状態空間手法による CARIMA 系の一般化予測制御*

渡 辺 桂 吾**

A Generalized Predictive Control for CARIMA Systems Using the State-Space Approach*

Keigo WATANABE**

A generalized predictive control (GPC) which can be designed in a state-space framework is proposed for single-input/single-output CARIMA systems. It is first shown that, in designing the steady-state 1-step Kalman predictor by applying the innovation model, there are two ways depending on whether the output value of the plant is directly used or not; one is called here "direct output method" and another is called "output deviation method". When solving the 1-step predicted estimate of the original output, the latter method can be further classified into two approaches which differ in respect of the interpretation of the predicted estimate for the output deviation. Thus, three different j -step ahead state-space output predictors can be designed for the GPC strategy. Finally, the performances of three GPCs are compared through some numerical simulations.

1. はじめに

予測制御アルゴリズムとして、インパルス応答モデルやステップ応答モデルなどの非パラメトリックモデルを用いる、MAC (Model Algorithmic Control) や DMC (Dynamic Matrix Control) とパラメトリックなモデルを用いる一般化予測制御 (GPC (Generalized Predictive Control)) が活発に研究されている^{1)~5)}。特に、MAC 法や DMC 法が安定なプラントにしか適用できないのに対して、GPC 法は不安定なプラントにも適用でき、しかも CARIMA (Controlled Autoregressive Integrating Moving Average) モデルを採用していることからステップ状外乱や任意の目標値においてオフセットなしの定常応答を約束できる利点を有する¹¹⁾。しかしながら、多項式枠内で設計された GPC 法^{6), 7)}では、 j 段多項式出力プレディクタを駆動させるために、基本的には j 個の Diophantine 方程式を解かなくてはならず、セルフチューニングや多入力・多出力の場合にはこれが計算上の大きな欠点となる。この有効な計算法としては、 j に関する再帰公式を用いるもの⁸⁾や j 段多項式出力プレディクタの多段ステップ公式を用いるもの⁹⁾な

どが提案されている。

本稿では、上記の問題を避けるために 1 入力・1 出力離散時間 CARIMA 系に対して、状態空間手法での GPC の設計法を提案する。まず、イノベーションモデルを利用して定常 1 段カルマンプレディクタの設計で、プラント出力を直接用いるかどうかによって二つの方法があることを示す。すなわち、一つは「直接出力法」で、もう一つは「出力偏差法」である。さらに、後者は、オリジナル出力の 1 段予測値を決定する際に、出力偏差の予測値の解釈で異なる二つの手法に分けることができることを示す。つまり、一つのものは本稿で扱う非定常雑音を定常雑音と見なした一近似手法である。もう一つは、確率的推定理論上直接出力法と等価なものである。結果的には三つの j 段状態空間出力プレディクタが設計でき、これらの違いによる GPC 性能への影響はシミュレーションで検証する。

2. システムの記述

制御対象は次の CARIMA モデルで記述される 1 入力・1 出力離散時間システムとする。

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + C(z^{-1})\frac{\xi(k)}{d} \quad (1)$$

ここで、多項式 $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ は

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a} \quad (2)$$

* 原稿受付 1990 8 24

** 佐賀大学 理工学部 Faculty of Science and Engineering, Saga University; Honjomachi-1, Saga 840, JAPAN

Key Words: CARIMA model, Kalman predictor, predictive control, state-space approach, stochastic control.

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b} \quad (3)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots + c_{n_c} z^{-n_c} \quad (4)$$

として定義する。ただし、 z^{-1} は 1 ステップ後退作用素とする。また、 $\{y(k)\}$ と $\{u(k)\}$ はスカラーのシステム（プラント）出力列および制御入力列とし、 $\{\xi(k)\}$ は零平均正規性白色過程でその分散を

$$E[\xi(k)\xi(j)] = r\delta_{kj} \quad (5)$$

とし、 $\Delta = 1 - z^{-1}$ である。ここで、 r は未知とする。この仮定から $\phi(k) \triangleq \xi(k)/\Delta$ はブラウン運動となり、出力データ $\{y(k)\}$ は非定常となることに注意されたい。さらに、各多項式の係数はここでは既知とし、それらの次数関係は $n_a \geq n_b$, $n_a \geq n_c$ としておく。

3. イノベーションモデルと j 段出力プレディクタ

考察する状態空間モデルは CARIMA 系の状態空間手法による LQG 制御器や極配置制御器の設計でよく利用されているイノベーションモデル^{9), 10)}（または予測モデル）である。

3.1 直接出力法

(1) 式のモデルを $\Delta u(k-1)$ あるいは $\Delta u(k)$ を増分制御入力とするモデルに書き換えると、

$$A'(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})\Delta u(k-1) + C(z^{-1})\xi(k) \quad (6a)$$

または

$$A'(z^{-1})y(k) = B'(z^{-1})\Delta u(k) + C(z^{-1})\xi(k) \quad (6b)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} A'(z^{-1}) &= \Delta A(z^{-1}) \\ &= 1 + a'_1 z^{-1} + a'_2 z^{-2} + \cdots + a'_{n_a+1} z^{-(n_a+1)} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} B'(z^{-1}) &= z^{-1}B(z^{-1}) \\ &= b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2} + \cdots + b_{n_b} z^{-(n_b+1)} \end{aligned} \quad (8)$$

