Dempster-Shafer 理論における巨視的な情報測度について*

乾 口 雅 弘**・前 川 裕***・久 米 靖 文**

On a Global Measure of Information in Dempster and Shafer's Theory*

Masahiro INUIGUCHI**, Yutaka MAEKAWA*** and Yasufumi KUME**

Two types of ambiguity are recognizable in Dempster and Shafer's theory of evidence. One is the ambiguity of the system itself and the other is the ambiguity of human knowledge or information about the system. In this paper, from this point of view, the property for measuring the ambiguity of the system and the property for measuring the ambiguity of human knowledge or information are discussed. A global measure of information which satisfies both of these properties is proposed. The unicity of the proposed measure is proved when it must be an extension of Shannon entropy. The soundness of this measure of information is confirmed by a simple experiment.

1. はじめに

近年, Shannon のエントロピーに代表される情報測度の概念が, ファジィ集合理論¹⁾, 可能性理論²⁾, Dempster と Shafer の証拠理論^{3), 4)} に導入され, 種々の情報測度^{5)~8)} が提案されている. Klir ら^{5), 6)} は, 不確かさ (uncertainty) の様相を分類し, 種々の情報測度を位置付け, それらの基礎となる理論を示している. これらの情報測度は, 従来の確率理論における種々のエントロピー⁹⁾ とは異なり, 不確かさのさまざまな局面を捕らえている.

確率論の拡張である Dempster と Shafer の証拠理論は, 不確かさ (uncertainty) のうち不明確さ (ambiguity) を扱う理論であり⁵⁾, 不明確さの三つの局面を表わす, 不一致, 混述, 不特定に関する情報測度^{5)~8)} が提案されている. これらの測度は, 不明確さの各局面をうまく表現しているが, 全体的な意味での不明確さを表わす測度としては適当ではない. したがって, 全体的な不明確さを比較する場合, これらの測度を単独で用いるこ

とは妥当ではない. また, これらの測度の複数をを用い, ベクトル値として評価しても, 半順序構造をひきおこし, 比較不可能となる場合が多い.

Lamata と Moral⁸⁾ は, 全体的な不明確さを表わす情報測度 (以後, 巨視的な情報測度と呼ぶ) として, 下界エントロピー, 上界エントロピーと呼ばれる二つの測度を提案している. これらの測度は, 不一致と不特定を表わす情報測度の和として定義されている. また, 彼らは巨視的な情報測度が満たすべき四つの性質を掲げている. 下界エントロピー, 上界エントロピーは, これらの性質を満足しているが, 不一致と不特定を表わす情報測度の和として定義されなければならない理由が明らかではない.

証拠理論が確率論と異なる点は, 無知量が扱えることである. したがって, 証拠理論では, 確率論で主として扱う対象とする系 (システム) 自体に内在する不明確さに加えて, 人間の系に対する知識, 情報における不明確さをも扱っていると考えられる. 後に述べるように, 系自体の不明確さは不一致の測度に関係し, 人間の知識, 情報における不明確さは不特定の測度に関係している.

本研究では, 証拠理論において, 対象とする系自体の不明確さと, 人間の系に対する知識, 情報の不明確さが取り扱われているという考え方にに基づき, 新たな巨視的な情報測度を提案する. また, 提案された情報測度の性質を吟味する. 最後に, 簡単な実験により, 提案された巨視的な情報測度の妥当性を検討する.

* 原稿受付 1990. 8. 28

** 大阪府立大学 工学部 University of Osaka Prefecture, College of Engineering ; Mozu-Umemachi, Sakai 591, JAPAN

*** ミノルタカメラ機情報システム部 Minolta Camera Co., Ltd. ; Azuchimachi, Chuo-ku, Osaka 541, JAPAN

Key Words : measure of information, Dempster and Shafer's theory of evidence, ambiguity, body of evidence, global measure of information.

2. 証拠理論における種々の情報測度

2.1 Dempster と Shafer の証拠理論

Dempster と Shafer の証拠理論^{3),4)}では、通常の確率に適さない主観にかかわる不確実性を扱うため、全体集合の各要素ではなく、部分集合に確率を割り当てている。各部分集合に割り当てる確率を定める関数 $m: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ は、基本割当てと呼ばれ、次の条件 (i)~(iii) を満足する。

- (i) $0 \leq m(A) \leq 1, A \subseteq X$
- (ii) $m(\phi) = 0, \phi$ は空集合である。
- (iii) $\sum_{A \subseteq X} m(A) = 1$

ただし、 $\mathcal{P}(X)$ は X のべき集合である。 $m(A)$ は X の部分集合 A に割り当てられた確率を示し、 A 内の各点を自由に動ける半可動確率質量と考えられている^{3),4)}。 $m(A) > 0$ なる X の部分集合 A を焦点要素と呼び、その集合を $\mathcal{F}$ と記す。焦点要素の集合 $\mathcal{F}$ と基本割当て m の対 $(\mathcal{F}, m)$ を証拠の体と呼ぶ、とくに、すべての焦点要素 A が単集合であるとき、 $(\mathcal{F}, m)$ は通常の確率分布を表わす。なお、 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ と仮定している。

証拠の体 $(\mathcal{F}, m)$ が与えられると、belief 測度 (Bel), plausibility 測度 (Pl) は、次のように定義される。

$$\text{Bel}(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \quad (1)$$

$$\text{Pl}(A) = \sum_{B \cap A \neq \phi} m(B) \quad (2)$$

明らかに、

$$\text{Bel}(A) \leq \text{Pl}(A), \forall A \subseteq X \quad (3)$$

が成立する。とくに、焦点要素がすべて単集合である、すなわち、 $(\mathcal{F}, m)$ が通常の確率分布を表わすとき、

$$\text{Pr}(A) = \text{Bel}(A) = \text{Pl}(A), \forall A \subseteq X \quad (4)$$

となる。ただし、 $\text{Pr}(A)$ は A の確率測度である。

いま、直積空間 $X \times Y$ 上に証拠の体 $(\mathcal{F}, m)$ が与えられたとする。すなわち、基本割当て m は、

$$m: \mathcal{P}(X \times Y) \rightarrow [0, 1] \quad (5)$$

となる。また、各焦点要素は $X \times Y$ 上の二項関係 R となる。 R の X, Y への射影をそれぞれ、 R_x, R_y とすると、

$$R_x = \{x \in X \mid \exists y, (x, y) \in R\} \quad (6)$$

$$R_y = \{y \in Y \mid \exists x, (x, y) \in R\} \quad (7)$$

と書ける。このとき、 m の X, Y への射影をそれぞれ次のように定義できる。

$$m_x(A) = \sum_{R: A=R_x} m(R), \forall A \subseteq X \quad (8)$$

$$m_y(B) = \sum_{R: B=R_y} m(R), \forall B \subseteq Y \quad (9)$$

m_x, m_y は周辺基本割当てと呼ばれ、それらに付随する証拠の体をそれぞれ、 $(\mathcal{F}_x, m_x), (\mathcal{F}_y, m_y)$ と記す。

