非ホロノーム・レオノーム系としての 交直連系系統の動特性表現*

竹 内 義 之**

Dynamic Characterization of Interconnected Power System as Nonholonom-Rheonomic System*

Yoshiyuki TAKEUCHI**

1. まえがき

この研究は、非ホロノーム・レオノーム変換についてなされたものであり、Boltzman-Hamel 式を基にしてレオノーム変換の性質を導入したものである。そして、その式を交直連系系統に適用して、動特性を表わす式を導いた。

2. 記号の説明

E_{a1}, E_{a2} は順逆変圧器 2 次側線間電圧, I^{a1}, I^{a2} は順逆変圧器 2 次側電流, X_1, X_2 は順逆変圧器転流リアクタンス, P は相数, L_1, L_2 は線路インダクタンス, R_{L1}, R_{L2} は線路抵抗, C_0 は対地容量, I^{d1}, I^{d2} は直流線路電流, α は順変換器制御角, β は逆変換器制御角, E_{d1}, E_{d2} は順逆変換器の端子電圧, E'_{d1}, E'_{d2} は順逆変換器の直流発生電圧, T は運動エネルギー, U は位置エネルギー, f は外力, J は Rayleigh の散逸関数, C_1, C_2 は仮想的な変換器, また記号上に印した $\dot{}$ は時間微分を意味する。

3. Boltzman-Hamel 式の拡張

Lagrange 関数を

$$L(x, \dot{x}) = T(x, \dot{x}) - U(x) \quad (1)$$

とすると, Lagrange の方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\lambda}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial J}{\partial \dot{x}^{\lambda}} = f_{\lambda} \quad (2)$$

で与えられる。

* 原稿受付 1989. 6. 20

** 徳島文理大学 工学部 Tokushima-Bunri University ;
Ookawagun, Kagawa 769-21, JAPAN

Key Words : non-holonomic system, rheonomic system, AC-DC-AC power system, dynamic characteristic, α, β angle control.

これより, レオノーム変換¹を導入して, Boltzman-Hamel 式²を拡張すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^{\lambda'}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda'}} (T - U) + 2 \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^{\nu'}} \Omega_{\mu' \lambda'}^{\nu'} \\ + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^{\nu'}} \Theta_{\mu' \lambda'}^{\nu'} + \frac{\partial J}{\partial \dot{x}^{\lambda'}} = f_{\lambda'} \end{aligned} \quad (3)$$

なる式が得られる。ここに

$$\begin{aligned} \Omega_{\mu' \lambda'}^{\nu'} &= \frac{1}{2} \Lambda_{\lambda'}^{\lambda} \Lambda_{\mu'}^{\mu} \left(\frac{\partial \Lambda_{\lambda}^{\nu'}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Lambda_{\mu}^{\nu'}}{\partial x^{\lambda}} \right) \\ \Theta_{\lambda'}^{\nu'} &= \Lambda_{\lambda'}^{\lambda} \frac{\partial \Lambda_{\lambda}^{\nu'}}{\partial t}, \quad \Lambda_{\lambda'}^{\lambda} = \frac{\partial \dot{x}^{\lambda}}{\partial \dot{x}^{\lambda'}} \end{aligned} \quad (4)$$

である。

(3) 式に, $T = 1/2 a_{\alpha' \beta'}^{\lambda'} \dot{x}^{\alpha'} \dot{x}^{\beta'}$, $J = 1/2 r_{\alpha' \beta'}^{\lambda'} \dot{x}^{\alpha'} \dot{x}^{\beta'}$ として, $U = 1/2 b_{\alpha' \beta'}^{\lambda'} x^{\alpha'} x^{\beta'}$ を代入すると

$$\begin{aligned} a_{\lambda' \beta'}^{\nu'} \dot{x}^{\beta'} + [\alpha' \beta', \lambda'] \dot{x}^{\alpha'} \dot{x}^{\beta'} + b_{\lambda' \beta'}^{\nu'} x^{\beta'} + r_{\lambda' \beta'}^{\nu'} \dot{x}^{\beta'} \\ + v_{\lambda' \beta'}^{\nu'} \dot{x}^{\beta'} = f_{\lambda'} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} [\alpha' \beta', \lambda'] &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{\lambda' \beta'}^{\nu'}}{\partial x^{\alpha'}} + \frac{\partial a_{\lambda' \alpha'}^{\nu'}}{\partial x^{\beta'}} - \frac{\partial a_{\alpha' \beta'}^{\nu'}}{\partial x^{\lambda'}} \right) \\ &+ a_{\nu' \beta'}^{\lambda'} \Omega_{\alpha' \lambda'}^{\nu'} + a_{\alpha' \nu'}^{\lambda'} \Omega_{\beta' \lambda'}^{\nu'} \end{aligned}$$

$$v_{\lambda' \beta'}^{\nu'} = \Lambda_{\lambda'}^{\lambda} a_{\nu' \beta'}^{\nu} \frac{\partial \Lambda_{\lambda}^{\nu'}}{\partial t} \quad (6)$$

