論文要旨

システム制御情報学会論文誌, 3 巻, 4 号, pp. 93~102 (1990)

可能性分布間の相互関係を考慮したファジィ関係の拡張とファジィ線形計画問題への応用

乾口 雅弘・久米 靖文

本報告では、ファジィ数値計画問題の最適解、有効解に関する従来の定義における問題点を指摘し、その問題点を克服するための基礎として、可能性分布間に相互関係がある場合のファジィ関係の拡張方法を提案する。拡張されたファジィ関係の性質を調べ、拡張されたファジィ関係を用いて、ファジィ線形計画問題の最適解の定義を修正する。修正された定義では、定義の問題点から生じていた修正前の欠点が改善されていることが示される。

システム制御情報学会論文誌, 3 巻, 4 号, pp. 103~109 (1990)

列車運転時隔を短縮するための新しい制御方式の提案

大島 弘安・東口 實

列車の運転時隔を短縮することは輸送力増強の上で大きな意味を持つ。ATC を従来よりも多段とし列車速度がこれを越えた時は停車まで緩まないブレーキを作動させることと、これに内接するパターンをもうけこれにそって列車速度を自動制御することと、列車後部検知を細分化することにより、一例では現行 ATC での最小運転時隔 140 秒である駅間を 116 秒まで短縮できることを明らかにした。これは 17% の輸送力増強にあたる。

システム制御情報学会論文誌, 3 巻, 4 号, pp. 110~117 (1990)

画像情報を利用した移動体の位置姿勢計測法

藤原 直史・米澤 徹・津村 俊弘

本論文では、TV カメラを用いた移動体（ビークル）の位置・姿勢計測手法を提案する。このシステムは、移動体に搭載したカメラと位置が既知である目標物（ターゲット）からなり、カメラの位置・姿勢を、ターゲットの画像を解析することにより計測する。またカメラがターゲットの方向を常に向くように追尾制御がなされる。この手法を用いて実験を行ない、位置・姿勢計測の有効性を確認した。

システム制御情報学会論文誌, 3 巻, 4 号, pp. 118~120 (1990)

区間パラメータをもつ線形システムのロバスト安定条件

小亀 英己・木田 浩・森 武宏

不確定パラメータがシステム行列の中にリニアに含まれるシステムのロバスト安定問題をパラメータの変動する範囲があらかじめ知れているものとして検討した。このとき発生し得るシステム行列の集合が行列ポリトープをなす事に注目すると、問題は行列ポリトープが Hurwitz 不変であることを検証することに帰着する。本稿ではポリトープの各頂点行列に対して求められたリアプノフ解から構成されるある行列をもとにして、行列ポリトープの Hurwitz 不変性が容易に検証できる一つのロバスト安定条件を提案するものである。

可能性分布間の相互関係を考慮したファジィ関係 の拡張とファジィ線形計画問題への応用*

乾 口 雅 弘**・久 米 靖 文**

Extensions of Fuzzy Relations Considering Interaction Between Possibility Distributions and an Application to Fuzzy Linear Program*

Masahiro INUIGUCHI** and Yasufumi KUME**

In this paper, a controversial point of previous definition of optimal or efficient solutions to mathematical programming problems with fuzzy objective functions is pointed out. As basis for settling the controversial point, the extension methods of fuzzy relations to the relations between interactive or dependent possibility distributions are proposed. Some properties of the extended fuzzy relations are investigated. Next, in order to illustrate the controversial point, a defect of a previous definition of optimal solutions, i. e., α -possibly efficient solutions is clarified and the definition is modified using one of proposed extended fuzzy relations. It is shown that the defect is dissolved by the modified definition.

1. はじめに

ファジィ意思決定法^{1~5}では、人間の知識の不明確さや評価のあいまいさを反映して、代替案の評価値を可能性分布^{5~7}で表現し、その優劣により決定を行なう。そのため、可能性分布を順序付ける方法が必要となり、さまざまな順序付け方法^{8,9}が提案されている。その中で、ファジィ数¹⁰の順序付けについては、DuboisとPrade⁵による四つの指標が適していることを、BortolanとDegani⁹は多くの例を基に報告している。また、多次元の可能性分布を取り扱うため、乾口¹¹は、DuboisとPradeの方法の拡張として、可能性分布間の選好関係を構成し、その性質を調べている。

一方、ファジィ数理計画法においても、決定変数により得られる目的空間上の可能性分布の順序付けに基づき、最適解、有効解を定義しようとするもの^{12~15}がある。従来、ファジィ数理計画法では、最適性の概念を扱ったものはほとんどなく、これらの研究は新たな動向を与え、非常に有意義である。しかし、目的空間上の可能性分布間の相互関係 (interaction)^{6,16,17}が考慮されていない

ため、必ずしも妥当であるとはいえない。すなわち、ファジィ意思決定法では、比較する可能性分布間に相互関係がないこと (non-interaction)^{6,16,17}あるいは、一方が他方に可能性独立¹⁶であることが、暗に仮定されている。しかし、ファジィ数理計画法では、比較する目的空間上の可能性分布が、同じ係数の可能性分布を通して求められ、可能性分布間に相互関係が存在する。したがって、ファジィ意思決定法における順序付け方法をそのまま適用することはできない。

本報告では、目的空間上の可能性分布の順序付けに基づき、ファジィ数理計画問題の最適解、有効解を定義するための基礎として、可能性独立である場合に有効な乾口¹¹の方法を、可能性独立でない場合にも適用できるように拡張し、その性質について述べる。最後に、ファジィ線形計画問題の最適解の定義¹³を修正し、修正前の定義と比較することにより、欠点が改善されていることを示す。

2. 可能性理論の準備

ファジィ集合の一つの解釈として、ファジィ集合を可能性分布とみなす解釈がある⁶。すなわち、ファジィ集合のメンバシップ値をその対象が生起する可能性の度合いと考えるのである。

ファジィ集合 $\tilde{A}$ を可能性分布として捕えたとき、 $\tilde{A}$

* 原稿受付 1989. 5. 27

** 大阪府立大学 工学部 University of Osaka Prefecture ;
Mozu-Umemachi, Sakai 591, JAPAN

Key Words : possibility distribution, interaction, possible independence, fuzzy relation, fuzzy linear programming.

のもとで、可能性測度 $\Pi_{\tilde{A}}$ 、必然性測度 $N_{\tilde{A}}$ が次のように定義される^{5-7, 10}.

$$\Pi_{\tilde{A}}(\tilde{B}) = \sup_x \{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad (1)$$

$$N_{\tilde{A}}(\tilde{B}) = \inf_x \{(1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad (2)$$

ただし、 $\mu_{\tilde{A}}$ は $\tilde{A}$ のメンバシップ関数、 $\tilde{B}$ は $\mu_{\tilde{B}}$ をメンバシップ関数とする任意のファジィ集合である。また、 $a \wedge b = \min(a, b)$, $a \vee b = \max(a, b)$ である。

確率について、同時確率、周辺確率、条件付確率が考えられるように、可能性分布についても、同時可能性分布、周辺可能性分布、条件付可能性分布が考えられる。Nguyen^{17, 18} は、公理的な立場で、同時可能性分布（周辺可能性分布）から条件付可能性分布を導いている。Hisdal¹⁶ は、Nguyen とは逆に、確率論と対比させながら、周辺可能性分布と条件付可能性分布から同時可能性分布を定義している。Nguyen の立場と Hisdal の立場は完全に一致するものではない。ここでは、比較的解釈しやすい Hisdal の考え方を適用する。

同時可能性分布 $\mu_{\tilde{A}, \tilde{B}}$ は、周辺可能性分布 $\mu_{\tilde{A}}(\mu_{\tilde{B}})$ 、条件付可能性分布 $\mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}(\mu_{\tilde{A}/\tilde{B}})$ を用いて、次のように表わされる[†].