$\forall A \in \mathcal{F}_x, \forall B \in \mathcal{F}_y$ について

$$m(A \times B) = m_x(A) \cdot m_y(B) \quad (10)$$

$$m(R) = 0, \forall R \neq A \times B \quad (11)$$

が成立するとき、 $(\mathcal{F}_x, m_x)$ と $(\mathcal{F}_y, m_y)$ には、乗算に関して相互関係がないという。

“ P は犬である” という証拠は “ P は動物である” という証拠を含んでいる。このような証拠の包含関係を Delgado と Moral¹⁰⁾ は、次のように証拠理論の枠組みに表現している。

すなわち、 X 上の二つの証拠の体 $(\mathcal{F}_1, m_1), (\mathcal{F}_2, m_2)$ が与えられたとする。このとき、任意の $A \subseteq X$ について、

$$m_1(A) = \sum_{B: B \subseteq A} t_A(B), \forall A \subseteq X \quad (12)$$

$$m_2(B) = \sum_{A: B \subseteq A} t_A(B), \forall B \subseteq X \quad (13)$$

なる写像 $t_A: \mathcal{P}(A) \rightarrow [0, 1]$ が存在すれば、 $(\mathcal{F}_1, m_1)$ は $(\mathcal{F}_2, m_2)$ に含まれるといい、 $(\mathcal{F}_1, m_1) \subseteq (\mathcal{F}_2, m_2)$ と記す。

Delgado と Moral¹⁰⁾ は、証拠の体を情報として捕え、包含関係を上述のように定義したが、Dubois と Prade¹¹⁾ は、証拠の体を集合として捕え、上述の定義と等価な包含関係を定義している。ただし、Dubois と Prade は集合として証拠の体を捕えているため、上述の定義とは包含関係の向きが異なっている。

(12), (13) 式の意味を明らかにするため、 $(\mathcal{F}_1, m_1) \subseteq (\mathcal{F}_2, m_2)$ が成立する次の例を考える。

(例1) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 上の二つの証拠の体 $(\mathcal{F}_1, m_1), (\mathcal{F}_2, m_2)$ を考える。

$$\mathcal{F}_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

$$m_1(A_1) = 0.3, m_1(A_2) = 0.2, m_1(A_3) = 0.1, m_1(A_4) = 0.4$$

$$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, A_2 = \{x_2, x_3, x_4\}$$

$$A_3 = \{x_1, x_2\}, A_4 = \{x_2, x_3\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$$

$$m_2(B_1) = 0.2, m_2(B_2) = 0.2, m_2(B_3) = 0.2$$

$$m_2(B_4) = 0.1, m_2(B_5) = 0.2, m_2(B_6) = 0.1$$

$$B_1 = \{x_1, x_3, x_4\}, B_2 = \{x_3, x_4\}, B_3 = \{x_2, x_3\}$$

$$B_4 = \{x_3\}, B_5 = \{x_2\}, B_6 = \{x_1\}$$

このとき、 $t_{A_1}, t_{A_2}, t_{A_3}, t_{A_4}$ を次のように定義すれば、(12), (13) 式を満足するので、 $(\mathcal{F}_1, m_1) \subseteq (\mathcal{F}_2, m_2)$ が

成立する。

$$\begin{aligned} t_{A_1}(B_1) &= 0.2, \quad t_{A_1}(B_2) = 0.1 \\ t_{A_1}(B) &= 0, \quad \forall B \ni B_1, B_2 \\ t_{A_2}(B_2) &= 0.1, \quad t_{A_2}(B_5) = 0.1 \\ t_{A_2}(B) &= 0, \quad \forall B \ni B_2, B_5 \\ t_{A_3}(B_6) &= 0.1, \quad t_{A_3}(B) = 0, \quad \forall B \ni B_6 \\ t_{A_4}(B_3) &= 0.2, \quad t_{A_4}(B_4) = 0.1, \quad t_{A_4}(B_5) = 0.1 \\ t_{A_4}(B) &= 0, \quad \forall B \ni B_3, B_4, B_5 \end{aligned}$$

2.2 種々の情報測度

Dempster と Shafer の証拠理論を基に、不明確さを示す測度として、種々の情報測度が提案されている⁵⁾⁻⁸⁾。ここでは、不一致、混述、不特定の測度について述べ、その後、巨視的な情報測度である下界エントロピー、上界エントロピーについて述べる。

不一致の測度：与えられた証拠の体 $(\mathcal{F}, m)$ に対して、不一致の測度は次式で定義される[†]。

$$E(m) = - \sum_{A \subseteq X} m(A) \log_2 \text{Pl}(A) \quad (14)$$

$E(m)$ は、すべての焦点要素 $A, B \in \mathcal{F}$ に対して $A \cap B \ni \phi$ であるとき、かつまたそのときに限り、最小値 0 を与える。また、 $(\mathcal{F}, m)$ が一様な確率分布を表わす、すなわち、 $m(\{x_i\}) = 1/n, \forall x_i \in X$ となるとき、かつまたそのときに限り、 $E(m) = \log_2 |X| = \log_2 n$ となり、 $E(m)$ の最大値を与える。ただし、 $|X|$ は X の濃度を示し、 $|X| = n$ である。

不一致の測度は、本質的な矛盾の測度とも考えられている⁸⁾。

混述の測度：与えられた証拠の体 $(\mathcal{F}, m)$ に対して、混述の測度は次式で定義される。

$$C(m) = - \sum_{A \subseteq X} m(A) \log_2 \text{Bel}(A) \quad (15)$$

$C(m)$ は、一つの焦点要素 $A \subseteq X$ に対して $m(A) = 1$ かつ A 以外のすべての $B \subseteq X$ に対して $m(B) = 0$ となるとき、かつまたそのときに限り、最小値 0 を与える。また、すべての焦点要素が他のいずれの焦点要素にも含まれないようにできるだけ多くの焦点要素をもつ $\mathcal{F}$ を構成し、各焦点要素に一様に基本確率を割り当てるとき、 $C(m)$ は最大値 $\log_2 (\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor})$ をとる。ただし、 $[]$ はガウス記号である。

