システム制御情報学会論文誌, 5 巻, 1 号, pp. 1~8 (1992)

歩行シミュレーションにおける相互作用計算

中村 達也・小谷内範穂・安達 弘典

歩行ロボットの汎用シミュレータの開発を目的として, ロボットの運動を連続的にシミュレートするための, 足と環境との衝突および摩擦を含む相互作用の一般的な計算法を示す. 本方法は, 任意自由度を持つ任意個の脚からなるスケルトンで定義された歩行ロボット, 平坦な面を持つパッチからなる環境に対し, 非拘束, 面拘束, 点拘束の 3 種類の拘束状態を扱うことができる. また歩行動作の進行とともに, 足と環境との干渉および反力に基づき拘束状態の変化を自動的に計算できる. シミュレーション例により有効性を検証する.

システム制御情報学会論文誌, 5 巻, 1 号, pp. 9~17 (1992)

ニューラルネットワークによる回転不変パターン認識システムとそのコイン認識への応用

福見 稔・大松 繁
竹田 史章・小坂 利寿

著者らは, ニューラルネットにより構成された入力パターンの位置ずれと 90 度ごとの回転に対して不変なパターン認識システムをすでに提案している. 本論文では, 従来のシステムを拡張し, 入力パターンの様々な回転に対して不変なパターン認識システムを構成する. そして, 実システムへの応用として, 大きさのほとんど同じ 500 円硬貨と 500 ウォン硬貨の識別を行い, 提案される回転不変パターン認識システムの有効性を示す.

システム制御情報学会論文誌, 5 巻, 1 号, pp. 18~23 (1992)

行列ポリトープの安定度下界とその応用 — 離散時間の場合

小亀 英己・木田 浩・森 武宏

システムの特性行列が不確定性をもっており, あるポリトープの要素であるとし知られていない場合のロバスト安定性の研究は実システムへの応用という観点からも重要な意味をもっている. 本論文の立場は, 安定性の定量的概念である安定度を行列ポリトープに対して定義し, その安定度下界の評価法から安定判別法を与えようとする.

本論文では離散時間システムを対象とする. すでに報告した連続時間系に対する下界評価法が離散時間系の場

合にもほぼ平行した形で得られることを確かめる. すなわち m 個の正定値対称行列とポリトープの頂点集合 (k 個の要素をもつとする) から定まる $m \times k$ 行列 F を計算すれば, これを支払い行列とするある零和二人ゲームの値として安定度下界が得られる. またロバスト安定解析法として見たとき, このゲームの最適解としてポリトープに共通なリアプノフ関数が得られることも連続系の場合と同様である. また大規模不確定システムの安定解析への適用可能性を示した.

システム制御情報学会論文誌, 5 巻, 1 号, pp. 24~33 (1992)

自動工具交替装置を備えたフレキシブル生産セルの解析

高 弘 昇・滝根 哲哉
高橋 豊・長谷川利治

自動工具交替装置を備えた NC 機械からなる FMC システムを考え, 二つの種類の加工材料を対象に, NC 機械におけるスイッチング時間がシステム性能に及ぼす影響を分析した. システムを離散時間 $M/G/1/K$ 待ち行列としてモデル化し厳密な性能解析を行った. 待ち行列における平均待ち時間, 平均応答時間とその分散などの性能尺度を求め, その結果, スwitching 時間が性能に与える影響の大きいことが判明した.

システム制御情報学会論文誌, 5 巻, 1 号, pp. 34~39 (1992)

可能性分布の同定とその判別分析への応用

田中 英夫・石渕 久生・林 勲

本論文はエキスパートによって与えられたデータに基づく可能性分布の同定手法を提案し, 可能性分布の観点から可能性判別規則を導いている. 本手法は線形計画法によっているので, 二次関数として定義された可能性分布を容易に得ることができる. 可能性分布から最適な可能性判別規則を求め, これによるファジィ if-then ルールを構成している. 可能性判別規則はベイズ判別規則に対応している. 本手法を説明するために, 数値例として判別問題が示されている.

