Example 1 (state, input, x-y plane) ($\mathbf{x}(0) = (5, -5, \pi/6, \pi/4)^T$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$)

Fig. 3 Example 2 (state, input, x-y plane) ($\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^* = (6, 5, \pi/4, 0)^T$)

Fig. 4 Example 3 (state, input, x-y plane) ($\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^* = (-5, -10, \pi/4, \pi/4)^T$)

様子が観察された。

4. おわりに

本論文では、対称アフィンシステム、たとえば4輪車などに対して手動リセット付PI制御が有効であることを示した。静的な連続時不変状態フィードバック則では制御が不可能であったシステムがchained formに変換することなく、PI制御で設定点サーボ問題を解くことができた点が興味深い。またchained formに変換しないので、逆変換時の特異点回避の難問を避けることができる。

手動リセット付PI制御は1段階で行う必要はなく何段階かで実行できるが、これは人間が運転時にみせる切換え操作に似ていることも興味深い。またNelder-Mead法である初期シンプレックスから出発して $\mathbf{m}_0$ を探索するとき、特異点 $x_4 = \pi/2$ を通過して発散してしまうことがある。そのような場合には $\mathbf{m}_0$ の最適化を x_4 が $\pi/2$ にあまり近づかないうちに中止し、そのときの $\mathbf{m}_0$ のもとで達した平衡状態から2段階目の $\mathbf{m}_0$ の最適化を行う。このような2段階（あるいは3段階）の $\mathbf{m}_0$ の更新で特異点通過を避けることができる。4輪車以外にも2輪車や浮遊ロボットなどに対するシミュレーション結果から提案手法の有効性を確認した。

参考文献

- [1] R. W. Brockett: *Asymptotic Stability and Feedback Stabilization, Differential Geometric Control Theory*, Birkhauser, pp. 181–184 (1983)
- [2] 池田, 南, 美多: 浮遊機械のノンホロノミック可変拘束制御の提案と収束性の検討; 日本ロボット学会誌, Vol. 18, No. 6, pp. 847–855 (2000)
- [3] H. Khenouf and C.C. de Wit: On the construction of stabilizing discontinuous controllers for nonholonomic systems; *Proc. of IFAC Nonlinear Control Systems Design Symp.*, pp. 747–752 (1995)
- [4] 美多: 非線形制御入門～劣駆動ロボットの技能制御論～, 昭晃堂 (2000)
- [5] 大塚, 志水: 直接勾配降下制御による非線形システムの安定化制御; 計測自動制御学会論文集, Vol. 37, No. 7, pp. 626–632 (2001)
- [6] K. Shimizu and K. Otsuka: Performance improvement of direct gradient descent control for general nonlinear systems; *Proc. of 1999 IEEE Int'l Conf. on Control Applications*, pp. 699–706 (1999)
- [7] J-B. Pomet: Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift; *Systems and Control Letters*, Vol. 18, pp. 147–158 (1992)
- [8] K. Shimizu and K. Tamura: Control of nonholonomic systems via direct gradient descent control – Variable constraint control based approach; *IEEE CCA Proceedings*, pp. 837–842 (2004)
- [9] O. J. Sordalen and O. Egeiland: Exponential stabilization of nonholonomic chained systems; *IEEE Transaction*, AC-70-1, pp. 35–49 (1995)
- [10] 清田, 三平: 時間軸状態制御形によるドリフト項をもたない非ホロノミックシステムの安定化; システム制御情報学会論文誌, Vol. 12, No. 11, pp. 647–654 (1999)
- [11] D. Samson: Control of chained systems application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots; *IEEE Trans.*, AC-40-1, pp. 64–77 (1995)
- [12] 志水, 佐藤: 中心多様体とニューラルネットに基づくクリティカルケースの非線形レギュレータ; 電子情報通信学会論文誌A, Vol. J88, No. 7, pp. 822–832 (2005)
- [13] J. A. Nelder and R. Mead: A simplex method for function minimization; *Computer J.*, Vol. 7, pp. 308–313 (1965)
- [14] 志水: システム最適化理論, コロナ社, pp. 289–294 (1976)
- [15] D. Aeley: Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback control; *Syst. Control Lett.*, Vol. 5, pp. 289–294 (1985)
- [16] 志水, 田村: 対称アフィンシステムの直接勾配降下制御による安定化制御; 計測自動制御学会論文集, Vol. 43, No. 4, pp. 285–292 (2007)
- [17] J. Carr: *Applications of Center Manifold Theory*, Springer-Verlag (1981)