であり、 $\{a'_i\}$, $i = 1, \dots, n_a+1$ は以下ようになる。

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_1 - 1 \\ a'_i &= a_i - a_{i-1} \quad \text{for } i = 2, \dots, n_a \\ a'_{n_a+1} &= -a_{n_a} \end{aligned} \quad (9)$$

すると、(6b) 式はオブザーバ標準形⁹⁾の状態空間イノベーションモデル

$$x(k+1) = Fx(k) + G\Delta u(k) + K\xi(k) \quad (10a)$$

$$y(k) = Hx(k) + \xi(k) \quad (10b)$$

に変換できる。ただし、 $x(k)$ は $n \triangleq n_a + 1$ 次元の状態ベクトルであり各行列 F, G, K, H は

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} -a'_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a'_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a'_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a'_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} c_1 - a'_1 \\ c_2 - a'_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} - a'_{n-1} \\ c_n - a'_n \end{bmatrix}, \quad H = \overbrace{[1, 0, \dots, 0]}^n \end{aligned}$$

となる。ここで、 $i > n_b$ に対して $b_i = 0$ および $i > n_c$ に対して $c_i = 0$ である。

(10) 式のモデルに基づく 1 段状態予測値 $\hat{x}(k) \triangleq \hat{x}(k|k-1) = E[x(k)|Y_{k-1}, \Delta U_{k-2}]$ は定常カルマンプレディクタから

$$\hat{x}(k+1) = F\hat{x}(k) + G\Delta u(k) + K\nu(k) \quad (11)$$

$$\nu(k) = y(k) - H\hat{x}(k) \quad (12)$$

として得られる。ただし、 $Y_{k-1} \triangleq \{y(0), \dots, y(k-1)\}$, $\Delta U_{k-2} \triangleq \{\Delta u(0), \dots, \Delta u(k-2)\}$ とする。このプレディクタは、周知のように定常状態での予測誤差共分散 $P(k|k-1) \triangleq E[(x(k) - \hat{x}(k))[x(k) - \hat{x}(k)]^T]$ を零にするもの、つまり $\lim_{k \rightarrow \infty} P(k|k-1) = 0$ を保証するものである^{11), 12)}。この 1 段プレディクタの一般形、すなわち時刻 k で $\hat{x}(k)$ を初期値としたときの時刻 $k+j$ への遷移は簡単な計算から

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+j) &= F^j \hat{x}(k) + \sum_{i=0}^{j-1} F^{j-1-i} G \Delta u(k+i) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{j-1} F^{j-1-i} K \nu(k+i) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。したがって、 $\{Y_k, \Delta U_{k-1}\}$ が与えられたときの $\hat{x}(k+j)$ の制御入力偏差 $\Delta u(\cdot)$ に関する閉ループ予測値は

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+j|k) &\triangleq E[\hat{x}(k+j)|Y_k, \Delta U_{k-1}] \\ &= F^j \hat{x}(k) + \sum_{i=0}^{j-1} F^{j-1-i} G \Delta u(k+i) \\ &\quad + F^{j-1} K \nu(k) \end{aligned} \quad (14)$$

となる。ただし、 $\{\Delta u(k), \dots, \Delta u(k+j-1)\}$ と $\nu(k)$ は $\{Y_k, \Delta U_{k-1}\}$ 可能であり、 $i \geq 1$ に対して $E[\nu(k+i)|Y_k, \Delta U_{k-1}] = 0$ である。ゆえに、 $\hat{y}(k+j) \triangleq H\hat{x}(k+j)$ とするとき j 段出力予測値は

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+j|k) &\triangleq E[\hat{y}(k+j)|Y_k, \Delta U_{k-1}] = H\hat{x}(k+j|k) \\ &= H F^j \hat{x}(k) + \sum_{i=0}^{j-1} H F^{j-1-i} G \Delta u(k+i) \\ &\quad + H F^{j-1} K \nu(k) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。

3.2 出力偏差法

直接出力法は、データ $\{\Delta u(k)\}$ と $\{y(k)\}$ を用いて状態変数 $x(k)$ を推定し、出力 $y(k)$ の j 段予測値を直接求めるものであった。しかし、この方法での状態空間変数の次元は CARIMA モデルの最高次数 (ここでは、 n_a) + 1 のものであり、したがって多入力・多出力系では、変換されるイノベーションモデルの状態変数の次元が増大し、またその間接法による適応系では直接 a_i を同定する必要があることからパラメータの個数も増大する。ここでは、制御入力偏差データ $\{\Delta u(k)\}$ と出力偏差データ $\{\Delta y(k)\}$ を用いて状態変数の偏差 $\Delta x(k)$ を推定し、間接的に出力 $y(k)$ の j 段予測値を求める方法を考える。

(6b) 式において、 $\Delta y(k)$ を出力偏差 (あるいは増分) データと見なせば

$$A(z^{-1})\Delta y(k) = B'(z^{-1})\Delta u(k) + C(z^{-1})\xi(k) \quad (16)$$

と書ける。これをオブザーバ標準形の状態空間予測モデルにすると

$$\Delta x(k+1) = \bar{F}\Delta x(k) + \bar{G}\Delta u(k) + \bar{K}\xi(k) \quad (17a)$$

$$\Delta y(k) = \bar{H}\Delta x(k) + \xi(k) \quad (17b)$$

となる。ただし、 $\Delta x(k)$ は n_a 次元の状態ベクトルであり各行列 $\bar{F}$, $\bar{G}$, $\bar{K}$, $\bar{H}$ は