行列ポリトープの安定度下界とその応用—離散時間の場合*

小 亀 英 己**・木 田 浩**・森 武 宏***

A Lower Bound of the Degree of Stability for a Matrix Polytope and Its Applications —Discrete-Time Case**

Hideki KOKAME**, Hiroshi KIDA** and Takehiro MORI***

The present paper is concerned with the robust stability of discrete-time plants when the characteristic matrix is known to be an element of a polytope of matrices. A lower bound of the degree of stability is presented which has a close parallelism to the continuous-time case. That is, the lower bound is expressed as the value of a two-person zero-sum game. Further the optimal solution provides a Lyapunov function common to all the elements of the polytope. Application to stability analysis of uncertain large-scale systems is discussed.

1. はじめに

行列ポリトープの安定問題は、状態空間モデルにおける構造的な不確かさを表現する手段としての重要性から、また多項式ポリトープに対するエッジ定理¹⁾と呼ばれる簡潔な安定定理との対応を求める立場から、ロバスト安定性研究の一課題として研究者の注目を集めつつある^{2)~5)}。しかしながら行列ポリトープに対する手近な安定判別法は未だ見いだされておらず、数値的最適化に拠るか^{4),5)}、十分条件で満足させるを得ない。

筆者らはリアプノフ関数の生成を合理的に行おうとする意図から、複数の正定値対称行列

$$\Pi = \{P_i \in R^{n \times n} : i = 1, \dots, m\} \quad (1)$$

を用いる計算が容易な一つの安定基準を提案した⁶⁾。

また参考文献7)では行列ポリトープ

$$G = \{A = u_1 A_1 + \dots + u_k A_k : u \in \Omega_k\} \quad (2)$$

に指数安定度を定義し、正定値対称行列からその安定度

下界を与えようとした。ここで $A_1, \dots, A_k$ はポリトープ G の頂点行列である。また Ω_r は、正の整数 r に対して、次のような r 次元ベクトルの集合を表わすものとしている。

$$\Omega_r = \{x \in R^r : \sum_{i=1}^r x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, r\}$$

同文献中では正定値対称行列の組 Π に対してその凸包

$$C(\Pi) = \{v_1 P_1 + v_2 P_2 + \dots + v_m P_m : v \in \Omega_m\}$$

の中で最大の下界を求める立場から、次の最大最小問題

$$\frac{1}{2} \max_{v \in \Omega_m} \min_{u \in \Omega_k} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k v_i u_j \lambda_{\min}(Q_{ij})$$

$$Q_{ij} = -(A_j^T P_i + P_i A_j), \quad i = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, k$$

を導き、問題の最適値が安定度の下界を与えること、この下界が正という条件は参考文献6)の安定基準と等価であること、またゲームの最適変数から行列ポリトープ G の要素行列に共通のリアプノフ関数が得られることなどを示した。

本論文の目的は、離散時間系の場合にも、適当な安定度を採用すれば、

$$Q_{ij} = P_i - A_j^T P_i A_j, \quad i = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, k$$

と置き換えて、係数を除いた上の最大最小問題の最適値

* 原稿受付 1991.2.13.

** 大阪工業大学 電気工学教室 Department of Engineering, Osaka Institute of Technology ; Ohmiya, Asahi-ku, Osaka 535, JAPAN

*** 京都工芸繊維大学 工学学部 Department of Electronics and Information Science, Kyoto Institute of Technology ; Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto 535, JAPAN

Key Words : matrix polytope, discrete-time, robust stability, zero-sum game, large-scale systems.

が安定度下界を与えることを示すことである。この結論から連続時間系の場合に平行した結果が導かれる。また不確定大規模システムの安定解析への適用について論議する。

以後、 I で単位行列を、対称行列 P に対して、 $P > 0$ ($P \geq 0$) で P が正定値 (非負定値) であることを表わす。二つの対称行列 P_1 と P_2 に対して、 $P_1 > P_2$ ($P_1 \geq P_2$) は $P_1 - P_2 > 0$ ($P_1 - P_2 \geq 0$) を表わす。 n 次正方行列 X の固有値を $\lambda_i(X)$, $i=1, \dots, n$ と書き、また X が対称行列であるとき、その最大固有値、最小固有値を $\lambda_{\max}(X)$, $\lambda_{\min}(X)$ で表わす。 n 次正定値対称行列 P に対して、 $\|\cdot\|_P$ でベクトルノルム