不特定の測度：与えられた証拠の体 $(\mathcal{F}, m)$ に対して、不特定の測度は次式で定義される。

$$V(m) = \sum_{A \subseteq X} m(A) \log_2 |A| \quad (16)$$

$V(m)$ は、すべての焦点要素が単集合、つまり、 $(\mathcal{F}, m)$ が通常の確率分布を表わすとき、最小値 0 を与え、

$m(X) = 1$ で、任意の $A \subset X$ に対して $m(A) = 0$ である、つまり、完全に無知であるとき、最大値 $\log_2 |X| = \log_2 n$ を与える。

不特定の測度は、不精密の測度とも呼ばれている^{7), 8)}。

以上、三つの情報測度のうち、不一致、混述の測度は、Shannon のエントロピー

$$H(p) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (17)$$

の拡張となっている。すなわち、 $(\mathcal{F}, m)$ が通常の確率分布を表わすとき、 $E(m), C(m)$ は Shannon のエントロピーと一致する。なお、 $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ であり、 p_i は $x_i \in X$ に割り当てられた確率を示している。

つぎに、巨視的な情報測度である下界エントロピー、上界エントロピーについて述べる。Lamata と Moral⁹⁾ は、系の不明確さは本質的な矛盾（不一致）と不精密さ（不特定さ）に起因していると考え、不一致と不特定の二つの不明確さの局面を包括した次の二種類の測度を提案している。

下界エントロピー

$$\begin{aligned} L(m) &= - \sum_{A \subseteq X} m(A) \log_2 \frac{\text{Pl}(A)}{|A|} \\ &= E(m) + V(m) \end{aligned} \quad (18)$$

上界エントロピー

$$\begin{aligned} U(m) &= EV_{\text{Bel}}(f) \\ &= \int_0^1 \text{Bel}(\{x \in X \mid f(x) \geq s\}) ds \\ &= EV_{\text{Bel}}(-\log_2 \text{Pl}(\{x\})) + \log_2 \left(\sum_{b \in X} \text{Pl}(\{b\}) \right) \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、

$$f(a) = \log_2 \frac{\text{Pl}(\{a\})}{\sum_{b \in X} \text{Pl}(\{b\})} \quad (20)$$

である。

下界エントロピーと上界エントロピーについて

$$L(m) \leq U(m) \quad (21)$$

が常に成立する。

(18) 式より明らかなように、下界エントロピーは不一致の測度と不特定の測度の和で構成されている。また、 $EV_{\text{Bel}}(-\log_2 \text{Pl}(\{x\}))$ は不一致の測度と同様な性質をもち、 $\log_2 (\sum_{b \in X} \text{Pl}(\{b\}))$ は不特定の測度と同様な性質をもつので、上界エントロピーも、不一致を表わす測度と不特定を表わす測度の和として構成されている。

Lamata と Moral は、 $L(m)$ と $U(m)$ の性質を基に、巨視的な情報測度が満たすべき性質として、次の四つをあげている。

(i) $m(\{x_i\}) = 1$ なる $x_i \in X$ が存在するときに限り

[†] $0 \cdot \log_2 0 = 0$ と規約する。

0となる。

- (ii) $(\mathcal{F}, m)$ が通常の確率分布を表わすとき、Shannon のエントロピーに一致する。
- (iii) 乗算に関して相互関係がないとき、加法的である。
- (iv) 本質的な矛盾 (不一致) の測度と不精密 (不特定) の測度から構成される。

ここで、性質 (iii) は、情報測度を G するとき、(10)、(11) 式が成立すれば、 $G(m) = G(m_x) + G(m_y)$ となることを意味している。

もちろん、下界エントロピーも上界エントロピーもこの四つの性質を満たしている。

3. 新たな巨視的な情報測度の提案

3.1 巨視的な情報測度について

不一致、混述、不特定の情報測度は、不明確さの各局面をうまく表現しているが、全体的な意味での不明確さを表わす測度としては適当ではない。また、下界エントロピー、上界エントロピーは、前章で述べた四つの性質を満たしているが、不一致と不特定の情報測度の和として定義されなければならない理由が明らかでない。そこで、本章では、証拠理論において扱われている不明確さについて考察し、巨視的な情報測度が満たすべき性質を導くことにより、新たな巨視的な情報測度を提案する。

証拠理論が確率論と異なる点は、無知量が扱えることである。したがって、証拠理論では、確率論で主として扱う、対象とする系自体に内在する不明確さに加えて、人間の系に対する知識、情報における不明確さをも扱っていると考えられる。次の例を考えよう。

(例2) 袋の中に青紫、紫、赤紫、臙脂、赤、朱色、橙色、柿色、オレンジの玉がいくつか入っている。いま、紫系 0.2、赤系 0.5、オレンジ系 0.3 の割合で入っているという情報を得た。このとき、袋から玉を一つ取り出す場合に各色の出る確率は、次の証拠の体 $(\mathcal{F}, m)$ を用いて表現される。

$$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3\}$$

$$m(A_1) = 0.2, m(A_2) = 0.5, m(A_3) = 0.3$$

$$A_1 = \{\text{青紫, 紫, 赤紫}\}$$

$$A_2 = \{\text{赤紫, 臙脂, 赤, 朱色}\}$$

$$A_3 = \{\text{朱色, 橙色, 柿色, オレンジ}\}$$

ここで、 A_1, A_2, A_3 はそれぞれ、紫系、赤系、オレンジ系に帰属すると考えられる色の集合を表わしている。

この例において、紫系 0.2、赤系 0.5、オレンジ系 0.3 という割合は、玉を一つ取り出す場合に、常にある色の玉が出るといった確定的な系でないこと、すなわち、系自体が不明確さを伴っていることを表わしている。一方、

紫系、赤系、オレンジ系という言葉に対する色が複数個存在するのは、紫系、赤系、オレンジ系という情報あるいは知識における不明確さを表わしている。このように、証拠理論では、系自体の不明確さと知識、情報における不明確さが扱われていると考えられる。

そこで、本研究では、Lamata と Moral があげた四つの性質のうち、性質 (iv) を

- (iv') 系自体に内在する不明確さを表わす情報測度の性質と、知識、情報における不明確さを表わす情報測度の性質をもつ。

に置き換え、性質 (i) ~ (iii) および (iv') を満たす巨視的な情報測度を提案する。まず、系自体に内在する不明確さを表現するために満たすべき情報測度の性質、および、知識、情報における不明確さを表現するために満たすべき情報測度の性質を議論する。