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n_a-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{n_a} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n_a-2} \\ b_{n_a-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ \vdots \\ c_{n_a-1} - a_{n_a-1} \\ c_{n_a} - a_{n_a} \end{bmatrix}, \quad \bar{H} = \overbrace{[1, 0, \cdots, 0]}^{n_a}$$

となる。ここで、 $i > n_b$ に対して $b_i = 0$ および $i > n_c$ に対して $c_i = 0$ である。

上記のモデルに基づく 1 段予測型カルマンプレディクタは

$$\Delta \hat{x}(k+1) = \bar{F}\Delta \hat{x}(k) + \bar{G}\Delta u(k) + \bar{K}\nu(k) \quad (18)$$

$$\nu(k) = \Delta y(k) - \bar{H}\Delta \hat{x}(k) \quad (19)$$

で与えられる。ただし、 $\Delta \hat{x}(k)$ は $\Delta Y_{k-1} \triangleq \{\Delta y(0), \dots, \Delta y(k-1)\}$ と ΔU_{k-2} が得られたときの $\Delta x(k)$ の 1 段

予測値、 $\Delta \hat{x}(k) \triangleq \Delta \hat{x}(k|k-1) = E[\Delta x(k)|\Delta Y_{k-1}, \Delta U_{k-2}]$ である。いま

$$\Delta \hat{x}(k+1) \triangleq \hat{x}(k+1) - \hat{x}(k) \quad (20)$$

を定義するとき、(18)~(20) 式を利用すれば、 $\Delta \hat{x}(k)$ から出発したときの時刻 $k+j$ への $\hat{x}(k)$ の遷移は

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+j) = & \left[\sum_{i=0}^{j-1} \bar{F}^{j-1-i} \right] \bar{F}\Delta \hat{x}(k) + \hat{x}(k) \\ & + \sum_{i=0}^{j-1} \left[\sum_{l=i}^{j-1} \bar{F}^{j-1-l} \right] \bar{G}\Delta u(k+i) \\ & + \sum_{i=0}^{j-1} \left[\sum_{l=i}^{j-1} \bar{F}^{j-1-l} \right] \bar{K}\nu(k+i) \end{aligned} \quad (21)$$

と表現できる (付録 1 参照)。したがって、 $\{\Delta Y_k, \Delta U_{k-1}\}$ が与えられたときの $\hat{x}(k+j)$ の $\Delta u(\cdot)$ に関する閉ループ予測値は

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+j|k) \triangleq & E[\hat{x}(k+j)|\Delta Y_k, \Delta U_{k-1}] \\ = & \left[\sum_{i=0}^{j-1} \bar{F}^{j-1-i} \right] \bar{F}\Delta \hat{x}(k) + \hat{x}(k) \\ & + \sum_{i=0}^{j-1} \left[\sum_{l=i}^{j-1} \bar{F}^{j-1-l} \right] \bar{G}\Delta u(k+i) \\ & + \left[\sum_{i=0}^{j-1} \bar{F}^{j-1-i} \right] \bar{K}\nu(k) \end{aligned} \quad (22)$$

となる。ただし、 $\{\Delta u(k), \dots, \Delta u(k+j-1)\}$ と $\nu(k)$ は $\{\Delta Y_k, \Delta U_{k-1}\}$ 可測であり、 $i \geq 1$ に対して $E[\nu(k+i)|\Delta Y_k, \Delta U_{k-1}] = 0$ である。

本方法では、オリジナル出力の 1 段予測値は直接 (18), (19) 式から得られず、その代わり $\Delta \hat{y}(k+1) \triangleq E[\Delta y(k+1)|\Delta Y_k, \Delta U_{k-1}]$ が得られる。したがって、まず $\Delta \hat{y}(k+1)$ の二つの解釈について述べておく。

A) 予測値からの偏差と見なす場合: (17b), (20) 式から

$$\begin{aligned} \Delta \hat{y}(k+1) &= \bar{H}\Delta \hat{x}(k+1) \\ &= \bar{H}\hat{x}(k+1) - \bar{H}\hat{x}(k) \end{aligned} \quad (23)$$

を得る。いま、 $\Delta \hat{y}(k+1)$ を (20) 式と同様な解釈によってオリジナル出力の予測値 $\hat{y}(k) \triangleq \bar{H}\hat{x}(k)$ からの偏差:

$$\Delta \hat{y}(k+1) \triangleq \hat{y}(k+1) - \hat{y}(k) \quad (24)$$

とすれば直ちに

$$\hat{y}(k+1) = \bar{H}\hat{x}(k+1) \quad (25)$$

を得る。

B) フィルタ値からの偏差とみなす場合: この場合、

$$\Delta \hat{y}(k+1) \triangleq \hat{y}(k+1) - \hat{y}(k|k) \quad (26)$$

と見なす。ただし、 $\hat{y}(k|k) \triangleq \bar{H}\hat{x}(k|k)$ はオリジナル出力のフィルタ値とし、 $\hat{x}(k|k)$ は増分状態フィルタ値 $\Delta \hat{x}(k|k)$ から発生させるとする。すると、

$$\hat{y}(k+1) = \bar{H}\Delta \hat{x}(k+1) + \hat{y}(k|k) \quad (27)$$

となり、したがって、

$$\hat{y}(k+1) = \bar{H}\hat{x}(k+1) - \bar{H}\hat{x}(k) + \bar{H}\hat{x}(k|k) \quad (28)$$