$$\|x\|_P = (x^T P x)^{1/2}, \quad x \in R^n$$

を表わす。特に $\|\cdot\|$ で $\|\cdot\|_I$ を表わす。

2. 指数安定度とその下界

線形定係数離散時間システム

$$x(k+1) = Ax(k), \quad x(k) \in R^n \quad (3)$$

に対して、任意の初期ベクトルを $x(0) = x_0$ として

$$\|x(k)\| \leq M \|x_0\| \mu_A^k \quad (4)$$

となる定数 M が存在することはよく知られた事実である。ここで μ_A は A スペクトル半径

$$\mu_A = \max_i |\lambda_i(A)| \quad (5)$$

である。(4) 式を根拠に、系 (3) の (指数) 安定度として $\bar{\theta}_A = 1 - \mu_A$ が採用されることも多いが、本論文では前節で述べた目的から、次の定義を使用する。

$$\theta_A = 1 - \mu_A^2 \quad (6)$$

もちろん正の安定度が系の漸近安定性を意味することに変わりはないことに注意しておく。

システムの特性行列 A がある行列集合 H の要素であるとししか知られていない場合には、この不確定システムの指数安定度を

$$\theta_H = \min_{A \in H} \theta_A = 1 - \max_{A \in H} \mu_A^2 \quad (7)$$

で定義することにする。

ここではポリトープ G の安定度 θ_G の下界に関心をもつ。基礎となる補題は不確かさのないシステム (3) の安定度下界を与える次の補題である。証明については付録 1 を参照されたい。

【補題 1】 $P \in R^{n \times n}$ は正定値対称行列であるとする。このとき

$$Q := P - A^T P A \quad (8)$$

とすれば、

$$\theta_A \geq \eta_1 := \lambda_{\min}(QP^{-1}) \quad (9a)$$

とくに、 $Q > 0$ のとき

$$\eta_1 \geq \eta_2 := \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \quad (9b)$$

(9a) 式は、 A が不安定であっても、安定度 $\theta_A < 0$ 、したがって $\eta_1 < 0$ としてそのまま成り立つことに注意する。また補題 1 の P に対して、次の差分不等式

$$\begin{aligned} \Delta \|x(k)\|_P &:= \|x(k+1)\|_P - \|x(k)\|_P \\ &\leq -\{1 - (1 - \eta_1)^{1/2}\} \|x(k)\|_P \end{aligned} \quad (10)$$

が成り立つ。実際、 $A^T P T = P - Q$ より

$$\begin{aligned} \Delta \|x(k)\|_P &= \{x^T(k) A^T P A x(k)\}^{1/2} - \{x^T(k) P x(k)\}^{1/2} \\ &= \left[\left\{ \frac{x^T(k) (P - Q) x(k)}{x^T(k) P x(k)} \right\}^{1/2} - 1 \right] \|x(k)\|_P \\ &\leq -[1 - \lambda_{\max}^{1/2}(I - QP^{-1})] \|x(k)\|_P \\ &\leq -[1 - \{1 - \lambda_{\min}(QP^{-1})\}^{1/2}] \|x(k)\|_P \end{aligned}$$

これより (10) 式を得る。

連続時間系の場合、ポリトープ G の任意の要素

$$A = \sum_{j=1}^k u_j A_j, \quad u \in \Omega_k$$

に対し、 $\bar{Q} = -(A^T P + P A)$ とすれば、 A に関する線形性より

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \sum_{j=1}^k u_j \bar{Q}_j \\ \bar{Q}_j &= -(A_j^T P + P A_j), \quad j=1, \dots, k \end{aligned}$$