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}, \tilde{B}}(x, y) &= \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}(y/x) \\ &= \mu_{\tilde{B}}(y) \wedge \mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}(x/y) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $\mu_{\tilde{A}, \tilde{B}}(x, y)$ は x が $\tilde{A}$ に属し、かつ、 y が $\tilde{B}$ に属す可能性を示し、 $\mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}(y/x)$ は $\tilde{A}$ に制限された変数が値 x をとるとき、 y が $\tilde{B}$ に属す可能性を示している。 $\mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}(x/y)$ についても同様である。

任意の x について

$$\mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}(y/x) = \mu_{\tilde{B}}(y) \quad (4)$$

が成立するとき、 $\tilde{B}$ は $\tilde{A}$ に可能性独立¹⁶ であるという。同様に、任意の y について、

$$\mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}(x/y) = \mu_{\tilde{A}}(x) \quad (5)$$

が成立するとき、 $\tilde{A}$ は $\tilde{B}$ に可能性独立であるという。

(4)、(5) 式のいずれかが成立するとき、(3) 式より、

$$\mu_{\tilde{A}, \tilde{B}}(x, y) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) \quad (6)$$

となるが、(6) 式が成立するとき、(4)、(5) 式のいずれかが成立するとはいえない。そこで、(6) 式が成立するとき、 $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ には相互関係がない (non-interactive) という。また、(4) 式が成立すること、(5) 式が成立することは等価でなく、(4)、(5) 式が同時に成立するとき、 $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ は (相互に) 可能性独立であるという。

† 本来ならば、可能性変数を用いて各可能性分布を表わすべきであるが、ここでは、簡単のため、ファジィ集合と同様な表記法を用いる。

同時可能性分布 $\mu_{\tilde{A}, \tilde{B}}$ が与えられたとき、周辺可能性分布 $\mu_{\tilde{A}}$, $\mu_{\tilde{B}}$ は、

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sup_y \mu_{\tilde{A}, \tilde{B}}(x, y) \quad (7)$$

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \sup_x \mu_{\tilde{A}, \tilde{B}}(x, y) \quad (8)$$

と定められる^{6, 16}。また、条件付可能性分布 $\mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}$, $\mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}$ は、(3) 式より、

$$\mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}(y/x) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}, \tilde{B}}(x, y); \\ \mu_{\tilde{A}}(x) > \mu_{\tilde{A}, \tilde{B}}(x, y) \\ [\mu_{\tilde{A}, \tilde{B}}(x, y), 1]; \\ \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}, \tilde{B}}(x, y) \end{cases} \quad (9)$$

$$\mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}(x/y) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}, \tilde{B}}(x, y); \\ \mu_{\tilde{B}}(y) > \mu_{\tilde{A}, \tilde{B}}(x, y) \\ [\mu_{\tilde{A}, \tilde{B}}(x, y), 1]; \\ \mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{\tilde{A}, \tilde{B}}(x, y) \end{cases} \quad (10)$$

となる。ここで、 $[\mu_{\tilde{A}, \tilde{B}}(x, y), 1]$ は、その区間内の任意の値をとってもさしさわりのないことを示している。このように、同時可能性分布から条件付可能性分布を唯一に定められない。

3. 非可能性独立な可能性分布間のファジィ選好関係

3.1 定義

乾口ら¹¹ は、一般的なファジィ意思決定問題を取り扱うための基礎として、要素間のファジィ選好関係 $\tilde{\mathcal{P}}$ を六つの可能性分布間の関係に拡張している。すなわち、“ $\tilde{A}$ を $\tilde{B}$ より可能的に選好することが可能である関係”、“ $\tilde{A}$ を $\tilde{B}$ より必然的に選好することが可能である関係”、“ $\tilde{A}$ を $\tilde{B}$ より可能的に選好することが必然である関係”、“ $\tilde{A}$ を $\tilde{B}$ より必然的に選好することが必然である関係”、“ $\tilde{B}$ が $\tilde{A}$ に可能的に選好されることが必然である関係”、“ $\tilde{B}$ が $\tilde{A}$ に必然的に選好されることが可能である関係”という意味からそれぞれ、次のように拡張している。

$$\begin{aligned} \mu_{\oplus \oplus \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \mu_{\oplus \oplus \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \\ &= \sup_{x, y} \{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, y)\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\oplus \cap \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sup_x \{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \inf_y \{(1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, y)\}\} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\cap \oplus \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \inf_x \{(1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \vee \sup_y \{\mu_{\tilde{B}}(y) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, y)\}\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\cap \cap \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \mu_{\cap \cap \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \\ &= \inf_{x, y} \{(1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \vee (1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, y)\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\boxplus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \\ = \inf_y \{(1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \sup_x \{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y)\}\} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\boxminus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \\ = \sup_y \{\mu_{\tilde{B}}(y) \wedge \inf_x \{(1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \vee \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y)\}\} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $\boxplus, \boxminus$ はそれぞれ、 $()$ 内の可能性分布の前者 (former), 後者 (latter) に基づき可能性 $\diamond$ を施すことを表わし、 $\boxplus, \boxminus$ はそれぞれ、 $()$ 内の可能性分布の前者, 後者に基づき必然性 $\square$ を施すことを表わしている。

また、 $\mu_{\tilde{\mathcal{F}}}$ は $\tilde{\mathcal{F}}$ のメンバシップ関数である。(11)~(16) 式は、拡張された関係のメンバシップ関数を示し、たとえば、 $\mu_{\boxplus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B})$ は $\boxplus \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{A}, \tilde{B})$ のメンバシップ値すなわち、“ $\tilde{A}$ が $\tilde{B}$ より可能的に選好することが可能である” 度合いを示している。(11), (14) 式の最初の等式は、“ $\tilde{A}$ を $\tilde{B}$ より可能的に選好することが可能である関係”と“ $\tilde{B}$ が $\tilde{A}$ に可能的に選好されることが可能である関係”、“ $\tilde{A}$ を $\tilde{B}$ より必然的に選好することが必然である関係”と“ $\tilde{B}$ が $\tilde{A}$ に必然的に選好されることが必然である関係”がそれぞれ等しいことを示している。これらの拡張では、 $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ が可能性独立であることが、暗に仮定されている。