となる。ただし、 $\hat{x}(k|k)$ はその増分型フィルタ式：

$$\Delta\hat{x}(k|k) = \Delta\hat{x}(k) + S\nu(k) \quad (29)$$

から

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k-1|k-1) + \Delta\hat{x}(k|k) \quad (30)$$

として求められる。ここで S は定常フィルタゲインで

$$S^T = [1, c_1, \dots, c_{n_a-1}], \quad c_i = 0 \text{ for } i > n_c \quad (31)$$

で与えられる¹⁰⁾。

なお、両手法の場合、 $j \geq 2$ の $\Delta u(\cdot)$ に関する閉ループ予測値 $\Delta\hat{x}(k+j|k) \triangleq E[\Delta x(k+j)|\Delta Y_k, \Delta U_{k-1}]$ および $\Delta\hat{y}(k+j|k) \triangleq E[\Delta y(k+j)|\Delta Y_k, \Delta U_{k-1}]$ の解釈については A の場合の考え方から

$$\Delta\hat{y}(k+j|k) \triangleq \hat{y}(k+j|k) - \hat{y}(k+j-1|k) \quad (32a)$$

$$\equiv \bar{H}\Delta\hat{x}(k+j|k) \quad (32b)$$

$$\Delta\hat{x}(k+j|k) \triangleq \hat{x}(k+j|k) - \hat{x}(k+j-1|k) \quad (33)$$

とする。

さて、A の場合におけるオリジナル出力の j 段予測値 $\hat{y}(k+j|k)$ は、

$$\hat{y}(k+j|k) = \bar{H}\hat{x}(k+j|k) \quad (34)$$

となることから (付録 2a), 上式に (22) 式を代入して

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+j|k) = & \left[\sum_{i=0}^{j-1} \bar{H}\bar{F}^{j-1-i} \right] \bar{F}\Delta\hat{x}(k) + \bar{H}\hat{x}(k) \\ & + \sum_{i=0}^{j-1} \left[\sum_{l=i}^{j-1} \bar{H}\bar{F}^{j-1-l} \right] \bar{G}\Delta u(k+i) \\ & + \left[\sum_{i=0}^{j-1} \bar{H}\bar{F}^{j-1-i} \right] \bar{K}\nu(k) \end{aligned} \quad (35)$$

となる。一方、B の場合は

$$\hat{y}(k+j|k) = \bar{H}\hat{x}(k+j|k) - \bar{H}\hat{x}(k) + \bar{H}\hat{x}(k|k) \quad (36)$$

† (40) 式の増分形を取ると

$$\Delta y(k) = \bar{H}\Delta x(k) + \Delta \xi'(k)$$

となる。 $\Delta \xi'(k)$ は定常雑音 $\xi'(k)$ の差、 $\Delta \xi'(k) = \xi'(k) - \xi'(k-1)$ であるので、平均零、分散 r の正規雑音となり、見かけ上 $\xi(k)$ の統計的性質と一致する。

†† 本論文のように、プラントパラメータが既知の下では両手法は推定理論上別のアルゴリズムとは言えない。しかし、プラントパラメータが未知の適応系の場合、間接法による設計では前者は拡張最小二乗法等により $A'(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ を同定せねばならないのに対し、後者は $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ を同定することになることから、ここではあえて別のアルゴリズムとして議論した。

となることから (付録 2b), 結局

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+j|k) = & \left[\sum_{i=0}^{j-1} \bar{H}\bar{F}^{j-1-i} \right] \bar{F}\Delta\hat{x}(k) + \bar{H}\hat{x}(k|k) \\ & + \sum_{i=0}^{j-1} \left[\sum_{l=i}^{j-1} \bar{H}\bar{F}^{j-1-l} \right] \bar{G}\Delta u(k+i) \\ & + \left[\sum_{i=0}^{j-1} \bar{H}\bar{F}^{j-1-i} \right] \bar{K}\nu(k) \end{aligned} \quad (37)$$

となる。

以上のように、出力偏差法においては増分状態変数 $\Delta x(k)$ の次元は CARIMA モデルの最高次数 n_a と等しい。しかし、本方法での j 段出力プレディクタの構造は、(15) 式と (35) 式 (あるいは (37) 式) の比較から分かるように直接出力法のものよりも幾分複雑である。

考察：(1) 式を非定常雑音 $\phi(k)$ を直接用いて、状態空間モデルで表現すると

$$x(k+1) = \bar{F}x(k) + \bar{G}u(k) + \bar{K}\phi(k) \quad (38)$$

$$y(k) = \bar{H}x(k) + \phi(k) \quad (39)$$

となる。(25) 式の結果から分かるように A の方法ではオリジナル出力を

$$y(k) = \bar{H}x(k) + \xi'(k), \quad \xi'(k) \sim N(0, r/2) \quad (40)$$

と見なした場合になっている[†]。しかし、実際には $\phi(k)$ は $\xi(k) \sim N(0, r)$ で駆動させられる非定常雑音であり、定常雑音 $\xi'(k)$ とは異なるものである。したがって、この方法は $\phi(k)$ が非定常の場合の一近似手法となる。