したがって

$$\lambda_{\min}(\bar{Q}) \geq \sum_{j=1}^k u_j \lambda_{\min}(\bar{Q}_j)$$

の関係が成り立った。離散時間系の場合、 Q についての等式は成り立たないが、上の固有値不等式は依然として正しい。

【補題 2】 行列ポリトープ G の任意の要素

$$A = \sum_{j=1}^k u_j A_j, \quad u \in \Omega_k \quad (11)$$

に対し、 $Q = P - A^T P A$ とすれば

$$Q \geq \sum_{j=1}^k u_j Q_j \quad (12)$$

の関係が成立する。ただし

$$Q_j = P - A_j^T P A_j, \quad j=1, \dots, k \quad (13)$$

これより

$$\lambda_{\min}(Q) \geq \sum_{j=1}^k u_j \lambda_{\min}(Q_j) \quad (14)$$

証明 (12) 式を帰納法により示す。 $k=1$ のとき, (12) 式が等号で成り立つことは自明である。 $k=k-1$ のときまで正しいとして, $k=k$ のとき (12) が成り立つことを示す。まず (11) の行列 A を次のように書き直す。

$$A = (1-u_k)B_1 + u_k B_2, \quad 0 \leq u_k \leq 1 \quad (15)$$

ただし

$$B_1 = \sum_{j=1}^{k-1} \bar{u}_j A_j, \quad B_2 = A_k \quad (16)$$

ここで

$$\bar{u}_j = u_j / (1-u_k), \quad j=1, \dots, k-1 \quad (17)$$

(15) の行列 A に対して, $Q = P - A^T P A$ を定義すれば次の不等式が容易に得られる。(たとえば参考文献5)の補題2参照)

$$Q \geq (1-u_k)R_1 + u_k R_2 \quad (18)$$

ただし

$$R_i = P - B_i^T P B_i, \quad i=1, 2$$

ここで, $\bar{u} = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{k-1}]^T$ は Ω_{k-1} の要素となることに注意する。したがって (16) 式の B_1 は $A_1, \dots, A_{k-1}$ を頂点とするポリトープの要素であるから帰納法の仮定より

$$R_1 \geq \sum_{j=1}^{k-1} \bar{u}_j Q_j = \frac{1}{1-u_k} \sum_{j=1}^{k-1} u_j Q_j$$

$$R_2 = P - A_k^T P A_k = Q_k$$

これと (18) 式より (12) を得る。

最後に (14) 式は $u_i \geq 0$ および対称行列の固有値に対する不等式

$$\lambda_{\min}(X+Y) \geq \lambda_{\min}(X) + \lambda_{\min}(Y) \quad (19)$$

より明らかである。(証明終)

補題2を使えば, 対称行列 $P > 0$ を用いてポリトープの安定度下界を計算することができる。

【補題3】 $P \in R^{n \times n}$ は正定値対称行列であるとする。

このとき

$$\alpha := \min \left\{ \sum_{j=1}^k u_j \lambda_{\min}(Q_j) : u \in \Omega_k \right\} \quad (20)$$

と定義すれば, $\alpha > 0$ のとき

$$\theta_G \geq \alpha / \lambda_{\max}(P) \quad (21)$$

証明 補題2から任意の $A = u_1 A_1 + \dots + u_k A_k$, $u \in \Omega_k$ に対して

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(Q) &= \lambda_{\min}(P - A^T P A) \\ &\geq \sum_{j=1}^k u_j \lambda_{\min}(Q_j) \geq \alpha \end{aligned} \quad (22)$$

ゆえに仮定 $\alpha > 0$ より $Q > 0$ 。したがって θ_A の評価に補題1の η_2 による結果 (9b) が適用できること, および (22) 式から

$$\begin{aligned} \theta_G &= \min_{A \in G} \theta_A \\ &\geq \min_{A \in G} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \geq \frac{\alpha}{\lambda_{\max}(P)} \end{aligned}$$

を得る。(証明終)

本節の補題1と補題3は連続時間系での結果(参考文献7)の補題1, 補題2)と符合するものである。強いて違いを挙げるとするならば, 補題2の行列不等式 (12) に対応するものは連続時間系では等式であり, したがって固有値の不等式 (14) および安定度下界の評価式 (21) は離散時間系の場合, より保守的になることが予想されることが多いである。