さて、 $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ が可能性独立でない場合について考える。この際、 $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ のいずれを中心に考えているかを注意しなければならない。各拡張された選好関係の意味から、(12), (13) 式は $\tilde{A}$ を中心に考え、(15), (16) 式は $\tilde{B}$ を中心に考えていることがわかる。また、(11), (14) 式の最初の等式より、これらは $\tilde{A}, \tilde{B}$ のいずれを中心に考えてもよい。

まず、 $\tilde{A}$ を中心に考えると、 $\tilde{A}$ で制限された x について $\tilde{B}$ と比較するので、(11)~(14) 式に条件付可能性分布 $\mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}$ を用いて、

$$\begin{aligned} \mu_{\boxplus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \\ = \sup_{x, y} \{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}(y/x) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y)\} \\ = \sup_{x, y} \{\mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y)\} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\boxminus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \\ = \sup_x \{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \inf_y \{(1 - \mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}(y/x)) \vee \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y)\}\} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\boxplus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \\ = \inf_x \{(1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \vee \sup_y \{\mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}(y/x) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y)\}\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\boxminus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \\ = \inf_{x, y} \{(1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \vee (1 - \mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}(y/x)) \vee \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y)\} \\ = \inf_{x, y} \{(1 - \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y)) \vee \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y)\} \end{aligned} \quad (20)$$

となる。また、 $\tilde{B}$ を中心に考えると、(11), (14)~(16) 式に $\mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}$ を用いて、

$$\begin{aligned} \mu_{\boxplus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \\ = \sup_{x, y} \{\mu_{\tilde{B}}(y) \wedge \mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}(x/y) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y)\} \\ = \sup_{x, y} \{\mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y)\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\boxminus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \\ = \inf_{x, y} \{(1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee (1 - \mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}(x/y)) \vee \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y)\} \\ = \inf_{x, y} \{(1 - \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y)) \vee \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y)\} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\boxplus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \\ = \inf_y \{(1 - \mu_{\tilde{B}}(y)) \vee \sup_x \{\mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}(x/y) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y)\}\} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\boxminus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \\ = \sup_y \{\mu_{\tilde{B}}(y) \wedge \inf_x \{(1 - \mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}(x/y)) \vee \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y)\}\} \end{aligned} \quad (24)$$

となる。このように、 $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ が可能性独立でない場合にも、

$$\mu_{\boxplus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\boxplus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (25)$$

$$\mu_{\boxminus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\boxminus \tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (26)$$

が成立する。 $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ に相互関係がないとき、(17), (20) 式が (11), (14) 式に一致し、 $\tilde{B}$ が $\tilde{A}$ に可能性独立であれば、(18), (19) 式が (12), (13) 式に一致する。また、 $\tilde{A}$ が $\tilde{B}$ に可能性独立であれば、(23), (24) 式が (15), (16) 式に一致する。

(17)~(20), (23), (24) 式の相違を説明するため、同時可能性分布を表わすファジィ集合 $(\tilde{A}, \tilde{B})$ を $\mathbf{R}^2$ のクリスプ集合として、 $\tilde{\mathcal{F}}$ を通常の大小関係 $\geq$ つまり、

$$\mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y) = \begin{cases} 1; & x \geq y \\ 0; & x < y, \end{cases} \quad x, y \in \mathbf{R} \quad (27)$$

とした場合の図を Fig. 1~Fig. 6 に示す。なお、この場合、後に述べるように、条件付可能性分布は (9), (10) 式を満たす範囲でどのように定義しても、(17)~(20), (23), (24) 式のファジィ選好関係は不変であるが、簡単のため、

$$\mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}(x/y) = \mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}(y/x) = \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y) \quad (28)$$

とする。また、

$$G = \{(x, y)/x \geq y\} \quad (29)$$

$$G_x = \{y/x \geq y\}, \quad G_y = \{x/x \geq y\} \quad (30)$$

$$B_x = \{y/\mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}(y/x) = 1\} \quad (31)$$

$$A_y = \{x/\mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}(x/y) = 1\} \quad (32)$$

と定義しておく。

Fig. 1 では、 $G \cap (\tilde{A}, \tilde{B}) \neq \emptyset$ が成立する。たとえば、点 $(x, y) \in G \cap (\tilde{A}, \tilde{B})$ をとると、 $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1, \mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}(y) =$

Fig. 1 An illustration of $\mu_{\ast\ast\tilde{x}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$ Fig. 4 An illustration of $\mu_{\cap\cap\tilde{x}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$ Fig. 2 An illustration of $\mu_{\ast\cap\tilde{x}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$ Fig. 5 An illustration of $\mu_{\cap\ast\tilde{x}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$ Fig. 3 An illustration of $\mu_{\cap\ast\tilde{x}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$ Fig. 6 An illustration of $\mu_{\ast\cap\tilde{x}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$

1, $\mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y) = 1$ となり, $\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$ が成立することがわかる. このとき, “ $\tilde{A}$ が $\tilde{B}$ より可能的に大きいとか等しいことが可能である” といえる. Fig. 2 では, $B_x \subseteq G_x$ なる x が存在するので, $\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$ が成立する. このとき, “ $\tilde{A}$ が $\tilde{B}$ より必然的に大きいとか等しいことが可能である” といえる. Fig. 3 では, $x \in \tilde{A}$ なる任意の x について $B_x \cap G_x \neq \emptyset$ が成立するので, $\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$ となる. このとき, “ $\tilde{A}$ が $\tilde{B}$ より可能的に大きいとか等しいことが必然である” といえる. Fig. 4 では, $(\tilde{A}, \tilde{B}) \subseteq G$ が成立するので, $\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$ となる. このとき, “ $\tilde{A}$ が $\tilde{B}$ より必然的に大きいとか等しいことが必然である” といえる. Fig. 5 では, $y \in \tilde{B}$ なる任意の y について $A_y \cap G_y \neq \emptyset$ が成立するので, $\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$ となる. このとき, “ $\tilde{B}$ が $\tilde{A}$ より可能的に小さいとか等しいことが必然である” といえる. Fig. 6 では, $A_y \subseteq G_y$ なる y が存在するので, $\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$ となる. このとき, “ $\tilde{B}$ が $\tilde{A}$ より必然的に小さいとか等しいことが可能である” といえる.

3.2 諸性質

ここで, (17)~(20), (23), (24) 式の性質について述べる. 次の【命題1~4】は, 定義および, 可能性測度, 必然性測度の性質^{5,7,10,19} から容易に示せる.

【命題1】

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\sim\oplus\sim\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (33)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\sim\oplus\sim\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (34)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\sim\oplus\sim\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (35)$$

が成立する. ただし, $\sim\tilde{\mathcal{F}}$ は $\tilde{\mathcal{F}}$ の否定関係であり,

$$\mu_{\sim\tilde{\mathcal{F}}}(x, y) = 1 - \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(x, y) \quad (36)$$

と定義される.

【命題2】 $\sup_x \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ のとき, 次式が成立する.

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (37)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (38)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (39)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (40)$$

任意の x について, $\sup_y \mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}(y/x) = 1$ となるとき,

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (41)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (42)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (43)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (44)$$

が成立する.

$\sup_{x,y} \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y) = 1$ のとき, (37)~(40) 式および, 次式が成立する.