一方、B の方法では (17b) 式から

$$y(k+1) = \bar{H}\Delta x(k+1) + y(k) + \xi(k+1) \quad (41)$$

と書け、上式の両辺の $\{\Delta Y_k, \Delta U_{k-1}\}$ の条件付き期待値を取ると、直接 (27) 式が得られる。このように、B の方法では推定理論上の不整合性はない。

上記のことから、直接出力法と出力偏差法 B から得られる j 段出力予測値は確率的推定理論上等価であることが分かる^{††}。さらに、 $\phi(k)$ の定常増分が大きい場合 (すなわち r が大きい場合)、それらの方法による j 段出力プレディクタの推定性能は、出力偏差法 A に基づくものよりも良好であることは明らかである。しかし、 $\phi(k)$ の定常増分が小さい場合には、近似手法である出力偏差法 A に基づく j 段出力プレディクタも十分利用できるものと思われる。

4. 一般化予測制御アルゴリズム

ここでは、次の制御コスト関数を考える。

$$\begin{aligned} J = E \left\{ \sum_{j=1}^N [y(k+j) - w(k+j)]^2 \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^N \lambda(j) [\Delta u(k+j-1)]^2 \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

ただし、 $w(\cdot)$ は目標値 (または設定値)、 N は最大予測区間、 $\lambda(\cdot)$ は制御入力偏差に関する重み関数とする。いま、

$$\begin{aligned} y &\triangleq [y(k+1), y(k+2), \dots, y(k+N)]^T \\ w &\triangleq [w(k+1), w(k+2), \dots, w(k+N)]^T \\ \Lambda &\triangleq \text{diag}\{\lambda(1), \lambda(2), \dots, \lambda(N)\} \\ u &\triangleq [\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+N-1)]^T \end{aligned}$$

を導入し、時刻 k で得られている情報を F_k とすると、(42) 式は

$$\begin{aligned} J &= E\{\|y-w\|^2 + \|u\|_{\Lambda}^2\} \\ &= E\{E[\|y-w\|^2 + \|u\|_{\Lambda}^2 | F_k]\} \end{aligned} \quad (43)$$

となる。ただし、直接出力法に対しては $F_k \triangleq \{Y_k, \Delta U_{k-1}\}$ 、出力偏差法に対しては $F_k \triangleq \{\Delta Y_k, \Delta U_{k-1}\}$ と見なす。したがって、(43) 式の最小化は次の J' の最小化と等価になる。

$$\begin{aligned} J' &= E\{\|\hat{y}-w\|^2 + \|u\|_{\Lambda}^2\} \\ &= \|\hat{y}-w\|^2 + \|u\|_{\Lambda}^2 \end{aligned} \quad (44)$$

ここで、

$$\hat{y} \triangleq [\hat{y}(k+1|k), \hat{y}(k+2|k), \dots, \hat{y}(k+N|k)]^T$$

とする。

4.1 直接出力法の場合

$\hat{y}$ は (15) 式を用いると

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \begin{bmatrix} HG \\ HFG & HG \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ HF^{N-1}G & HF^{N-2}G & \dots & HG \end{bmatrix} u \\ &+ \begin{bmatrix} HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^N \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{N-1} \end{bmatrix} K\nu(k) \end{aligned} \quad (45)$$

と表現できる。したがって、

$$\begin{aligned} L &\triangleq \begin{bmatrix} HG \\ HFG & HG \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ HF^{N-1}G & HF^{N-2}G & \dots & HG \end{bmatrix} \\ \tilde{M} &\triangleq \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{N-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を定義すると、グローバル予測値 $\hat{y}$ は

$$\hat{y} = Lu + \tilde{M}F\hat{x}(k) + \tilde{M}K\nu(k) \quad (46)$$

となる。(46) 式を (44) 式へ代入して u に関する最小化を行なえば

$$u = [L^T L + \Lambda]^{-1} L^T [w - \tilde{M}F\hat{x}(k) - \tilde{M}K\nu(k)] \quad (47)$$

となる。最終的に、時刻 k での制御量は再帰表現で

$$u(k) = u(k-1) + \bar{L}[w - \tilde{M}F\hat{x}(k) - \tilde{M}K\nu(k)] \quad (48)$$

として得られる。ただし、 $\bar{L}$ は $[L^T L + \Lambda]^{-1} L^T$ の第一行要素を示している。

4.2 出力偏差法の場合

A の場合、 $\hat{y}$ は (35) 式を用いると

$$\hat{y} = L^* u + M^* \bar{F} \Delta \hat{x}(k) + H^* \hat{x}(x) + M^* \bar{K} \nu(k) \quad (49)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} L^* &\triangleq \begin{bmatrix} \bar{H}\bar{G} \\ \bar{H}\bar{F}\bar{G} + \bar{H}\bar{G} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{N-1}\bar{G} + \bar{H}\bar{F}^{N-2}\bar{G} + \dots + \bar{H}\bar{G} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{N-2}\bar{G} + \dots + \bar{H}\bar{G} \quad \dots \quad \bar{H}\bar{G} \end{bmatrix} \\ M^* &\triangleq \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} + \bar{H} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{N-1} + \bar{H}\bar{F}^{N-2} + \dots + \bar{H} \end{bmatrix} \\ H^* &\triangleq \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H} \\ \vdots \\ \bar{H} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。結局、(49) 式を (44) 式へ代入して u に関する最小化を行なえば時刻 k での制御量は

$$\begin{aligned} u(k) &= u(k-1) + \bar{L}[w - M^* \bar{F} \Delta \hat{x}(k) \\ &\quad - H^* \hat{x}(k) - M^* \bar{K} \nu(k)] \end{aligned} \quad (50)$$