3. 安定度下界の最適化

補題3で与えた G の安定度下界は正定値行列 P に依存する。そこで集合 $C(\Pi)$ の中から最良の下界を与える P を求めることが考えられる。連続時間系の結果は参考文献7)の補題2に全面的によっているため, そこでの結果は平行して, 次の定理に引き写される。証明については参考文献7)を参照されたい。

$$\text{【定理1】} \quad \lambda_{\max}(P_i) = 1, \quad i=1, \dots, m \quad (23)$$

を仮定する。このとき

$$\xi(G, \Pi) := \max_{v \in \Omega_m} \min_{u \in \Omega_k} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k v_i u_j \lambda_{\min}(Q_{ij}) \quad (24)$$

として, $\xi > 0$ ならば,

$$\theta_G \geq \xi(G, \Pi) \quad (25)$$

が成り立つ。ただし

$$Q_{ij} := P_i - A_j^T P_i A_j, \quad \begin{aligned} i &= 1, \dots, m \\ j &= 1, \dots, k \end{aligned} \quad (26)$$

また (24) 式で最大を与える v の一つを $\hat{v}$ とすると, 不確定システムのすべての可能な解ベクトル $x(k)$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \|\mathbf{x}(k)\|_{\hat{P}} & \\ & \leq -[1 - \{1 - \xi(G, \Pi)\}^{1/2}] \|\mathbf{x}(k)\|_{\hat{P}} \end{aligned} \quad (27)$$

が成り立つ。ただし

$$\hat{P} = \hat{v}_1 P_1 + \hat{v}_2 P_2 + \cdots + \hat{v}_m P_m \in C(\Pi) \quad (28)$$

定理1の仮定 $\xi > 0$ をあらかじめ確かめることはできないが、適当な正の定数 $0 < \sigma < 1$ をとり、

$$G' := \{\sigma A : A \in G\} \quad (29)$$

を定義すれば、 $\xi(G', \Pi) > 0$ を保証する事ができる。実際、 $\lambda_{\min}(Q_{1j}) > 0$, $j = 1, \dots, k$ の場合は問題なく $\xi > 0$ であるので、 $\min \lambda_{\min}(Q_{1j}) \leq 0$ の場合を考えておけばよい。このときには、たとえば Π の要素 P_1 から

$$\sigma^2 < \left[1 - \frac{\min_j \lambda_{\min}(Q_{1j})}{\lambda_{\min}(P_1)} \right]^{-1} \quad (30)$$

と選べば十分である。なぜなら

$$\begin{aligned} Q &:= P_1 - (\sigma A)^T P_1 (\sigma A), \quad A \in G \\ &= (1 - \sigma^2) P_1 + \sigma^2 (P_1 - A^T P_1 A) \end{aligned}$$

に対して

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(Q) & \\ & \geq (1 - \sigma^2) \lambda_{\min}(P_1) + \sigma^2 \lambda_{\min}(P_1 - A^T P_1 A) \\ & \geq (1 - \sigma^2) \lambda_{\min}(P_1) + \sigma^2 \sum_{j=1}^k u_j \lambda_{\min}(Q_{1j}) \end{aligned}$$

を得るから、任意の $A \in G$ に対して、 Q の正定値性が保証されるためには

$$(1 - \sigma^2) \lambda_{\min}(P_1) + \sigma^2 \min_j \lambda_{\min}(Q_{1j}) > 0$$

であればよい。すなわち

$$\sigma^2 < \frac{\lambda_{\min}(P_1)}{\lambda_{\min}(P_1) - \min_j \lambda_{\min}(Q_{1j})}$$

これより(30)式を得る。このとき、 G の安定度については次のことが言える。

[系1]

$$\theta_G \geq \rho := 1 - (1 - \xi(G', \Pi))/\sigma^2 \quad (31)$$

また、 G' に対する定理1の最適解 $\hat{P}$ を用いると

$$\mathcal{A} \|\mathbf{x}(k)\|_{\hat{P}} \leq -[1 - \{1 - \rho\}^{1/2}] \|\mathbf{x}(k)\|_{\hat{P}} \quad (32)$$

が成り立つ。

証明 σA に対する指数安定度はその定義から

$$\begin{aligned} \theta_{\sigma A} &= 1 - \max_i |\lambda_i(\sigma A)|^2 \\ &= 1 - \sigma^2 \max_i |\lambda_i(A)|^2 \end{aligned}$$