が得られる。

4. α, β 角制御時の動特性

Fig. 1 に示した交直連系系統における順逆変換器の α, β 角制御時の系の動特性を求める。

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left\{ a_{d1 d1} (\dot{x}^{d1})^2 + a_{d2 d2} (\dot{x}^{d2})^2 \right\} \\ U &= \frac{1}{2} \left\{ b_{d1 d1} (x^{d1})^2 + b_{d1 d2} x^{d1} x^{d2} + b_{d2 d1} x^{d2} x^{d1} \right. \\ &\quad \left. + b_{d2 d2} (x^{d2})^2 \right\} \\ J &= \frac{1}{2} \left\{ r_{d1 d1} (\dot{x}^{d1})^2 + r_{d2 d2} (\dot{x}^{d2})^2 \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

とおくと, $\dot{x}^{d1} = I^{d1}$, $\dot{x}^{d2} = I^{d2}$ であり, 以下に記述される $\dot{x}^{d'1}$, $\dot{x}^{d'2}$ もそれぞれ $I^{a1} \cos \varphi_1$, $I^{a2} \cos \varphi_2$ を表わす.

電圧, 電流そして制御角の変換式は, エネルギー保存則 ($\sqrt{3} f_{d_i} \dot{x}^{d'i} \cos \varphi_i = f_{d_i} \dot{x}^{d'i}$; $i = 1, 2$) に基づいて

$$\begin{bmatrix} f_{d1} \\ f_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \cos \alpha & 0 \\ 0 & K_2 \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{d'1} \\ f_{d'2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^{\theta_1} \\ \dot{x}^{d1} \\ \dot{x}^{d2} \\ x^{\theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{K_1 \cos \alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{K_2 \cos \beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{\theta'_1} \\ \dot{x}^{d'1} \\ \dot{x}^{d'2} \\ x^{\theta'_2} \end{bmatrix}$$

で表わされ, f_d は直流側電圧 E_d , $f_{d'}$ は交流側線間電圧 E_a , $x^{\theta_1} = x^{\theta'_1} = \alpha$, $x^{\theta_2} = x^{\theta'_2} = \beta$ はそれぞれ順逆変換器の制御角, φ_1, φ_2 は交流側の力率角で, ここでは一定と仮定する. これより,

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{\theta'_1}^{\theta_1} & \Lambda_{d'_1}^{\theta_1} & \Lambda_{d'_2}^{\theta_1} & \Lambda_{\theta'_2}^{\theta_1} \\ \Lambda_{\theta'_1}^{d_1} & \Lambda_{d'_1}^{d_1} & \Lambda_{d'_2}^{d_1} & \Lambda_{\theta'_2}^{d_1} \\ \Lambda_{\theta'_1}^{d_2} & \Lambda_{d'_1}^{d_2} & \Lambda_{d'_2}^{d_2} & \Lambda_{\theta'_2}^{d_2} \\ \Lambda_{\theta'_1}^{\theta_2} & \Lambda_{d'_1}^{\theta_2} & \Lambda_{d'_2}^{\theta_2} & \Lambda_{\theta'_2}^{\theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{K_1 \cos \alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{K_2 \cos \beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と表わす.

つぎに, 線路定数は,

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{d1d1} & a_{d1d2} \\ a_{d2d1} & a_{d2d2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_0} & -\frac{1}{C_0} \\ -\frac{1}{C_0} & \frac{1}{C_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{d1d1} & b_{d1d2} \\ b_{d2d1} & b_{d2d2} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \left(\frac{PX_1}{2\pi} + R_{l1} \right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{PX_2}{2\pi} + R_{l2} \right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma_{d1d1} & \gamma_{d1d2} \\ \gamma_{d2d1} & \gamma_{d2d2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

であるから

$$L' = \begin{bmatrix} a_{d'_1d'_1} & a_{d'_1d'_2} \\ a_{d'_2d'_1} & a_{d'_2d'_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \cos \alpha & 0 \\ 0 & K_2 \cos \beta \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{K_1 \cos \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{K_2 \cos \beta} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3} L_1}{(K_1 \cos \alpha)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3} L_2}{(K_2 \cos \beta)^2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$C' = \begin{bmatrix} b_{d'_1d'_1} & b_{d'_1d'_2} \\ b_{d'_2d'_1} & b_{d'_2d'_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \cos \alpha & 0 \\ 0 & K_2 \cos \beta \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{C_0} & -\frac{1}{C_0} \\ -\frac{1}{C_0} & \frac{1}{C_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{K_1 \cos \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{K_2 \cos \beta} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{C_0 (K_1 \cos \alpha)^2} & -\frac{\sqrt{3}}{C_0 K_1 K_2 \cos \alpha \cos \beta} \\ -\frac{\sqrt{3}}{C_0 K_1 K_2 \cos \alpha \cos \beta} & \frac{\sqrt{3}}{C_0 (K_2 \cos \beta)^2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$R' = \begin{bmatrix} \gamma_{d'_1d'_1} & 0 \\ 0 & \gamma_{d'_2d'_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \cos \alpha & \\ & K_2 \cos \beta \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{PX_1}{2\pi} + R_{l1} & 0 \\ 0 & \frac{PX_2}{2\pi} + R_{l2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{K_1 \cos \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{K_2 \cos \beta} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{(K_1 \cos \alpha)^2} \left(\frac{PX_1}{2\pi} + R_{l1} \right) & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{(K_2 \cos \beta)^2} \left(\frac{PX_2}{2\pi} + R_{l2} \right) \end{bmatrix} \quad (14)$$