3.2 系自体の不明確さを表わす情報測度の性質

証拠の体 $(\mathcal{F}, m)$ が与えられたとき、この証拠に反しない確率分布の集合 $\mathcal{E}$ を次のように構成することができる。

$$\mathcal{E} = \{p = (p_1, p_2, \dots, p_n) / p_i = \sum_{j=1}^{\ell} x_{ij} p_{ij}, \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} p_{ij} = m(A_j), p_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \\ j = 1, 2, \dots, \ell\} \quad (22)$$

ただし、 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ であり、 p_i は x_i に対する確率である。また、 ℓ は焦点要素の数であり、 A_j は焦点要素である。さらに、 x_{ij} は次式で定義される。

$$x_{ij} = \begin{cases} 1; & x_i \in A_j \\ 0; & x_i \notin A_j \end{cases} \quad (23)$$

対象とする系自体が不明確である場合、系自体はある確率分布に従っていると考えるのが自然であろう。この考え方に基づくと、確率分布の集合 $\mathcal{E}$ は証拠の体 $(\mathcal{F}, m)$ より考えられる系自体の確率分布の集合であり、 $(\mathcal{F}, m)$ が正しい証拠であるとき、 $\mathcal{E}$ の中に系自体を表わす真の確率分布があると考えられる。なお、本研究では、 $(\mathcal{F}, m)$ は正しい証拠であると考えことにする。

この観点から明らかに、系自体を表わす真の確率分布の不明確さは、 $\mathcal{E}$ 内の確率分布の不明確さの最小値以上、最大値以下となるので、 $(\mathcal{F}, m)$ によって与えられる系自体の不明確さも、 $\mathcal{E}$ 内の確率分布の不明確さの最小値以上、最大値以下となるべきであろう。したがって、 $p \in \mathcal{E}$ なる任意の確率分布 p に対する証拠の体 $(\mathcal{F}_p, m_p)$ とすると、情報測度 $G(m)$ が系自体の不明確さを表わすためには、

$$\min_{p \in \mathcal{E}} G(m_p) \leq G(m) \leq \max_{p \in \mathcal{E}} G(m_p) \quad (24)$$

を満足すべきであろう。

ここで、不一致の測度 $E(m)$ との関連について述べる。不一致の測度 $E(m)$ は、系自体の不明確さを表わす測度ではない。実際、 $E(m)$ について (24) 式は成立せず、

$$E(m) \leq \min_{p \in \mathcal{C}} E(m_p) = \min_{p \in \mathcal{C}} H(p) \quad (25)$$

が成立する。(25) 式は、 $E(m)$ が $\mathcal{C}$ 内の任意の確率分布の不明確さ以下であることを示している。不一致の測度は、各焦点要素間の排反性が大きいほど大きくなる測度である^{5)~7)} ことから、 $(\mathcal{F}, m)$ に対する不一致度は、 $\mathcal{C}$ 内の任意の確率分布の不一致度以下でなければならない。このように、不一致の測度は系自体の不明確さを表わす測度ではない。しかし、系自体の不明確さが増す、すなわち、確定的な系から遠ざかり、一様分布に近づくほど、各焦点要素間の排反性が大きくなると考えられるので、不一致の測度は系自体の不明確さに関連している。

上界エントロピー $U(m)$ の定義に用いられている $EV_{\text{Bel}}(-\log_2 \text{Pl}(\{x\}))$ についても、同様なことがいえる。

3.3 知識、情報の不明確さを表わす情報測度の性質

前章で述べた証拠の体の包含関係 $(\mathcal{F}_1, m_1) \subseteq (\mathcal{F}_2, m_2)$ が成立するとき、証拠 $(\mathcal{F}_2, m_2)$ は証拠 $(\mathcal{F}_1, m_1)$ より詳細であるといえる。知識、情報における不明確さの観点から、より詳細な証拠を得ることによって不明確さが増すことは不自然である。したがって、知識、情報における不明確さを表わす情報測度 $G(m)$ は、

$$(\mathcal{F}_1, m_1) \subseteq (\mathcal{F}_2, m_2) \text{ ならば, } G(m_1) \geq G(m_2) \quad (26)$$

を満たすべきであろう。

不特定の測度 $V(m)$ に対して、(26) 式が成立する^{7), 8)}。したがって、 $V(m)$ は、知識、情報における不明確さを表わす測度である。

3.4 巨視的な情報測度の提案とその性質

巨視的な情報測度が性質 (iv') を満たすためには、(24) 式と (26) 式を同時に満たさなければならない。(24)、(26) 式を同時に満たす情報測度は、次の性質をもつ、

【命題 1】 情報測度 $G(m)$ が (24)、(26) 式を満足するとき、任意の証拠の体 $(\mathcal{F}, m)$ について、

$$G(m) = \max_{p \in \mathcal{C}} G(m_p) \quad (27)$$

が成立する。

命題 1 を証明する前に、次の補題を示す。

【補題 1】 $p \in \mathcal{C}$ なる任意の p に対する証拠の体

$(\mathcal{F}_p, m_p)$ について、 $(\mathcal{F}, m) \subseteq (\mathcal{F}_p, m_p)$ が成立する。

(証明) $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ とすると、 $m_p(\{x_i\}) = p_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $m_p(B) = 0$, $\forall B \subseteq X$, $|B| \neq 1$ が成立する。また、 $\mathcal{C}$, χ_{ij} の定義より、

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_{j: x_j \in A_i} p_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ m(A_j) &= \sum_{i: x_i \in A_j} p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, \ell \\ p_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, \ell \end{aligned}$$

が成立する。そこで、任意の $A, B \subseteq X$ について、

$$t_A(B) = \begin{cases} p_{ij}; & B = \{x_i\}, A = A_j \\ 0; & \text{その他} \end{cases}$$

と定義すると、明らかに、

$$\begin{aligned} m(A) &= \sum_{B: B \subseteq A} t_A(B), \quad \forall A \subseteq X \\ m_p(B) &= \sum_{A: B \subseteq A} t_A(B), \quad \forall B \subseteq X \end{aligned}$$

が成立する。

(証明終)

さて、命題 1 を証明しよう。

(命題 1 の証明) $(\mathcal{F}_p, m_p)$ を

$$G(m_p) = \max_{p \in \mathcal{C}} G(m_p)$$

を満たし、確率分布 $p^* \in \mathcal{C}$ を表わす証拠の体とする。

このとき、 $p^* \in \mathcal{C}$ であるから、補題 1 より、 $(\mathcal{F}, m) \subseteq (\mathcal{F}_p, m_p)$ となる。したがって、(26) 式より、 $G(m) \geq G(m_p^*)$ が成立する。一方、(24) 式より、 $G(m) \leq G(m_p^*)$ が成立する。ゆえに、 $G(m) = G(m_p^*)$ 、すなわち、(27) 式が成立する。