したがって、 $\theta_{\sigma A}$ と θ_A との間には次の関係がある。

$$1 - \theta_{\sigma A} = \sigma^2 (1 - \theta_A) \quad (33)$$

G' の安定度については、(33)式より

$$\begin{aligned} \theta_{G'} &= \min_{A \in G} \theta_{\sigma A} \\ &= \min_{A \in G} (1 - \sigma^2 (1 - \theta_A)) \\ &= (1 - \sigma^2) + \sigma^2 \min_{A \in G} \theta_A \\ &= (1 - \sigma^2) + \sigma^2 \theta_G \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \theta_G &= 1 - (1 - \theta_{G'})/\sigma^2 \\ &\geq 1 - (1 - \xi(G', \Pi))/\sigma^2 \end{aligned}$$

を得る。(32)式を得るには補題1の η_1 の定義より

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \lambda_{\min}(QP^{-1}) = \lambda_{\min}((P - A^T P A)P^{-1}) \\ &= \lambda_{\min}\left(\frac{1}{\sigma^2}(\sigma^2 P - P + P - \sigma^2 A^T P A)P^{-1}\right) \\ &= \lambda_{\min}\left(\left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right)I + \frac{1}{\sigma^2}(P - \sigma^2 A^T P A)P^{-1}\right) \end{aligned}$$

$B = \sigma A$ とすると

$$\eta_1 = 1 - \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2} \lambda_{\min}((P - B^T P B)P^{-1})$$

ここで、系1の前の議論から、任意の $B = \sigma A \in G'$ に対して $P - B^T P B > 0$ が保証されているので、

$$\eta_1 \geq 1 - \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\lambda_{\min}(P - B^T P B)}{\lambda_{\max}(P)}$$

さらに $\xi(G', \Pi)$ の定義から

$$\eta_1 \geq 1 - (1 - \xi(G', \Pi))/\sigma^2$$

なる不等式を得る。これと(10)式から(32)を得る。

(証明終)

定理1の与える安定度下界 $\xi(G, \Pi)$ は、 $m \times k$ 支払行列 $F = \{f_{ij}\}$, $f_{ij} = \lambda_{\min}(Q_{ij})$ をもつ混合戦略が許された零和二人ゲームの値である。

4. 安定判別法としての特徴とその応用

前節までに見てきたところから、離散時間系の場合にも、 G の端点と Π の要素から定まる行列 F によって安定度下界が定まる。したがって行列 F に対する代数的条件として得られる種々の結果は連続時間系の場合と平行

したものとなる。そこで本節ではそのような結果の中で安定性判別法としての特徴とその不確定大規模システムの安定解析への応用についてのみまとめておくことにする。

4.1 安定判別法として特徴

安定度の定義から、 $\xi(G, \Pi) > 0$ のとき行列集合 G のすべての要素は安定である。これに加えて

$$A^T P A - P < 0, \quad A \in G \quad (34)$$

を満たす $P \in C(\Pi)$ が存在することが保証される。実際、安定度下界 $\xi(G, \Pi)$ は次の線形計画問題に帰着して解くことができる。

$$\text{問題 } T_1(G, \Pi) : \xi(G, \Pi) = \max w$$

$$\text{制約条件} : w - \sum_{i=1}^m v_i f_{ij} \leq 0, \quad j=1, \dots, k$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_m = 1$$

$$v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m$$

問題 T_1 を解き、その一つの最適解 $\hat{v} = [\hat{v}_1 \dots \hat{v}_m]^T$ から (28) の P を求めれば、この P が上記の不等式を満たすことは (27) 式より、 $A \in G$ に関わらず

$$\Delta \|x(k)\|_P < 0, \quad x(k) \neq 0$$

なることから理解される。

以上の議論から次の定理を得る。

【定理2】 G が安定であるための一つの十分条件は、 $\xi(G, \Pi)$ が正となることである。またこのとき問題 T_1 の最適解の一つを $\hat{v} = [\hat{v}_1 \dots \hat{v}_m]^T$ とすると、 $\|\cdot\|_{\hat{P}}$ は G に共通なリアプノフ関数となる。ただし