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (45)$$

また, $\sup_x \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 0.5$ のとき, 次式が成立する.

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (46)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (47)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (48)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (49)$$

任意の x について, $\sup_x \mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}(y/x) \leq 0.5$ となるとき,

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (50)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (51)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (52)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (53)$$

が成立する.

$\sup_{x,y} \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y) \leq 0.5$ のとき, 次式が成立する.

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B})$$

【命題3】

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (55)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (56)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (57)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (58)$$

が成立する. ただし, $\tilde{\mathcal{F}}^t$ は $\tilde{\mathcal{F}}$ の逆関係であり,

$$\mu_{\tilde{\mathcal{F}}^t}(x, y) = \mu_{\tilde{\mathcal{F}}}(y, x) \quad (59)$$

と定義される.

【命題1~3】の意味については, 文献¹¹ の【命題1, 3, 4, 6】の意味を参照されたい. これらの命題は, $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ が可能性独立でない場合にも成立することを示している. $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ が可能性独立である場合, 文献¹¹ に記されているように,

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (60)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (61)$$

が成立するが, $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ が可能性独立でない場合には, これらは一般に成立しない.

次の命題は, 拡張された関係がいずれも, 包含関係を保存していることを表わしている.

【命題4】 $\tilde{\mathcal{F}}_1 \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_2$ すなわち, $\mu_{\tilde{\mathcal{F}}_1}(x, y) \leq \mu_{\tilde{\mathcal{F}}_2}(x, y)$ であるとき, 次式が成立する.

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}_1}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}_2}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (62)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}_1}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}_2}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (63)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}_1}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}_2}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (64)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}_1}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}_2}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (65)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}_1}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}_2}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (66)$$

$$\mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}_1}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \mu_{\oplus\oplus\tilde{\mathcal{F}}_2}(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (67)$$

【命題5】 $x \asymp y$ なる任意の要素 x, y について, ファ

ジ選好関係 $\tilde{\mathcal{P}}$ が,

$$\mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, y) + \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(y, x) = 1 \quad (68)$$

を満たすものとする。任意の x について,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x_i, x) \leq \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, x) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, x_i) \quad (69)$$

となる x に収束する点列 $\{x_i\}$ が存在し, $\mu_{\tilde{\mathcal{P}}/\tilde{\mathcal{A}}}(\cdot/x)$ が下半連続であるとき, 次式が成立する。

$$\mu_{\Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}) = \mu_{\sim \cap \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{A}}) \quad (70)$$

$$\mu_{\cap \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}) = \mu_{\sim \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{A}}) \quad (71)$$

また, 任意の x について,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, x_i) \leq \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, x) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x_i, x) \quad (72)$$

となる x に収束する点列 $\{x_i\}$ が存在し, $\mu_{\tilde{\mathcal{P}}/\tilde{\mathcal{A}}}(\cdot/x)$ が下半連続であるとき, 次式が成立する。

$$\mu_{\cap \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}) = \mu_{\sim \cap \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{A}}) \quad (73)$$

$$\mu_{\cap \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}) = \mu_{\sim \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{A}}) \quad (74)$$

証明は, 文献¹¹の【命題7】と同様にできるので省略する。

文献¹¹に記されているように, 【命題1, 3】より, 【命題5】は否定関係と逆関係の拡張したものが一致するための十分条件を示している。すなわち, (70), (71) 式は,

$$\mu_{\Phi \circ \sim \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}) = \mu_{\Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}^t}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}) \quad (75)$$

$$\begin{cases} \mu_{\cap \Phi \circ \sim \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}) = \mu_{\cap \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}^t}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}) \\ \mu_{\cap \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}^t}(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{A}}) = \mu_{\cap \Phi \circ \sim \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{A}}) \end{cases} \quad (76)$$

と書け, (73), (74) 式は,

$$\begin{cases} \mu_{\Phi \cap \Phi \circ \sim \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}) = \mu_{\Phi \cap \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}^t}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}) \\ \mu_{\Phi \cap \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}^t}(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{A}}) = \mu_{\Phi \cap \Phi \circ \sim \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{A}}) \end{cases} \quad (77)$$

$$\mu_{\cap \Phi \circ \sim \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}) = \mu_{\cap \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}^t}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}) \quad (78)$$

と書ける。

たとえば, $\tilde{\mathcal{P}}$ を $\mathbf{R}^n$ の関係 $\leq$ とすると, $\tilde{\mathcal{P}}$ は (68), (69), (70) 式を満足する。したがって, 任意の x について $\mu_{\tilde{\mathcal{P}}/\tilde{\mathcal{A}}}(\cdot/x)$ が下半連続であるとき, (75)~(78) 式が成立する。ここで, $\sim \tilde{\mathcal{P}}$ が $\mathbf{R}^n$ と関係 $>$, $\tilde{\mathcal{P}}^t$ が $\mathbf{R}^n$ の関係 $\geq$ となることに注意すると, $\mu_{\tilde{\mathcal{P}}/\tilde{\mathcal{A}}}$, $\mu_{\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{B}}}$ が下半連続であるとき, 関係 $>$ を拡張したものと関係 $\geq$ を拡張したものが一致することがわかる。このとき, さらに $\mathbf{R}^n$ の関係 $\geq$, つまり,

$$x \geq y \Leftrightarrow x \geq y \text{ かつ } x \neq y, x, y \in \mathbf{R}^n \quad (79)$$

を考えると, 包含関係 $> \subseteq \geq \subseteq \geq$ が成立するので, 【命題4】より, 関係 $\geq$ を拡張したのも, 関係 $>$, $\geq$ を拡張したものと一致することがわかる。

なお, (70), (74) 式に対する $\mu_{\tilde{\mathcal{P}}/\tilde{\mathcal{A}}}$ の下半連続性の条

件は, $\mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}$ が下半連続であることに置き換えることができる。

2. で述べたように, 同時可能性分布 $\mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}$ が与えられたとき, 条件付可能性分布 $\mu_{\tilde{\mathcal{B}}/\tilde{\mathcal{A}}}$, $\mu_{\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{B}}}$ は一意に定義できない。 $\mu_{\Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}}$, $\mu_{\cap \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}}$ は同時可能性分布 $\mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}$ のみを用いて定められるが, ほかは周辺可能性分布と条件付可能性分布によって定義される。したがって, それらは一般に条件付可能性分布の定義に依存する。以下の【命題6, 7】は, 条件付可能性分布が (9), (10) 式を満たす範囲でどのように定義されようとも, 拡張された関係が不変であるための十分条件を表わしている。

【命題6】 同時可能性分布 $\mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}$ ($(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}) \neq \emptyset$) が与えられたとする。(7) 式で定義される周辺可能性分布を表わす $\tilde{\mathcal{A}}$ がクリスプ集合となるならば, (9) 式を満たす範囲で条件付可能性分布 $\mu_{\tilde{\mathcal{B}}/\tilde{\mathcal{A}}}$ をどのように定めようとも, (18), (19) 式で定められる $\Phi \cap \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}$, $\cap \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}$ は不変である。