(証明終)

命題 1 より、任意の証拠の体 $(\mathcal{F}, m)$ の巨視的な情報測度の値は、 $(\mathcal{F}, m)$ に対して定まる集合 $\mathcal{C}$ 内の確率分布の巨視的な情報測度の最大値と一致する。

次の命題 2 は、(24) 式、(26) 式に加えて、Lamata と Moral によってあげられた性質 (ii) を満たす情報測度が唯一であることを示している。

【命題 2】 (24)、(26) 式および、性質 (ii) を満たす情報測度 $G(m)$ は、

$$G(m) = \max_{p \in \mathcal{C}} H(p) \quad (28)$$

ただ一つである。

(証明) 性質 (ii) を満たすためには、 $G(m_p) = H(p)$ が成立しなければならない。このことと命題 1 より、(28) 式は明らかである。

(証明終)

(28) 式で定義される $G(m)$ は、Lamata と Moral があげた性質 (i) および (iii) も満たしている。このことを以下で証明する。

【命題 3】 (28) 式で定義される $G(m)$ は、性質 (i) および性質 (iii) を満たしている。

(証明) 性質(i)は Shannon のエントロピーの性質^{5),9)}より明らかである。性質(iii)を証明する。

($\mathcal{F}, m$) を $X \times Y$ 上の証拠の体とする。($\mathcal{F}, m$) の X, Y への射影をそれぞれ、($\mathcal{F}_x, m_x$), ($\mathcal{F}_y, m_y$) とすると、性質(iii)の仮定より、(10), (11)式が成立する。 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_x}\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{n_y}\}$, ($\mathcal{F}_x, m_x$), ($\mathcal{F}_y, m_y$) の焦点要素の数をそれぞれ、 ℓ_x, ℓ_y とし、

$$\chi_{ixjx} = \begin{cases} 1; x_{ix} \in A_{jx} \\ 0; x_{ix} \notin A_{jx} \end{cases}, \quad \chi_{iyjy} = \begin{cases} 1; y_{iy} \in B_{jy} \\ 0; y_{iy} \notin B_{jy} \end{cases}$$

とすると、($\mathcal{F}, m$), ($\mathcal{F}_x, m_x$), ($\mathcal{F}_y, m_y$) に対する確率分布の集合 $\mathcal{C}, \mathcal{C}_x, \mathcal{C}_y$ は、(10), (11)式より、

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \{p = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n_y}, p_{21}, \dots, p_{2n_y}, \dots, \\ p_{n_x1}, \dots, p_{n_xn_y}) / p_{ixiy} = \sum_{j_x=1}^{\ell_x} \sum_{j_y=1}^{\ell_y} \chi_{ixjx} \chi_{iyjy} p_{ixjxjy}, \\ \sum_{i_x=1}^{n_x} \sum_{i_y=1}^{n_y} \chi_{ixjx} \chi_{iyjy} p_{ixjxjy} = m_x(A_{jx}) m_y(B_{jy}), \\ p_{ixjxjy} \geq 0, i_x = 1, 2, \dots, n_x, i_y = 1, 2, \dots, n_y, \\ j_x = 1, 2, \dots, \ell_x, j_y = 1, 2, \dots, \ell_y\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_x = \{q = (q_1, q_2, \dots, q_{n_x}) / q_{ix} = \sum_{j_x=1}^{\ell_x} \chi_{ixjx} q_{ixjx}, \\ \sum_{i_x=1}^{n_x} \chi_{ixjx} q_{ixjx} = m_x(A_{jx}), q_{ixjx} \geq 0, \\ i_x = 1, 2, \dots, n_x, j_x = 1, 2, \dots, \ell_x\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_y = \{r = (r_1, r_2, \dots, r_{n_y}) / r_{iy} = \sum_{j_y=1}^{\ell_y} \chi_{iyjy} r_{iyjy}, \\ \sum_{i_y=1}^{n_y} \chi_{iyjy} r_{iyjy} = m_y(B_{jy}), r_{iyjy} \geq 0, \\ i_y = 1, 2, \dots, n_y, j_y = 1, 2, \dots, \ell_y\} \end{aligned}$$

と書ける。

まず、

$$H(p^*) = \max_{p \in \mathcal{C}} H(p) = G(m)$$

なる $p^* = (p_{11}^*, p_{12}^*, \dots, p_{n_x n_y}^*) \in \mathcal{C}$ を考える。 $p^* \in \mathcal{C}$ より、

$$\begin{aligned} p_{ixiy}^* &= \sum_{j_x=1}^{\ell_x} \sum_{j_y=1}^{\ell_y} \chi_{ixjx} \chi_{iyjy} p_{ixjxjy}^*, \\ \sum_{i_x=1}^{n_x} \sum_{i_y=1}^{n_y} \chi_{ixjx} \chi_{iyjy} p_{ixjxjy}^* &= m_x(A_{jx}) m_y(B_{jy}) \\ p_{ixjxjy}^* &\geq 0, i_x = 1, 2, \dots, n_x, i_y = 1, 2, \dots, n_y, \\ j_x &= 1, 2, \dots, \ell_x, j_y = 1, 2, \dots, \ell_y \quad (I) \end{aligned}$$

なる p_{ixjxjy}^* が存在する。 p^* の周辺分布 $q^* = (q_1^*, \dots, q_{n_x}^*)$, $r^* = (r_1^*, \dots, r_{n_y}^*)$ を考えると、Shannon のエントロピーの性質^{5),9)}より、

$$G(m) = H(p^*) \leq H(q^*) + H(r^*) \quad (II)$$

となる。

ここで、 $q^* \in \mathcal{C}_x$ を示す。(I)の第一式より、

$$q_{ix}^* = \sum_{i_y=1}^{n_y} p_{ixiy}^* = \sum_{j_x=1}^{\ell_x} \chi_{ixjx} \left(\sum_{i_y=1}^{n_y} \sum_{j_y=1}^{\ell_y} \chi_{iyjy} p_{ixjxjy}^* \right)$$

と書ける。(I)の第二式より、

$$\begin{aligned} \sum_{i_x=1}^{n_x} \chi_{ixjx} \left(\sum_{i_y=1}^{n_y} \sum_{j_y=1}^{\ell_y} \chi_{iyjy} p_{ixjxjy}^* \right) \\ = m_x(A_{jx}) \sum_{j_y=1}^{\ell_y} m_y(B_{jy}) = m_x(A_{jx}) \end{aligned}$$