$$\hat{P} = \hat{v}_1 P_1 + \hat{v}_2 P_2 + \dots + \hat{v}_m P_m$$

4.2 不確定大規模システムの安定解析

対象とするシステムは次のような r 個のサブシステムからなるものである。

$$x_i(k+1)$$

$$= A_i x_i(k) + \sum_{j=1}^r h_{ij} A_{ij} x_j(k), \quad x_i \in R_i^{n_i} \\ i=1, \dots, r \quad (35)$$

ここで h_{ij} はサブシステム間の結合強度を表すパラメータである。各サブシステムが安定であるとき、全システムが安定に留まるための条件として、リアプノフ方程式

$$A_i^T P_i A_i - P_i = -Q_i, \quad Q_i = Q_i^T > 0, \quad i=1, \dots, r$$

の正定値解 P_i から得られる次の $r \times r$ 行列 W が M 行列であればよいことが知られている⁸⁾。

$$W = \{w_{ij}\}, \quad w_{ij} = \gamma_i \delta_{ij} - |h_{ij}| \zeta_{ij} \quad (36)$$

ただし

$$\gamma_i = \frac{\lambda_{\min}(Q_i)}{\lambda_{\max}(P_i) + \{\lambda_{\max}(P_i) \lambda_{\max}(P_i - Q_i)\}^{1/2}} \\ \zeta_{ij} = \lambda_{\max}^{1/2}(A_{ij}^T A_{ij}) \\ i, j=1, \dots, r$$

また δ_{ij} はクロネッカのデルタである。

この方法は特性行列 A_i が行列ポリトープ G_i 内を変動する場合にも拡張可能である。いま正定値行列 P_i を固定して、 $A_i \in G_i$ の範囲で γ_i の下界 $\Gamma_i > 0$ が求められたとすれば、(36) 式でこれを γ_i の代わりに用いて、全システムがロバスト安定であるための条件を得ることができる。

ここで次の不等式 (付録2 参照)

$$\gamma_i \geq 1 - \left\{ 1 - \frac{\lambda_{\min}(Q_i)}{\lambda_{\max}(P_i)} \right\}^{1/2} \quad (37)$$

に注意する。この関係から、第 i サブシステムに対して適当な正定値行列の組 Π_i を与えて、 $\xi(G_i, \Pi_i)$ を計算し、これから Γ_i を

$$\Gamma_i = 1 - \{1 - \xi(G_i, \Pi_i)\}^{1/2}$$

のように定めれば、任意の $A_i \in G_i$ に対して、 $\gamma_i \geq \Gamma_i$ したがって

$$\tilde{W} = \{\tilde{w}_{ij}\}, \quad \tilde{w}_{ij} = \Gamma_i \delta_{ij} - |h_{ij}| \zeta_{ij} \quad (38)$$

が M 行列である条件から、この不確定系の安定条件を得ることができる。

5. おわりに

システムの特性行列が不確定性をもっており、あるポリトープの要素であるとし知られていない場合のロバスト安定性の研究は実システムへの応用という観点からも重要な意味をもっている。本論文では、このようなシステムに指数安定度を定義し、すでに報告した連続時間系に対する安定度の下界評価法が離散時間系の場合にも平行した形で適用可能であることを確かめた。すなわち複数の正定値対称行列 $\{P_i : i=1, \dots, m\}$ とポリトープの頂点集合 $\{A_i : i=1, \dots, k\}$ から定まる行列 F を計算すれば、これを支払い行列とするある零和二人ゲームの値として安定度下界が得られる。この下界は m についての逐次プロセスを構成することで、改善可能である。またロバスト安定解析法として見たとき、ゲームの最適解からポリトープに共通なリアプノフ関数が得られることも連続系の場合と同様である。