同様に, (8) 式で定義される周辺可能性分布を表わす $\tilde{\mathcal{B}}$ がクリスプ集合となるならば, (10) 式を満たす範囲で条件付可能性分布 $\mu_{\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{B}}}$ をどのように定めようとも, (23), (24) 式で定められる $\cap \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}$, $\Phi \cap \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}$ は不変である。(証明) ここでは, $\tilde{\mathcal{A}}$ がクリスプ集合となるとき, (19) 式で定められる $\cap \Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}$ が不変であることを示す。ほかは同様に証明できるので, 省略する。

(9) 式より,

$$\begin{aligned} & \inf_x \{ (1 - \mu_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)) \vee \sup_y \{ \mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, y) \} \} \\ & \leq \mu_{\Phi \circ \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}) \\ & \leq \inf_x [(1 - \mu_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)) \vee \sup_{\substack{y \\ \mu_{\tilde{\mathcal{A}}}(x) > \mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}(x, y)}} \{ \mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, y) \}] \\ & \quad \vee \sup_{\substack{y \\ \mu_{\tilde{\mathcal{A}}}(x) = \mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}(x, y)}} \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, y) \end{aligned}$$

が成立する。 $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}) \neq \emptyset$ より, $\tilde{\mathcal{A}} \neq \emptyset$ となる。 $\tilde{\mathcal{A}}$ がクリスプ集合であることおよび, $\mu_{\tilde{\mathcal{A}}}(x) \geq \mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}(x, y)$ より,

$$\begin{aligned} & \inf_x \{ (1 - \mu_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)) \vee \sup_y \{ \mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, y) \} \} \\ & = \inf_{\substack{x \\ \mu_{\tilde{\mathcal{A}}}(x) = 1}} \sup_y \{ \mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, y) \} \\ & = \inf_x [(1 - \mu_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)) \vee \sup_{\substack{y \\ \mu_{\tilde{\mathcal{A}}}(x) > \mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}(x, y)}} \{ \mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, y) \} \\ & \quad \vee \sup_{\substack{y \\ \mu_{\tilde{\mathcal{A}}}(x) = \mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}(x, y)}} \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, y)] \\ & = \inf_{\substack{x \\ \mu_{\tilde{\mathcal{A}}}(x) = 1}} [\sup_{\substack{y \\ \mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}(x, y) < 1}} \{ \mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, y) \} \\ & \quad \vee \sup_{\substack{y \\ \mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}(x, y) = 1}} \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, y)] \\ & = \inf_{\substack{x \\ \mu_{\tilde{\mathcal{A}}}(x) = 1}} \sup_y \{ \mu_{(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, y) \} \end{aligned}$$

となる。したがって、(9) 式を満たす範囲で、 $\mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}$ をいかに定義しようとも、

$$\mu_{\mu \circ \tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \inf_{\mu_{\tilde{A}}(x)=1} \sup_y \{ \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{\Phi}}(x, y) \}$$

となる。

(証明終)

【命題 6】より、同時可能性分布を表すファジィ集合 $(\tilde{A}, \tilde{B})$ がクリスプ集合である場合、条件付可能性分布を (9), (10) 式を満たす範囲でどのように定めても、拡張された関係は同一であることがわかる。

【命題 7】同時可能性分布 $\mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}$ が与えられたとき、ある (9) 式を満たす条件付可能性分布 $\mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}$ に対して、 $\mu_{\mu \circ \tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq 0.5$ が成立するならば、 $\mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}$ を (9) 式を満たす範囲でどのように定義しようとも、 $\mu_{\mu \circ \tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B})$ の値は同一である。同様に、 $\mu_{\mu \circ \tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq 0.5$ が成立するならば、 $\mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}$ を (9) 式を満たす範囲でどのように定義しようとも、 $\mu_{\mu \circ \tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B})$ の値は同一である。

また、ある (10) 式を満たす条件付可能性分布 $\mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}$ に対して、 $\mu_{\mu \circ \tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq 0.5$ が成立するならば、 $\mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}$ を (10) 式を満たす範囲でどのように定義しようとも、 $\mu_{\mu \circ \tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B})$ の値は同一である。同様に、 $\mu_{\mu \circ \tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq 0.5$ が成立するならば、 $\mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}$ を (10) 式を満たす範囲でどのように定義しようとも、 $\mu_{\mu \circ \tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B})$ の値は同一である。

(証明) すべて同様に示せるので、ここでは、 $\mu_{\mu \circ \tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq 0.5$ が成立するとき、 $\mu_{\tilde{B}/\tilde{A}}$ を (9) 式を満たす範囲でどのように定義しても同一であることを示す。(9) 式より、

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{A}, \tilde{B}) &\triangleq \sup_x [\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \inf_{\substack{y \\ \mu_{\tilde{A}}(x) > \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y)}} \{ (1 - \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y)) \vee \mu_{\tilde{\Phi}}(x, y) \} \wedge \inf_{\substack{y \\ \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y)}} \mu_{\tilde{\Phi}}(x, y)] \\ &\leq \mu_{\mu \circ \tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \\ &\leq \sup_x \{ \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \inf_y \{ (1 - \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y)) \vee \mu_{\tilde{\Phi}}(x, y) \} \} \triangleq \bar{\mu}(\tilde{A}, \tilde{B}) \end{aligned}$$

が成立する。したがって、 $\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) = \bar{\mu}(\tilde{A}, \tilde{B})$ を示せばよい。 $\mu_{\mu \circ \tilde{\Phi}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq 0.5$ より、 $\bar{\mu}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq 0.5$ となる。したがって、 $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y)$ より、

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sup_{\substack{x \\ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0.5}} \{ \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \inf_y \{ (1 - \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y)) \vee \mu_{\tilde{\Phi}}(x, y) \} \} \\ &\leq \sup_{\substack{x \\ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0.5}} \{ \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \inf_y \{ (1 - \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y)) \vee \mu_{\tilde{\Phi}}(x, y) \} \} \end{aligned}$$

† ファジィ数 $\tilde{c}_i$ とは、次の三つの条件を満たす R のファジィ集合である。

- i) $\mu_{\tilde{c}_i}$ が上半連続である。
- ii) $\mu_{\tilde{c}_i}(\tilde{r}_i) = 1$ なる $\tilde{r}_i$ が存在する。
- iii) $\mu_{\tilde{c}_i}$ が準凹関数である。

$$\begin{aligned} &= \sup_{\substack{x \\ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0.5}} [\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \inf_{\substack{y \\ \mu_{\tilde{A}}(x) > \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y)}} \{ (1 - \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y)) \vee \mu_{\tilde{\Phi}}(x, y) \} \\ &\quad \wedge \{ (1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \vee \inf_{\substack{y \\ \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y)}} \mu_{\tilde{\Phi}}(x, y) \}] \geq 0.5 \end{aligned}$$

となる。 $\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge (1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \leq 0.5$ より、

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sup_{\substack{x \\ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0.5}} [\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \inf_{\substack{y \\ \mu_{\tilde{A}}(x) > \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y)}} \{ (1 - \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y)) \vee \mu_{\tilde{\Phi}}(x, y) \} \\ &\quad \wedge \inf_{\substack{y \\ \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{(\tilde{A}, \tilde{B})}(x, y)}} \mu_{\tilde{\Phi}}(x, y)] \\ &\leq \mu(\tilde{A}, \tilde{B}) \end{aligned}$$