として求まる。ただし、 $\bar{L}$ は $[L^{*T} L^* + \Lambda]^{-1} L^{*T}$ の第一行要素を示している。

なお、B の場合は (50) 式において $H^* \hat{x}(k)$ を $H^* \hat{x}(k|k)$ に置き換えたものになる。

5. 数値例題

三つの j 段状態空間出力プレディクタを用いた GPC の制御性能をシミュレーションによって比較するために、

以下のシステムを考える。

$$\begin{aligned} y(k) - 2.1y(k-1) + 0.7y(k-2) \\ = u(k-1) + 1.5u(k-2) + \phi(k) + 0.5\phi(k-1) \end{aligned} \quad (51)$$

ただし、非定常雑音 $\phi(k)$ は

$$\phi(k) = \phi(k-1) + \xi(k), \quad \xi(k) \sim N(0, r) \quad (52)$$

で発生させるとする。このシステムは、 $z = 0.416$, $z = 1.68$ に (不安定) 極を持ち、しかも不安定零点を持つ。まず、直接出力法では (10) 式を用いると、上記のシステムはオブザーバ標準形：

$$\begin{aligned} x(k+1) = \begin{bmatrix} 3.1 & 1 & 0 \\ -2.8 & 0 & 1 \\ 0.7 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u(k) \\ + \begin{bmatrix} 3.6 \\ -2.8 \\ 0.7 \end{bmatrix} \xi(k) \end{aligned} \quad (53)$$

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad 0] x(k) + \xi(k) \quad (54)$$

に変換できる。つぎに、出力偏差法においては、(17) 式を用いると (51) 式のモデルは以下のように変換できる。

$$\begin{aligned} \Delta x(k+1) = \begin{bmatrix} 2.1 & 1 \\ -0.7 & 0 \end{bmatrix} \Delta x(k) + \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \end{bmatrix} \Delta u(k) \\ + \begin{bmatrix} 2.6 \\ -0.7 \end{bmatrix} \xi(k) \end{aligned} \quad (55)$$

$$\Delta y(k) = [1 \quad 0] \Delta x(k) + \xi(k) \quad (56)$$

目標値 $w(k)$ は、振幅 ± 5 、周期 40 サンプリングの矩形波とした。なお、以下のシミュレーションでは重み行列 Λ の対角要素は $\lambda(i) = 1.0$, $i = 1, \dots, N$ として固定した。

Fig. 1 には、 $r = 0.1$, $N = 4$ の場合に直接出力法、あるいは出力偏差法 B に基づく GPC の制御結果を示している。Fig. 2 には、この場合の出力偏差法 A に基づく GPC の制御結果を示している。これらの図から明らかに、40 サンプリング以降出力偏差法 A による GPC の出力追従性能は良くないことがわかる。この原因は、3. の考察でも述べたように、出力偏差法 A による j 段出力プレディクタは雑音 $\phi(k)$ の非定常性を厳密に考慮していないことによるものと思われる。さらに、Table 1 には予測区間 N を変化させたときの出力誤差 $e(k) \triangleq y(k) - w(k)$ と制御入力 $u(k)$ の分散を載せてある。ただし、直接出力法を DOM (Direct Output Method)、出力偏差法 A を ODM (Output Deviation Method)-A、出力偏差法 B を ODM-B で示している。

Fig. 1 Control results using a GPC based on the direct output method (or the output deviation method B), where $r = 0.1$ and $N = 4$

Fig. 2 Control results using a GPC based on the output deviation method A, where $r = 0.1$ and $N = 4$

Table 1 Control performances for a case of $r = 0.1$

	Variance of $e(t)$		Variance of $u(t)$	
	DOM (or ODM-B)	ODM-A	DOM (or ODM-B)	ODM-A
$N = 2$	1.5926	2.6613	1.6060	1.8028
$N = 4$	1.5432	2.6610	1.5058	1.7132
$N = 6$	1.6079	2.7370	1.4766	1.6814
$N = 8$	1.6181	2.7414	1.4730	1.6766
$N = 10$	1.6252	2.7338	1.4659	1.6734

Fig. 3 Control results using a GPC based on the direct output method (or the output deviation method B), where $r = 0.01$ and $N = 4$

Fig. 4 Control results using a GPC based on the output deviation method A, where $r = 0.01$ and $N = 4$

Table 2 Control performances for a case of $r = 0.01$

	Variance of $e(t)$		Variance of $u(t)$	
	DOM (or ODM-B)	ODM-A	DOM (or ODM-B)	ODM-A
$N=2$	1.0261	1.1419	1.1125	1.1352
$N=4$	1.0009	1.1317	1.0277	1.0538
$N=6$	1.0576	1.1922	0.9849	1.0100
$N=8$	1.0672	1.2008	0.9815	1.0054
$N=10$	1.0763	1.2015	0.9735	1.0019

この表から、 N を増加させると制御入力の分散は小さくなるが、出力追従誤差は必ずしも改善されないことに気付く。

Fig. 3, 4 には雑音 $\phi(k)$ の非定常性の影響を調べるために、 $r = 0.01$, $N = 4$ の場合の結果を示してある。これらの図から分かるように、直接出力法（あるいは出力偏差法 B）と出力偏差法 A による GPC の制御性能