として, (5) 式を用いて線路方程式を求める. ここで $f_{d1} = E_{a1}$, $f_{d2} = -E_{a2}$, $\xi', \lambda', \beta' \in \{d'_1, d'_2, \theta'_1, \theta'_2\}$, $x^{\theta'_1} = x^{\theta_1} = \alpha$, $x^{\theta'_2} = x^{\theta_2} = \beta$ において

$$f_{d'_1} = a_{d'_1\beta'} \ddot{x}^{\beta'} + 2[\xi' \theta'_1, d'_1] \dot{x}^{\xi'} \dot{x}^{\theta'_1} + b_{d'_1\beta'} x^{\beta'}$$

$$+ \gamma_{d'_1\beta'} \dot{x}^{\beta'} + v_{d'_1\beta'} \dot{x}^{\beta'} \quad (15)$$

$$f_{d'_2} = a_{d'_2\beta'} \ddot{x}^{\beta'} + 2[\xi' \theta'_2, d'_2] \dot{x}^{\xi'} \dot{x}^{\theta'_2} + b_{d'_2\beta'} x^{\beta'}$$

$$+ \gamma_{d'_2\beta'} \dot{x}^{\beta'} + v_{d'_2\beta'} \dot{x}^{\beta'} \quad (16)$$

を得る. この式に (12), (13) そして (14) 式の要素を代入して交流側での線路方程式を求めると

$$E_{a1} = \frac{\sqrt{3}}{(K_1 \cos \alpha)^2} \left[L_1 \dot{I}^{a1} + \dot{\alpha} L_1 I^{a1} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{C_0} \left(x^{d'_1} - \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} x^{d'_2} \right) + \left(\frac{PX_1}{2\pi} + R_{l1} \right) I^{a1} \right] \quad (17)$$

$$-E_{a2} = \frac{\sqrt{3}}{(K_1 \cos \beta)^2} \left[L_2 \dot{I}^{a2} + \dot{\beta} L_2 I^{a2} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{C_0} \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} x^{d'_1} - x^{d'_2} \right) + \left(\frac{PX_2}{2\pi} + R_{l2} \right) I^{a2} \right] \quad (18)$$

Fig. 1 Equivalent circuit of AC-DC-AC power system

となる。ただし、この場合は無効電力も考慮して、 $\dot{x}^{d1}$ 、 $\dot{x}^{d2}$ をそれぞれ I^{a1} 、 I^{a2} で表わしてある。

つぎに、直流系統の線路方程式を求めると

$$E_{d1} = L_1 \dot{I}^{d1} + \left(\frac{PX_1}{2\pi} + R_{l1} \right) I^{d1} + \frac{1}{C_0} \left(\frac{1}{\cos \alpha} \int_{t_0}^t I^{d1} \cos \alpha dt - \frac{1}{\cos \beta} \int_{t_0}^t I^{d2} \cos \beta dt \right) \quad (19)$$

$$-E_{d2} = L_2 \dot{I}^{d2} + \left(\frac{PX_2}{2\pi} + R_{l2} \right) I^{d2} - \frac{1}{C_0} \left(\frac{1}{\cos \alpha} \int_{t_0}^t I^{d1} \cos \alpha dt - \frac{1}{\cos \beta} \int_{t_0}^t I^{d2} \cos \beta dt \right) \quad (20)$$

となる。上式で、 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ が一定となる状態では

$$E_{d1} = L_1 \dot{I}^{d1} + \left(\frac{PX_1}{2\pi} + R_{l1} \right) I^{d1} + \frac{1}{C_0} \left(X^{d1} - X^{d2} \right) \quad (21)$$

$$-E_{d2} = L_2 \dot{I}^{d2} + \left(\frac{PX_2}{2\pi} + R_{l2} \right) I^{d2} - \frac{1}{C_0} \left(X^{d1} - X^{d2} \right) \quad (22)$$

と書き改められる。

これより、交流側では (17)、(18) 式の [] の中の第 2 項で示されるように $\dot{\alpha}$ 、 $\dot{\beta}$ の影響が陽にでてくるが、直流側ではそれが無いことがわかる。

5. 結 言

この研究は、変換行列が変数（時間も含む）を含む場合に就いて行なったものであるが、交直連系システムに適用して交流側と直流側で安定解析を行なうための線路方程式を導く一手法を見出した。

参 考 文 献

- 1) A. Wundheiler : 'Rheonome Geometrie' Absolute Mechanik ; Prace Matematycznofizyczne Warszawa, Vol. 40, No. 2, pp. 97~142 (1933)
- 2) G. Kron : Non-Riemannian Dynamics of Rotating Electrical Machinery ; Journal of Mathematics and Physics, Vol. 13, No. 2, pp. 103~194 (1934)