となる。ゆえに、 $\underline{\mu}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \bar{\mu}(\tilde{A}, \tilde{B})$ が成立する。

(証明終)

4. ファジィ線形計画問題への応用

本章では、前章で拡張したファジィ関係を、目的関数の係数をファジィ数とする線形計画問題の最適解の定義に用い、従来の最適解の定義の欠点が改善されていることを示す。

ここで取り扱うファジィ線形計画問題は、

$$\text{maximize } \tilde{c}x \quad (80)$$

制約条件

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (81)$$

と表わされる。ただし、 A は $m \times n$ 行列、 $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n)$ 、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ 、 $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^t$ で、 $\tilde{c}_i$ は $\mu_{\tilde{c}_i}$ をメンバシップ関数とするファジィ数[†]である。また、各ファジィ数 $\tilde{c}_i$ は相互に可能性独立であり、 $\tilde{c}x$ は拡張原理¹⁰により求められるものとする。すなわち、

$$\mu_{\tilde{c}x}(y) = \sup_{y = \sum_{i=1}^n c_i x_i} \prod_{i=1}^n \mu_{\tilde{c}_i}(c_i) \quad (82)$$

となる。 $\mu_{\tilde{c}x}$ は $\tilde{c}x$ のメンバシップ関数である。

(80), (81) 式に対する解の概念として、 α -可能的有効解¹³が考えられている。 α -可能的有効解は、 α -可能的支配関係¹³を用いて、次のように定義される。すなわち、

$$\begin{aligned} \text{Poss}(\tilde{c}x^0 \geq \tilde{c}x^1) &\triangleq \sup_{\substack{y, z \\ y \geq z}} \{ \mu_{\tilde{c}x^0}(y) \wedge \mu_{\tilde{c}x^1}(z) \} \geq \alpha \end{aligned} \quad (83)$$

が成立するとき、 x^0 は x^1 を α -可能的支配するといい、 x^0 が α -可能的有効解であることは、 x^0 を α -可能的支配する、 x^0 でない実行可能解が存在しないことである。

(83) 式は、 $\tilde{\Phi}$ を通常の大小関係 $\geq$ とし、 $\tilde{A} = \tilde{c}x^0$ 、 $\tilde{B} = \tilde{c}x^1$ とし、 $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ の相互関係を無視した場合、

$\mu_{\alpha \oplus \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \alpha$ と等価である。ここで、 $\mu_{\alpha \oplus \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{A}, \tilde{B})$ は (11) 式で定義されるものである。

$\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0$ と $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1$ はいずれも、 $\tilde{\mathbf{c}}$ を介して得られるので、これらには必ず相互関係が存在する。(83) 式の定義では、先に述べたように、 $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0$ と $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1$ の相互関係が無視されている。このことより、次のような欠点が生じる。

【欠点】 (81) 式の制約領域の内点が存在するとき、各ファジィ数 $\tilde{c}_i$ のメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{c}_i}$ が $\mu_{\tilde{c}_i}(\hat{r}_i) = 1$ なる $\hat{r}_i$ で連続であるならば、任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して α -可能的有効解が存在しない。

(証明) $\mu_{\tilde{c}_i}$ の $\mu_{\tilde{c}_i}(\hat{r}_i) = 1$ なる $\hat{r}_i$ での連続性より、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $|r_i - \hat{r}_i| < \delta_1$ ならば、 $|\mu_{\tilde{c}_i}(r_i) - \mu_{\tilde{c}_i}(\hat{r}_i)| = 1 - \mu_{\tilde{c}_i}(r_i) < \varepsilon$ となるが δ_1 が存在する。任意の $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^t$ について、 $|y - \sum_{i=1}^n \hat{r}_i x_i^0| < \delta_2 \leq \delta_1 \sum_{i=1}^n x_i^0$ なる任意の y は、 $|r_i - \hat{r}_i| < \delta_1$ なる r_i を用いて $y = \sum_{i=1}^n r_i x_i^0$ と表わせるので、(82) 式より、 $1 - \mu_{\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0}(y) < \varepsilon$ が成立する。また、 $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{r}_1, \hat{r}_2, \dots, \hat{r}_n)$ とすると、 $|\hat{\mathbf{r}}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{r}}\mathbf{x}^0| < \delta_2$ なる実行可能解 $\mathbf{x}$ が、制約領域に内点が存在することより、存在するので、(83) 式より、 $\text{Poss}(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x} \geq \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0) > 1 - \varepsilon$ となる。 ε は任意であったから、任意の $\mathbf{x}^0$ について $|\hat{\mathbf{r}}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{r}}\mathbf{x}^0| < \delta_2$ なる $\mathbf{x}$ を選べば、 $\text{Poss}(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x} \geq \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0) \geq 1$ となる。ゆえに、任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して α -可能的有効解が存在しない。(証明終)

この欠点により、たとえば、各 $\tilde{c}_i$ が連続なメンバシップ関数をもつ場合、常に α -可能的有効解が存在しない。

また、(83) 式では、反射的な大小関係 $\geq$ を拡張したものを用いているため、 $\tilde{\mathbf{c}}$ が通常の実数ベクトルである場合でも、 α -可能的有効解は通常的最適解と一致しない。たとえば、通常線形計画問題で複数の最適解が存在する場合は、任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して α -可能的有効解が存在しない。 α -可能的有効解を通常的最適解の拡張として定義するためには、非反射的な大小関係 $>$ を拡張したものを用いるべきである。

この欠点に対し、文献¹⁵のように、

$$\text{Poss}(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0 \geq \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1) \triangleq \sup_{\substack{y, z \\ y \geq z}} \{ \mu_{\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0}(y) \wedge \mu_{\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1}(z) \} \leq \alpha \quad (84)$$

なる $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$ が存在しないとき、 $\mathbf{x}^0$ を α -可能的有効解と定義直す方法が考えられる[†]。このように定義すれ

ば、 α -可能的有効解が存在しないという欠点は解消され、しかも通常の線形計画問題で複数の最適解が存在する場合にも適用できる。しかし、(84) 式は、

$$\inf_{\substack{y, z \\ y \geq z}} \{ (1 - \mu_{\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1}(z)) \vee (1 - \mu_{\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0}(y)) \} \geq 1 - \alpha \quad (85)$$

となり、(85) 式の左辺は、 $\tilde{\mathcal{P}}$ を通常の大小関係 $>$ とし、 $\tilde{A} = \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1$, $\tilde{B} = \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0$ とし、 $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ の相互関係が無視した場合の $\mu_{\text{max} \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{A}, \tilde{B})$ に等しい。すなわち、(83) 式における可能性が、(84) 式の定義では、必然性に置き換えられていることがわかる。したがって、(83) 式による定義と (84) 式の定義では、解の概念が根本的に異なっている。また、(84) 式の定義においても、 $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0$ と $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1$ の相互関係が無視されていることに注意しなければならない。