Fig. 5 Control results using a GPC based on the direct output method (or the output deviation method B), where a step-wise disturbance with the magnitude of 5.0 was applied to the plant at $60 \leq k < 80$

Fig. 6 Control results using a GPC based on the output deviation method A, where a step-wise disturbance with the magnitude of 5.0 was applied to the plant at $60 \leq k < 80$

は、かなり類似したものになっている。したがって、 r が小さい場合には近似手法に基づく出力偏差法 A による GPC も十分利用できる。さらに、この事実 Table 2 の分散評価の結果からも確認できる。

最後に、負荷外乱に対する制御システムのロバスト性を調べるために、雑音 $\phi(k)$ を $\phi(k) \sim N(0, 0.1)$ に従う定常正規性雑音と置き換え、 $60 \leq k < 80$ で $d = 5.0$ のステップ状外乱が加わる場合を考える。Fig. 5, 6 には、 $N = 4$ のもとでのそれぞれの GPC の制御結果を示してある。この場合、 $60 \leq k < 80$ では雑音 $\phi(k)$ とステップ外乱 d を一つの新しい雑音 $\phi'(k)$ とみなせば明らかに $E[\phi'(k)] \neq 0$ であるので、平均零の定常雑音を扱うものと近似した出力偏差法 A による GPC の制御性能は良くないことが分かる。これに対して、直接出力法（あるいは出力偏差法 B）による GPC は、外乱に対してロバストな出力追従が可能である。

6. おわりに

本論文では 1 入力・1 出力離散時間 CARIMA 系の状態空間手法による一般化予測制御 (GPC) の設計法について述べた。イノベーションモデルに基づく 1 段カルマンプレディクタの設計では、直接プラントの出力を用いる直接出力法と、プラント出力の偏差（または増分）を用いる出力偏差法を示した。さらに、出力偏差法においては、出力偏差の予測値の解釈の違いにより、異なる二つの j 段出力プレディクタが設計できることを明らかにした。また、これら三つの推定法を組み込んだ GPC を設計し、シミュレーションによりそれらの比較・検討を行なった。それによると、基本的には直接出力法による GPC と出力偏差 B による GPC が推定理論上等価であり、雑音 $\phi(k)$ の非定常性が強い場合には、それらの方法による GPC の制御性能は出力偏差法 A によるものよりも良好であるが、その非定常性が弱い場合にはあまりそれらの差異は見られないことが分かった。また、外乱に対するロバスト性の点では直接出力法（あるいは出力偏差法 B）による GPC が非定常雑音の影響を厳密に考慮していることから性能上優れていることも確認できた。

現在、本結果のセルフチューニングの場合や非正規性雑音に対してロバストな設計について検討中である。

参 考 文 献

- 1) 高津：内部モデル予測制御；コンピュータール，No. 27, pp. 51~58 (1989)
- 2) 西谷：モデル予測制御の応用；計測と制御，Vol. 28, No. 11, pp. 54~62 (1989)
- 3) R. M. C. De Keyser, P. H. G. A. Van de Velde and F. A. G. Dumortier：A Comparative Study of Self-Adaptive Long-Range Predictive Control Methods；Automatica, Vol. 24, No. 2, pp. 149~163 (1988)
- 4) C. E. Garcia, D. M. Prett and M. Morari：Model Predictive Control：Theory and Practice—a Survey；Automatica, Vol. 25, No. 3, pp. 335~348 (1989)
- 5) D. W. Clarke and L. Zhang：Long-Range Predictive Control Using Weighting-Sequence Models；IEE Proceedings Pt. D, Vol. 134, No. 3, pp. 187~195 (1987)
- 6) D. W. Clarke, C. Mohtadi and P. S. Tuffs：Generalized Predictive Control—Part I, The Basic Algorithm；Automatica, Vol. 23, No. 2, pp. 137~148 (1987)
- 7) D. W. Clarke, C. Mohtadi and P. S. Tuffs：Generalized Predictive Control—Part II, Extensions and Interpretations；Automatica, Vol. 23, No. 2, pp. 149~160 (1987)
- 8) R. M. C. De Keyser and A. R. Van Cauwenberghe：A Self-Tuning Multistep Predictor Application；Automatica, Vol. 17, No. 1, pp. 167~174 (1981)
- 9) G. C. Goodwin and K. S. Sin：Adaptive Filtering Prediction and Control, Prentice-Hall (1984)
- 10) K. Warwick：Optimal Observers for ARMA Models；Int. J. Control, Vol. 46, No. 5, pp. 1493~1503 (1987)
- 11) R. Scattolini：A Multivariable Self-Tuning Controller with Integral Action；Automatica, Vol. 22, No. 6, pp. 619~627 (1986)
- 12) P. E. Caines：Relationship between Box-Jenkins-Åström Control and Kalman Linear Regulator；Proc. IEE, Vol. 119, No. 5, pp. 615~620 (1972)

付 録

付録 1 (21) 式の証明

まず、(18), (19) 式の一般形は (13) 式と類似して、以下ようになる。

$$\Delta \hat{x}(k+j) = \bar{F}^j \Delta \hat{x}(k) + \sum_{i=0}^{j-1} \bar{F}^{j-1-i} \bar{G} \Delta u(k+i) + \sum_{i=0}^{j-1} \bar{F}^{j-1-i} \bar{K} v(k+i) \quad (A1)$$