最後に、本論文における手法はさらに広く、ロバスト極配置を想定した領域安定問題にも拡張可能であると期

待される。どのような領域がこのような結果を許すのか検討することは今後の課題として残される。

参 考 文 献

- 1) A. C. Bartlett, C. V. Hollot and H. Lin : Root Locations of an Entire Polytope of Polynomias : It Suffices to Check the Edges ; Math. Contr. Sign. Syst. , Vol. 1. No. 1, pp. 61 ~ 71 (1988)
- 2) B. R. Barmish and M. Fu : Stability of a Polytope of Matrices : Counterexamples ; IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-33, No. 6, pp. 569~572 (1988)
- 3) J. D. Cobb and C. L. DeMarco : The Minimal Dimension of Stable Faces Required to Guarantee Stability of a Matrix Polytope ; IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-34, No. 9, pp. 990~992 (1989)
- 4) K. Gu, M. A. Zohdy and N. K. Loh : Necessary and Sufficient Conditions for Quadratic Stability of Uncertain Linear Systems ; IEEE Trans. Automat. Contr. , Vol. AC-35, No 5, pp. 601~604 (1990)
- 5) K. Gu, W. J. Chai and N. K. Loh : Towards Less Conservative Stability Criterion for Discrete-Time Linear Uncertain Systems ; Proc. Amer. Contr. Conf. , pp. 1145 ~ 1149 (1990)
- 6) 小亀, 木田, 森 : 行列ポリトープの計算容易な安定規準 ; 計測自動制御学会論文集, Vol. 26, No. 9, pp. 1023~1028 (1990)
- 7) 小亀, 木田, 森 : 行列ポリトープの安定度下界とその応用 ; 電気学会論文誌 C, Vol. 111, No. 4, pp. 167~175 (1991)
- 8) M. E. Sezer and D. D. Siljak : Robust Stability of Discrete Systems ; Int. J. Contr., Vol. 48, No. 5, pp. 2055~2063 (1988)

付録 1 補題 1 の証明

任意の $\varepsilon > 0$ を用いて, 次に等式を考える.

$$\begin{aligned} P - \varepsilon^2 A^T P A &= \varepsilon^2 Q + (1 - \varepsilon^2) P \\ &= \varepsilon^2 (Q - \lambda P) \end{aligned}$$

ただし, $\lambda := 1 - (1/\varepsilon)^2$

上式右辺が正定値であるとき, εA は安定であるから, スペクトル半径 $\mu_{\varepsilon A} < 1$. したがって, A については $\mu_A < 1/\varepsilon$ であり, $\theta_A > \lambda$ となることに注意する. 上式右辺が正定値となるのは後にみるように λ を用いると

$$\lambda < \lambda_{\min}(QP^{-1})$$

となる範囲に限られるので, (9a) 式を得る.

(9b) 式の導出は参考文献 7) の補題 1 の場合と同様であるのでそちらを参照されたい.

付録 2 (37) 式の証明

P, Q を正定値対称行列として

$$\gamma = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P) + \{\lambda_{\max}(P)\lambda_{\max}(P-Q)\}^{1/2}}$$

とするとき $P \geq Q$ ならば

$$\gamma \geq 1 - \left\{ 1 - \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \right\}^{1/2}$$

となることを示す.

$P \geq Q$ のとき, 対称行列の固有値に対する不等式

$$0 \leq \lambda_{\max}(P-Q) \leq \lambda_{\max}(P) - \lambda_{\min}(Q)$$

より

$$\begin{aligned} \gamma &\geq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P) + \{\lambda_{\max}(P) - \lambda_{\max}(P)\lambda_{\min}(Q)\}^{1/2}} \\ &= \frac{\lambda_{\max}(P) - \{\lambda_{\max}^2(P) - \lambda_{\max}(P)\lambda_{\min}(Q)\}^{1/2}}{\lambda_{\max}^2(P) - \{\lambda_{\max}^2(P) - \lambda_{\max}(P)\lambda_{\min}(Q)\}} \\ &\quad \times \lambda_{\min}(Q) \\ &= \frac{\lambda_{\max}(P) - \{\lambda_{\max}^2(P) - \lambda_{\max}(P)\lambda_{\min}(Q)\}^{1/2}}{\lambda_{\max}(P)} \\ &= 1 - \left\{ 1 - \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \right\}^{1/2} \end{aligned}$$