以下では、 $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0$ と $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1$ の相互関係に注意し、大小関係 $>$ を拡張したものを用いて、解の概念が根本的に異ならないように、 α -可能的有効解の定義を修正する。

まず、 $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0$ と $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1$ の同時可能性分布 $\mu(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0, \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1)$ を定義する。拡張原理¹⁰ より、同時可能性分布 $\mu(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0, \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1)$ は、

$$\mu(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0, \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1)(y, z) = \sup_{\substack{y = \sum_{i=1}^n c_i x_i^0 \\ z = \sum_{i=1}^n c_i x_i^1}} \bigwedge_{i=1}^n \mu_{\tilde{c}_i}(c_i) \quad (86)$$

と定義できる。すなわち、 $\mu(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0, \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1)(y, z)$ は目的関数が $\mathbf{x}^0$ で値 y をとり、 $\mathbf{x}^1$ で値 z をとる最大の度合いを示している。このとき、

$$\sup_z \mu(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0, \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1)(y, z) = \mu_{\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0}(y) \quad (87)$$

$$\sup_y \mu(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0, \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1)(y, z) = \mu_{\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1}(z) \quad (88)$$

となり、(86) 式の定義は、(7)、(8) 式および (82) 式に矛盾しないことがわかる。

同時可能性分布が定められると、(17) 式で定義される相互関係を考慮した関係 $\Phi \oplus \tilde{\mathcal{P}}$ を用いて、 α -可能的有効解の定義が次のように修正される。すなわち、

$$\mu_{\alpha \oplus \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0, \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1) \geq \alpha \quad (89)$$

が成立するとき、 $\mathbf{x}^0$ は $\mathbf{x}^1$ を α -可能的支配するといい、 $\mathbf{x}^0$ が α -可能的有効解であるとは、 $\mathbf{x}^0$ を α -可能的支配する実行可能解が存在しないことである。ただし、 $\tilde{\mathcal{P}}$ は大小関係 $>$ である。したがって、

$$\mu_{\alpha \oplus \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0, \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1) = \sup_{y > z} \mu(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0, \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1)(y, z) \quad (90)$$

となる。

ここで、修正された α -可能的有効解が、Luhandjula により定義されている α -可能的最適解²⁰ と一致することを示す^{††}。 α -可能的最適解とは、 α -可能的有効解と異なり、目的空間上のファジィ集合 $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0$ と $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1$ の支配関係を議論するのではなく、直接、決定空間上の2点 $\mathbf{x}^0$

† この方法は査読者により指摘されたものであり、ここに謝意を表します。

†† Luhandjula は、当初 α -可能的有効解を定義したが、その後直ちに、 α -可能的最適解を定義している。以後、多目的の場合に α -可能的最適解の概念を拡張したもの^{20, 21} を用い、 α -可能的有効解の概念を拡張したものを用いていない。このことから、Luhandjula も α -可能的有効解の欠点に気付いているかもしれない。

と $\mathbf{x}^1$ の支配関係を拡張原理¹⁰を用いて定義することにより、導き出される最適解の概念である。すなわち、

$$\sup_{\substack{\sum_{i=1}^n c_i x_i > \sum_{i=1}^n c_i x_i^0}} \bigwedge_{i=1}^n \mu_{\tilde{c}_i}(c_i) \geq \alpha \quad (91)$$

なる実行可能解 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ が存在しないような解 $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^t$ を α -可能的最適解という。

(86) 式を (90) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha\text{-Poss}}(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0, \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1) &= \sup_{\mathbf{y} > \mathbf{z}} \sup_{\substack{\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n c_i x_i^0 \\ \mathbf{z} = \sum_{i=1}^n c_i x_i^1}} \bigwedge_{i=1}^n \mu_{\tilde{c}_i}(c_i) \\ &= \sup_{\substack{\sum_{i=1}^n c_i x_i^0 > \sum_{i=1}^n c_i x_i^1}} \bigwedge_{i=1}^n \mu_{\tilde{c}_i}(c_i) \end{aligned} \quad (92)$$

となり、修正された α -可能的有効解が α -可能的最適解と一致することは明らかである。

最後に、修正された α -可能的有効解において、先に述べた欠点が改善されていることを次の数値例により示す。

【数値例】 次のファジィ (区間) 線形計画問題を考える。

$$\text{maximize } \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 \quad (93)$$

制約条件

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ 4x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (94)$$

ただし、 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ は相互に可能性独立であり、いずれも、ファジィ数の特殊な場合である区間 $[2, 4]$ とする。

このとき、(90) 式より、 $\mu_{\alpha\text{-Poss}}(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0, \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1) > 0$ となるための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} \exists c_1 \in [2, 4], \exists c_2 \in [2, 4], \\ c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 > c_1 x_1^1 + c_2 x_2^1 \end{aligned} \quad (95)$$

が成立することである。Fig. 7 に示すように、 $c_1 \in [2, 4]$ 、 $c_2 \in [2, 4]$ なる任意の (c_1, c_2) について、(94) 式のもとでの

$$\text{maximize } c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (96)$$

の最適解は $(x_1, x_2) = (4, 4)$ となる。したがって、 $\mathbf{x}^0 = (4, 4)$ とおくと、 $\mu_{\alpha\text{-Poss}}(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0) > 0$ なる実行可能解 $\mathbf{x}$ は存在しない。ゆえに、 $\mathbf{x}^0 = (4, 4)$ は任意の $\alpha > 0$ に対して、 α -可能的有効解となる。

他方、修正前すなわち (83) 式に基づく α -可能的有効解の場合を考察する。そのため、 $\mathbf{x}^0 = (4, 4)$ に対し、 $\mathbf{x}^1 = (0, 5)$ として、 $\text{Poss}(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1 \geq \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0)$ の値を考えてみる。このとき、 $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1 = [10, 20]$ 、 $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0 = [16, 32]$ となり、(83) 式における $\text{Poss}(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1 \geq \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0)$ では、これらの区間内の値のすべての組み合わせを考慮する (このことが相

Fig. 7 A numerical example of the α -possible efficient solution

互関係を無視していることを表す) ので、 $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1$ の実現値が 20、 $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0$ の実現値が 16 という組み合わせが考えられる。明らかに、 $20 \geq 16$ であるので、 $\text{Poss}(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1 \geq \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0) = 1 \geq \alpha$ が成立する。したがって、 $\mathbf{x}^0 = (4, 4)$ は α -可能的有効解ではない。さらに、この場合、 $\mu_{\tilde{c}_i}(3) = 1$ ($i = 1, 2$) で、 $\mu_{\tilde{c}_i}(i = 1, 2)$ は 3 で連続であるので、 α -可能的有効解が存在しないことがわかる。