となり、 $q_{ixjx}^* = \left(\sum_{i_y=1}^{n_y} \sum_{j_y=1}^{\ell_y} \chi_{iyjy} p_{ixjxjy}^* \right)$ とすると、(I)の第三式より、 $q_{ixjx}^* \geq 0$ となる。ゆえに、 $q^* \in \mathcal{C}_x$ となる。同様に、 $r^* \in \mathcal{C}_y$ も証明できる。

$q^* \in \mathcal{C}_x, r^* \in \mathcal{C}_y$ より、

$$H(q^*) \leq \max_{q \in \mathcal{C}_x} H(q) = G(m_x)$$

$$H(r^*) \leq \max_{r \in \mathcal{C}_y} H(r) = G(m_y)$$

となり、(II)より、次式が成立する。

$$G(m) \leq G(m_x) + G(m_y) \quad (III)$$

逆に、

$$H(q^0) = \max_{q \in \mathcal{C}_x} H(q) = G(m_x)$$

$$H(r^0) = \max_{r \in \mathcal{C}_y} H(r) = G(m_y)$$

なる $q^0 = (q_1^0, \dots, q_{n_x}^0) \in \mathcal{C}_x$, $r^0 = (r_1^0, \dots, r_{n_y}^0) \in \mathcal{C}_y$ を考える。 $q^0 \in \mathcal{C}_x, r^0 \in \mathcal{C}_y$ より、

$$\begin{aligned} q_{ix}^0 &= \sum_{j_x=1}^{\ell_x} \chi_{ixjx} q_{ixjx}^0, \sum_{i_x=1}^{n_x} \chi_{ixjx} q_{ixjx}^0 = m_x(A_{jx}), \\ q_{ixjx}^0 &\geq 0, i_x = 1, 2, \dots, n_x, j_x = 1, 2, \dots, \ell_x \quad (IV) \end{aligned}$$

$$r_{iy}^0 = \sum_{j_y=1}^{\ell_y} \chi_{iyjy} r_{iyjy}^0, \sum_{i_y=1}^{n_y} \chi_{iyjy} r_{iyjy}^0 = m_y(B_{jy}),$$

$$r_{iyjy}^0 \geq 0, i_y = 1, 2, \dots, n_y, j_y = 1, 2, \dots, \ell_y \quad (V)$$

なる q_{ixjx}^0, r_{iyjy}^0 が存在する。 q^0, r^0 が独立であると仮定し、同時分布 $p^0 = (p_{11}^0, p_{12}^0, \dots, p_{n_x n_y}^0)$ を

$$p_{ixiy}^0 = q_{ix}^0 r_{iy}^0$$

により構成すると、Shannon のエントロピーの性質^{5),9)}より、次式が成立する。

$$H(p^0) = H(q^0) + H(r^0) = G(m_x) + G(m_y) \quad (VI)$$

ここで、 $p^0 \in \mathcal{C}$ を示す。(IV), (V)の第一式より、

$$p_{ixiy}^0 = \sum_{j_x=1}^{\ell_x} \sum_{j_y=1}^{\ell_y} \chi_{ixjx} \chi_{iyjy} q_{ixjx}^0 r_{iyjy}^0$$

と書ける。また、(IV), (V)の第二式より、

$$\sum_{i_x=1}^{n_x} \sum_{i_y=1}^{n_y} \chi_{ixjx} \chi_{iyjy} q_{ixjx}^0 r_{iyjy}^0 = m_x(A_{jx}) m_y(B_{jy})$$

となり、 $p_{ixjxjy}^0 = q_{ixjx}^0 r_{iyjy}^0$ とすると、 $p_{ixjxjy}^0 \geq 0$ と

なる。ゆえに、 $p^0 \in \mathcal{E}$ が成立する。

$p^0 \in \mathcal{E}$ より、

$$H(p^0) \leq \max_{p \in \mathcal{E}} H(p) = G(m)$$

となり、(VI) より、次式が成立する。

$$G(m) \geq G(m_x) + G(m_y) \quad (\text{VII})$$

したがって、(III), (VII) より、次式が成立する。

$$G(m) = G(m_x) + G(m_y) \quad (\text{証明終})$$

命題 2, 3 より、(28) 式で定義される $G(m)$ は、性質 (i) ~ (iii), (iv') のすべてを満たす唯一の情報測度であることがわかる。

結局、(28) 式より明らかなように、(24), (26) 式および性質 (ii) を満たす巨視的な情報測度は、証拠の体 $(\mathcal{F}, m)$ を確率分布の集合 $\mathcal{E}$ と考えたときの ampliative reasoning⁵⁾、つまり、エントロピー最大化に基づいて定められる確率分布のエントロピーに一致する。

4. 簡単な実験による考察

4.1 実験の目的

巨視的な情報測度は「人間が考える（感じる）系の全体的な不明確さはどのようなものであるか」という根拠にできるだけ即している方が望ましいと考えられる。

本章では、被験者が一対の証拠の体における全体的な不明確さを比較する実験を行ない、下界エントロピー $L(m)$ 、上界エントロピー $U(m)$ 、および、本提案の巨視的な情報測度 $G(m)$ のいずれが、人間の考える系の全体的な不明確さをうまく表現しているかを調べる。

4.2 実験方法および実験結果

実験では、全体集合 X の濃度 $|X| = n$ が 2~4 のそれぞれについて 10 種の証拠の体 $(\mathcal{F}, m)$ を構成し、そのイメージを描いた。Fig. 1~3 の試料を用いた。Fig. 1~3 では、各 $(\mathcal{F}, m)$ を区別するため、試料の左上に名称を付けている。たとえば、Fig. 1 の 2-2 の試料は $m(\{x_1\}) = 1/4$, $m(\{x_2\}) = 3/4$ なる $(\mathcal{F}, m)$ を描いており、Fig. 2 の 3-4 の試料は $m(\{x_1, x_2, x_3\}) = 1/2$, $m(\{x_2, x_3\}) = 1/2$ なる $(\mathcal{F}, m)$ を描いている。ほかも同様である。試料として用いたそれぞれの $(\mathcal{F}, m)$ から算出した $L(m)$, $U(m)$, $G(m)$ の値を Table 1~3 に示す。