また、 $\hat{x}(k+j)$, $j = 1, 2, \dots$ は (18)~(20) 式と上記の関係を用いると次のように書ける。

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \bar{F} \Delta \hat{x}(k) + \hat{x}(k) + \bar{G} \Delta u(k) + \bar{K} v(k) \\ \hat{x}(k+2) &= \bar{F} \Delta \hat{x}(k+1) + \hat{x}(k+1) + \bar{G} \Delta u(k+1) + \bar{K} v(k+1) \\ &= \bar{F} \{ \bar{F} \Delta \hat{x}(k) + \bar{G} \Delta u(k) + \bar{K} v(k) \} \\ &\quad + \bar{F} \Delta \hat{x}(k) + \hat{x}(k) + \bar{G} \Delta u(k) + \bar{K} v(k) \\ &\quad + \bar{G} \Delta u(k+1) + \bar{K} v(k+1) \\ &= [\bar{F} + I] \bar{F} \Delta \hat{x}(k) + \hat{x}(k) \\ &\quad + [\bar{F} + I] \bar{G} \Delta u(k) + \bar{G} \Delta u(k+1) \\ &\quad + [\bar{F} + I] \bar{K} v(k) + \bar{K} v(k+1) \\ \hat{x}(k+3) &= \bar{F} \Delta \hat{x}(k+2) + \hat{x}(k+2) + \bar{G} \Delta u(k+2) + \bar{K} v(k+2) \\ &= \bar{F} \{ \bar{F}^2 \Delta \hat{x}(k) + \bar{F} \bar{G} \Delta u(k) + \bar{G} \Delta u(k+1) + \bar{F} \bar{K} v(k) + \bar{K} v(k+1) \} \\ &\quad + [\bar{F} + I] \bar{F} \Delta \hat{x}(k) + \hat{x}(k) \\ &\quad + [\bar{F} + I] \bar{G} \Delta u(k) + \bar{G} \Delta u(k+1) \\ &\quad + [\bar{F} + I] \bar{K} v(k) + \bar{K} v(k+1) \\ &\quad + \bar{G} \Delta u(k+2) + \bar{K} v(k+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\bar{F}^2 + \bar{F} + I] \bar{F} \Delta \hat{x}(k) + \hat{x}(k) \\
&\quad + [\bar{F}^2 + \bar{F} + I] \bar{G} \Delta u(k) \\
&\quad + [\bar{F} + I] \bar{G} \Delta u(k+1) + \bar{G} \Delta u(k+2) \\
&\quad + [\bar{F}^2 + \bar{F} + I] \bar{K} \nu(k) \\
&\quad + [\bar{F} + I] \bar{K} \nu(k+1) + \bar{K} \nu(k+2)
\end{aligned}$$

ゆえに、最終結果 (21) 式を得る。

付録 2 a (34) 式の証明

$j=2$ に対して、(32), (33) 式から次を得る。

$$\begin{aligned}
\hat{y}(k+2|k) &= \bar{H} \Delta \hat{x}(k+2|k) + \hat{y}(k+1|k) \\
&= \bar{H} \hat{x}(k+2|k) - \bar{H} \hat{x}(k+1|k) \\
&\quad + \hat{y}(k+1|k) \quad (A2)
\end{aligned}$$

$\hat{y}(k+1|k) \equiv \hat{y}(k+1)$ および $\hat{x}(k+1|k) \equiv \hat{x}(k+1)$ であるので、(A2) 式で (25) 式を用いると

$$\hat{y}(k+2|k) = \bar{H} \hat{x}(k+2|k) \quad (A3)$$

を得る。つぎに、 $j=3$ に対しては (32), (33) 式から

$$\begin{aligned}
\hat{y}(k+3|k) &= \bar{H} \Delta \hat{x}(k+3|k) + \hat{y}(k+2|k) \\
&= \bar{H} \hat{x}(k+3|k) - \bar{H} \hat{x}(k+1|k) \\
&\quad + \hat{y}(k+2|k) \quad (A4)
\end{aligned}$$

を得、上式で (A3) 式の関係を利用すれば

$$\hat{y}(k+3|k) = \bar{H} \hat{x}(k+3|k) \quad (A5)$$

を得る。以下、同様にして一般形 $\hat{y}(k+j|k) = \bar{H} \hat{x}(k+j|k)$, $j \geq 2$ を得る。

付録 2 b (36) 式の証明

$j=2$ に対して、(A2) 式において、 $\hat{y}(k+1|k) \equiv \hat{y}(k+1)$ に (28) 式を代入して

$$\hat{y}(k+2|k) = \bar{H} \hat{x}(k+2|k) - \bar{H} \hat{x}(k) + \bar{H} \hat{x}(k|k) \quad (A6)$$

を得る。つぎに、 $j=3$ に対して (A4) 式中の $\hat{y}(k+2|k)$ の項に上式を代入すれば

$$\hat{y}(k+3|k) = \bar{H} \hat{x}(k+3|k) - \bar{H} \hat{x}(k) + \bar{H} \hat{x}(k|k) \quad (A7)$$

を得る。以下、同様にして最終結果 $\hat{y}(k+j|k) = \bar{H} \hat{x}(k+j|k) - \bar{H} \hat{x}(k) + \bar{H} \hat{x}(k|k)$, $j \geq 2$ を得る。