ところで、先の例において、 $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1$ の実現値が 20、 $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0$ の実現値が 16 となる場合を考える。 $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1$ の実現値が 20 となるためには、 $\tilde{c}_2$ の実現値が 4 でなければならない。また、 $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0$ の実現値が 16 となるのは、 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ の実現値が共に 2 の場合に限る。これら双方の $\tilde{c}_2$ の実現値が等しくないことより、 $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1$ の実現値が 20 で、 $\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0$ の実現値が 16 という組み合わせは、実現しえない。すなわち、(83) 式の $\text{Poss}(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1 \geq \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0)$ では、実現しえない組み合わせまで考えているので、必ずしも合理的であるとはいえない。したがって、(83) 式に基づく α -可能的有効解の定義および、 $\text{Poss}(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1 \geq \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0)$ を用いている (84) 式による定義は、必ずしも合理的ではない。一方、可能性分布間の相互関係を考慮した $\mu_{\alpha\text{-Poss}}(\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^1, \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}^0)$ を用いる (89) 式による定義では、(86) 式の同時可能性分布より明らかのように、実現しない値の組み合わせは除外され、実現しうる組み合わせのみを考慮している。したがって、(89) 式による定義は合理的であると考えられる。

上述のように、修正された α -可能的有効解においては、修正前の α -可能的有効解の欠点が改善されており、可能性分布間の相互関係が考慮されているので、合理的であると考えられる。

おわりに

係数をファジィ数とする目的関数をもつ数理計画問題

の解の概念を定義するための基礎として、可能性分布間の相互関係を考慮した場合のファジィ関係の拡張とその性質について述べた。また、拡張された関係を用いて、ファジィ線形計画問題に対する α -可能的有効解の定義を修正し、修正前の α -可能的有効解の欠点が改善されていることを示した。

ここで拡張された関係は、ファジィ数値計画法のみならず、可能性分布間に相互関係が存在する場合のファジィ意思決定法や、ファジィリレーショナルデータベースに対しても有用であると考えられる。

また、解の概念の定義に $\Phi \diamond \tilde{P}$ のみを用いたが、これ以外に、 $\Phi \tilde{P}$, $\tilde{P} \diamond \Phi$, $\tilde{P} \tilde{P}$, $\tilde{P} \Phi$, $\Phi \tilde{P}$ を用いる定義が考えられる。しかし、 $\Phi \tilde{P}$, $\tilde{P} \diamond \Phi$, $\tilde{P} \tilde{P}$, $\Phi \tilde{P}$ を用いる場合は、同時可能性分布から条件付可能性分布をいかに定めるかが問題となる。これは、今後の課題である。

ファジィ数値計画問題に対して、最適解、有効解を定義する方法として、次の三つが考えられる。すなわち、通常の最適解、有効解の概念を直接拡張する方法^{22, 23}、目的空間上の要素間の関係から構成される決定空間上の関係を用いて定義する方法^{20, 21}、そして、本研究のように、目的空間上のファジィ集合間の関係を構成することにより定義する方法である。これらは、体系的に研究されていないのが現状である。今後、この研究がなされ、種々の解の概念が整理され、意思決定者の嗜好を反映した豊富な意思決定方式が提供されることが、期待される。

参 考 文 献

- 1) S. R. Watson, J. J. Weiss & M. L. Donnell : Fuzzy Decision Analysis ; IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 9, No. 1, pp. 1~9 (1979)
- 2) J. F. Baldwin & N. C. F. Guild : Comparison of Fuzzy Sets on the Same Decision Space ; Fuzzy Sets and Syst., Vol. 2, pp. 213~231 (1979)
- 3) D. Dubois & H. Prade : Decision-Making under Fuzziness ; Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, (M. M. Gupta, R. K. Ragade & R. R. Yager, eds) North Holland, pp. 279~303 (1979)
- 4) 田中, 和多田, 浅居 : ファジィ集合による多属性代替案の評価 ; システムと制御, 27 巻, 6 号, pp. 403~409 (1983)
- 5) D. Dubois & H. Prade : Ranking Fuzzy Numbers in the Setting of Possibility Theory ; Inform. Sci., Vol. 30, pp. 183~224 (1983)
- 6) L. A. Zadeh : Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility ; Fuzzy Sets and Syst., Vol. 1, pp. 3~28 (1978)
- 7) D. Dubois & H. Prade : Possibility Theory : An Approach to Computerized Processing of Uncertainty, Plenum Press (1988)
- 8) S. H. Chen : Ranking Fuzzy Numbers with Maximizing Set and Minimizing Set ; Fuzzy Sets and Syst., Vol. 17, pp. 113~129 (1985)
- 9) G. Bortolan & R. Degani : A Review of Some Methods for Ranking Fuzzy Subsets ; Fuzzy Sets and Syst., Vol. 15, pp. 1~19 (1985)
- 10) D. Dubois & H. Prade : Fuzzy Numbers : An Overview ; Analysis of Fuzzy Information, Vol. I : Mathematics and Logic, (J. C. Bezek, ed.) CRC Press, pp. 3~39 (1987)
- 11) 乾口, 市橋, 田中 : 様相概念に基づくファジィ選好関係の拡張とその性質 ; 計測自動制御学会論文集, 24 巻, 7 号, pp. 738~745 (1988)
- 12) S. A. Orlovski : Multiobjective Programming Problems with Fuzzy Parameters ; Control and Cybernetics, Vol. 13, No. 3, pp. 175~183 (1984)
- 13) M. K. Luhandjula : On Possibilistic Linear Programming ; Fuzzy Sets and Syst., Vol. 18, pp. 15~30 (1986)
- 14) 坂和, 矢野 : ファジィパラメータを含む多目的線形計画問題に対する統一のアプローチ ; 電子情報通信学会論文誌, J 71-A 巻, 8 号, pp. 1569~1575 (1988)
- 15) 坂和, 矢野, 高橋 : ファジィパラメータを含む多目的線形計画問題に対する拡張パレート最適性の概念とその性質 ; 電子情報通信学会論文誌, J 72-A 巻, 4 号, pp. 678~684 (1989)
- 16) E. Hisdal : Conditional Possibilities Imdependence and Noninteraction ; Fuzzy Sets and Syst., Vol. 1, pp. 283~297 (1978)
- 17) H. T. Nguyen : On Conditional Possibility Distributions ; Fuzzy Sets and Syst., Vol. 1, pp. 299~309 (1978)
- 18) H. T. Nguyen : Toward a Calculus of the Mathematical Notion of Possibility ; Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, (M. M. Gupta, R. K. Ragade & R. R. Yager, eds) North Holland, pp. 235~246 (1979)
- 19) R. R. Yager : Some Relationships between Possibility, Truth and Certainty ; Fuzzy Sets and Systems, Vol. 11, pp. 151~156 (1983)
- 20) M. K. Luhandjula : Linear Programming with a Possibilistic Objective Function ; European J. Oper. Res., Vol. 31, pp. 110~117 (1987)
- 21) M. K. Luhandjula : Multiple Objective Programming Problems with Possibilistic Coefficients ; Fuzzy Sets and Syst., Vol. 21, pp. 135~145 (1987)
- 22) G. R. Bitran : Linear Multiple Objective Problems with Interval Coefficients ; Management Sci., Vol. 26, No. 7, pp. 694~706 (1980)
- 23) 乾口, 久米 : 区間多目的線形計画問題に対する可能的有効端点判別法 ; 計測自動制御学会論文集, 25 巻, 7 号, pp. 824~826 (1989)