これらの試料を用いて、次のような実験を行

Fig. 1 Bodies of evidence used in the experiment in the case of $n = 2$

Fig. 2 Bodies of evidence used in the experiment in the case of $n = 3$

Fig. 3 Bodies of evidence used in the experiment in the case of $n = 4$

Table 1 The values of $G(m)$, $L(m)$ and $U(m)$ in the case of $n = 2$

$(\mathcal{F}, m)$	$L(m)$	$U(m)$	$G(m)$
2-1	1.00	1.00	1.00
2-2	0.81	0.81	0.81
2-3	0.50	0.58	1.00
2-4	1.00	1.00	1.00
2-5	0.72	1.00	1.00
2-6	0.33	0.42	0.92
2-7	0.55	0.67	0.95
2-8	0.67	0.74	1.00
2-9	0.71	1.00	1.00
2-10	0.80	1.00	1.00

Table 2 The values of $G(m)$, $L(m)$ and $U(m)$ in the case of $n = 3$

$(\mathcal{F}, m)$	$L(m)$	$U(m)$	$G(m)$
3-1	1.00	1.00	1.58
3-2	1.13	1.22	0.58
3-3	0.60	0.74	1.46
3-4	1.29	1.32	1.58
3-5	1.50	1.58	1.50
3-6	1.29	1.32	1.58
3-7	1.00	1.58	1.58
3-8	1.00	1.32	1.58
3-9	1.00	1.42	1.58
3-10	1.46	1.46	1.46

Table 3 The values of $G(m)$, $L(m)$ and $U(m)$ in the case of $n = 4$

$(\mathcal{F}, m)$	$L(m)$	$U(m)$	$G(m)$
4-1	1.39	1.58	2.00
4-2	1.45	1.81	1.97
4-3	1.50	1.74	2.00
4-4	1.46	1.56	2.00
4-5	1.92	1.92	1.92
4-6	1.67	1.74	2.00
4-7	1.58	2.00	2.00
4-8	1.58	1.85	2.00
4-9	1.92	1.92	1.92
4-10	1.39	1.85	2.00

なった。試料に描かれている $(\mathcal{F}, m)$ を説明した後、各被験者に $n = 2 \sim 4$ のそれぞれについて、10種の $(\mathcal{F}, m)$ のすべての対 (45 対) の全体的な不明確さを比較させた。なお、解答形式は「 $\bigcirc \bigcirc \bigcirc$ の方が不明確である」あるいは「両者とも不明確さは同じである」の二つに限定した。比較する対の順序は乱数を用いてランダムにし、被験者ごとに比較する対の順序が異なるようにした。被験者は、18 歳から 25 歳までの男性 10 人であった。

実験の結果を Table 4~6 に示す。Table 4~6 では、行の $(\mathcal{F}, m)$ の方が列の $(\mathcal{F}, m)$ より不明確であると答えた人数を表わしている。たとえば、Table 4 の 2-2 の行、2-3 の列における 1 は、10 人中 1 人が「2-2 の方が 2-3 より不明確である」と答えたことを示している。なお、2-2 行 2-3 列と 2-3 行 2-2 列の数値の和が 10 に満たないのは、「両者の不明確さが同じである」と答えた人が 3 (=10-1-6) 人いることを示している。

つぎに、Table 1~3 の $L(m)$, $U(m)$, $G(m)$ と Table 4~6 の得られた結果を利用して、 $L(m)$, $U(m)$, $G(m)$ それぞれの数値による比較と一致している人数の平均、分散、メジアン、最小値、最大値を Table 7 に示す。ここで、 $G(m)$ による比較と一致するとは、 $(\mathcal{F}_1, m_1)$, $(\mathcal{F}_2, m_2)$ について $G(m_1) > G(m_2)$ のとき、被験者が $(\mathcal{F}_1, m_1)$ を $(\mathcal{F}_2, m_2)$ より不明確であると答え、 $G(m_1) = G(m_2)$ のとき、 $(\mathcal{F}_1, m_1)$ と $(\mathcal{F}_2, m_2)$ の不明確さが同じであると答えることをいう。 $L(m)$, $U(m)$ についても同様である。また、 $L(m)$, $U(m)$, $G(m)$ それぞれの数値による比較のうち、厳密な不等号関係 $>$ が成立する対のみについて、その比較結果に一致して答えている被験者数の平均、分散、メジアン、最小値、最大値を Table 8 に示す。さらに、Table 9 では、 $L(m)$, $U(m)$, $G(m)$ それぞれの数値による比較のうち、厳密な不等号関係 $>$ が成立する対について、その比較結果と逆転する (逆の不等号を指示する) 被験者数の平均、分散、メジアン、最小値、最大値を示している。

4.3 考察

Table 7 の結果から、 $U(m)$ による比較と人間による比較が一致している人数の平均、メジアンが最も大きく、分散も比較的小さいので、 $U(m)$ による比較が人間による比較に最も近いと推測される。しかし、Table 9 に示すように、 $U(m)$ による比較と人間による比較が逆転している人数の平均、メジアン、最大値が $G(m)$ のそれらよりも大きい。とくに、 $n = 2, 4$ における $U(m)$ による比較では、最大値が 10 であり、被験者全員が $U(m)$ による比較結果と逆転する場合がある。2-2 と

Table 4 Data gathered from the experiment in the case of $n = 2$

	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6	2-7	2-8	2-9	2-10
2-1		10	9	4	4	10	10	8	1	4
2-2	0		1	0	0	3	1	0	0	1
2-3	1	6		3	0	10	4	2	0	0
2-4	2	10	7		4	8	5	7	3	3
2-5	2	9	10	2		10	10	8	1	2
2-6	0	6	0	3	0		1	0	0	0
2-7	1	4	4	4	0	9			0	0
2-8	2	10	7	3	2	8	5		1	1
2-9	4	9	10	4	6	10	9	9		0
2-10	3	9	10	4	4	10	8	9	5	

Table 5 Data gathered from the experiment in the case of $n = 3$

	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6	3-7	3-8	3-9	3-10
3-1		8	10	3	7	5	2	2	2	9
3-2	2		8	2	6	0	0	3	1	6
3-3	0	1		0	3	0	0	1	0	3
3-4	7	8	10		6	4	1	5	3	7
3-5	1	4	7	4		4	1	3	1	9
3-6	5	10	10	6	6		1	6	2	8
3-7	7	10	10	9	9	9		8	8	9
3-8	8	5	9	4	7	4	1		1	8
3-9	7	9	10	7	8	8	1	7		6
3-10	1	1	7	3	1	2	1	1	4	

Table 6 Data gathered from the experiment in the case of $n = 4$

	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6	4-7	4-8	4-9	4-10
4-1		10	5	8	5	5	1	5	8	0
4-2	0		1	3	7	2	1	2	3	1
4-3	5	9		10	7	6	2	4	7	1
4-4	1	6	0		4	3	1	2	7	0
4-5	1	3	2	6		2	1	2	4	1
4-6	3	8	2	7	4		0	1	6	0
4-7	8	9	8	9	9	10		7	9	6
4-8	4	8	6	8	6	8	2		8	2
4-9	2	7	2	3	3	3	1	2		1
4-10	8	9	9	10	8	9	4	8	9	

Table 7 Data about the number of persons agreed on the result based on each global information measure

		mean	variance	median	minimum value	maximum value
$n=2$	$L(m)$	6.200	12.116	7	0	10
	$U(m)$	6.667	9.822	8	0	10
	$G(m)$	5.289	14.294	5	0	10
$n=3$	$L(m)$	4.089	11.725	3	0	10
	$U(m)$	5.844	11.598	7	0	10
	$G(m)$	4.311	15.859	6	0	10
$n=4$	$L(m)$	3.711	9.272	2	0	10
	$U(m)$	5.222	10.528	6	0	10
	$G(m)$	4.222	12.973	4	0	10

Table 8 Data about the number of persons agreed on the result based on each global information measure when strict inequality holds

		mean	variance	median	minimum value	maximum value
$n=2$	$L(m)$	6.250	12.278	7.5	0	10
	$U(m)$	7.771	7.948	9	0	10
	$G(m)$	8.292	4.207	9	4	10
$n=3$	$L(m)$	4.605	11.555	4	0	10
	$U(m)$	6.390	9.360	7	1	10
	$G(m)$	8.043	2.129	8	6	10
$n=4$	$L(m)$	3.905	9.753	2.5	0	10
	$U(m)$	5.452	9.962	6	0	10
	$G(m)$	7.217	3.388	8	3	10

Table 9 Data about the number of persons against the result based on each global information measure when strict inequality holds

		mean	variance	median	minimum value	maximum value
$n=2$	$L(m)$	2.659	8.225	2	0	10
	$U(m)$	1.686	5.187	1	0	10
	$G(m)$	0.958	2.040	0	0	4
$n=3$	$L(m)$	5.105	10.726	6	0	10
	$U(m)$	3.220	8.269	2	0	9
	$G(m)$	1.609	1.977	1	0	4
$n=4$	$L(m)$	5.452	8.676	5.5	0	10
	$U(m)$	3.976	8.785	4	0	10
	$G(m)$	2.130	2.461	2	0	7

2-8 の対, 4-1 と 4-2 の対などはその例である。したがって, $U(m)$ による比較は人間による比較と完全に逆転する場合があります, この意味で健全であるとはいえない。

一方, $G(m)$ による比較は, Table 7 より, 人間による比較と一致している人数の平均, メジアンが小さいので, この結果から, $G(m)$ が最適であるとはいえない。しかし, Table 7 の $G(m)$ の平均, メジアンが小さいのは, $G(m)$ による比較において等号が成立する対が多いためと考えられる。実際, Table 8 をみると, $G(m)$ による比較が人間による比較に最も一致している。さらに, Table 9 により, $G(m)$ による比較と人間による比較が逆転している人数の平均, メジアン, 最大値が最も小さく, $L(m)$, $U(m)$ に比べて健全であるといえる。

$L(m)$ による比較は, Table 7~9 のいずれにおいても $G(m)$ あるいは $U(m)$ に劣り, $G(m)$, $U(m)$ ほど人間による比較に一致しない。

以上の考察より, 厳密な不等関係が成立する場合, $G(m)$ による比較が人間による比較に最も一致し, しかも, 逆転する人数の平均, メジアンが小さく, 最も健全であるといえる。

5. おわりに

証拠理論において, 系自体に内在する不明確さと, 系に対する人間の知識, 情報における不明確さが取り扱われているという観点から, 系自体の不明確さを表わす情報測度が満たすべき性質, 人間の知識, 情報の不明確さを表わす情報測度が満たすべき性質を考え, 両方の性質を満たす巨視的な情報測度を提案した。すなわち, 系自体の不明確さを表わすための性質, 人間の知識, 情報の不明確さを表わすための性質の両方を満たし, しかも, Shannon のエントロピーの拡張であるためには,

$$G(m) = \max_{p \in \mathcal{E}} H(p)$$

でなければならないことを示した。さらに, 本提案の巨視的な情報測度 $G(m)$ と Lamata と Moral による巨視的な情報測度 $L(m)$, $U(m)$ のいずれが, 人間の考える(感じる)全体的な不明確さを表現しているかを調べるため, 簡単な実験を行なった。その結果, $G(m)$, $L(m)$, $U(m)$ のうち, $G(m)$ による比較が人間による比較との逆転が最も少なく, 健全であることが判明した。

なお, 提案された $G(m)$ の値を求めるためには, 凹計画問題を解く必要があり, $E(m)$, $C(m)$, $V(m)$, $L(m)$, $U(m)$ の値の算出に比べ困難である。簡便な $G(m)$ の値の計算方法の考案などが今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) D. Dubois and H. Prade : Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications, Academic Press (1980)
- 2) D. Dubois and H. Prade : Possibility Theory, Plenum Press (1988)
- 3) A. P. Dempster : Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping ; Annals of Mathematical Statistics, Vol. 38, pp. 325~339 (1967)
- 4) G. Shafer : A Mathematical Theory of Evidence, Princeton Univ. Press (1976)
- 5) G. J. Klir and T. A. Folger : Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information, Prentice Hall (1988)
- 6) G. J. Klir : Where Do We Stand on Measures of Uncertainty, Ambiguity Fuzziness, and the Like ? ; Fuzzy Sets and Syst., Vol. 24, pp. 141~160 (1987)
- 7) D. Dubois and H. Prade : Properties of Measures of Information in Evidence and Possibility Theories ; Fuzzy Sets and Syst., Vol. 24, pp. 161~182 (1987)
- 8) M. T. Lamata and S. Moral : Measures of Entropy in the Theory of Evidence ; Int. J. General Systems, Vol. 14, pp. 297~305 (1987)
- 9) 国沢 : 情報理論 I - エントロピーと情報量 -, 共立出版 (1983)
- 10) M. Delgado and S. Moral : A Definition of Inclusion for Evidences ; 模糊数学, Vol. 7, No. 1, pp. 81~87 (1987)
- 11) D. Dubois and H. Prade : A Set-Theoretic View of Belief Functions : Logical Operations and Approximations by Fuzzy Sets ; Int. J. General Systems, Vol. 12, pp. 193~226 (1986)