放物型分布定数系のガラーキン近似法における静特性の補償について*

今井 純**・行友雅徳***・相良節夫****

On a Static Compensation in the Galerkin Approximation Method for a Parabolic Distributed System*

Jun IMAI**, Masanori YUKITOMO*** and Setsuo SAGARA****

For linear stable time-independent parabolic distributed parameter systems, we propose a static compensation scheme in the Galerkin method to obtain reduced order lumped models whose frequency responses are consistent with the original one in wider range. We show that a scheme for boundary inputs can be generalized to one for distributed inputs in terms of static compensation, and that a unified approach can be developed which are practically applicable for various types of input.

The relationship between proposed and conventional models are clarified by using a modal structure of the approximation model, in the case that the eigenfunction is employed for the coordinate function.

A numerical study shows that the proposed scheme can be applied to the problems in a unified way and yields more efficient models for systems with distributed as well as boundary inputs.

1. 序 論

空間分布の挙動が本質となるような物理現象の多くは、偏微分方程式および境界条件などで記述される分布定数系によりモデル化される。一般に分布定数系は無限次元を有し、それに関するパラメータ推定問題、制御系設計問題を実際に解くためには、何らかの集中定数系近似が不可欠である^{1), 2)}。偏微分方程式で表わされる系の近似手法には差分法、重みつき残差法 (MWR) などが知られているが、特に MWR は有効な手法として広く応用されている³⁾。熱交換器やむだ時間の系への応用に関する報告^{4), 5)}によると、MWR による近似モデルは、低い次数でも低周波数の入力のもとで元の系と良い一致を

示し、次数を大きく取るに従って一致する範囲が高い周波数に及ぶようになるといわれている。しかしながらこのような望ましい性質は、座標関数の選択に大きく影響されるため、低周波数入力に対する空間分布を満足に表現できないという理由で、無視できない誤差が生じることもある。

本論文では MWR による良好な入力応答を有する低次元モデルの構成を目的として、モデルの静特性すなわちステップ入力に対する定常分布に着目する。静特性の誤差は、低域をはじめとして全周波数領域の特性に影響を及ぼすことが本研究の動機であり、このような定常特性の問題は、集中定数系の低次元化問題においても考察されている⁶⁾。MWR の適用における従来の手法によると、システムの入力影響関数の特異性が強いとき、限られた項数では系の静特性の十分な表現が困難である。そこで本論文では、全空間領域にわたる近似状態の静特性誤差を補償する手法を提案する。これは境界入力を持つ系に対する手法を、分布入力を持つ系について静特性補償の観点から一般化し、従来の手法を実用的な意味で統合化したものとなっている。

近似手法に関して多くの場合、その近似項数を大きく

* 原稿受付 1991. 11. 1.

** 九州工業大学 情報工学部 Faculty of Computer Science and Systems Engineering, Kyushu Institute of Technology ; Kawazu 680-4, Iizuka, Fukuoka 820, JAPAN

*** 九州大学 工学部 Faculty of Engineering, Kyushu University ; Hakozaki, Fukuoka 812, JAPAN

**** 福岡工業大学 工学部 Faculty of Engineering, Fukuoka Institute of Technology ; Wajiro, Fukuoka 812, JAPAN

Key Words : parabolic distributed parameter systems, finite - dimensional approximation, the Galerkin method, static compensation, frequency response.

取ったときの厳密解への収束性が示されているが、これは一つのいわゆる必要条件に過ぎない。実際への応用において近似項数は、たかだか数項しか用いられないことがほとんどであるため、そのようなモデルでも、元の系の主要な特性を保存する手法の開発がこれまでも望まれてきた。

本手法により、いわゆる分布入力の場合だけでなく、境界入力を持つ系の例題についても、低次元で低域特性に優れた近似モデルの得られることが、周波数特性およびその誤差の比較により示される。

2. 重みつき残差法による近似モデル

有界な空間領域 $\Omega \subset R^r$, $1 \leq r \leq 3$ を考え、その境界を $\partial\Omega$ で表わす。 Ω 上で定義された状態 $u(t, x)$, $x := (x_1, \dots, x_r) \in \Omega$, $t > 0$ の時間的空間的挙動が、(1)~(3)式で与えられる放物型分布定数システムで記述されるとする：

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \mathcal{A}u(t, x) + b(x)f(t), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \quad (1)$$

$$\beta(x)u(t, x) + (1 - \beta(x)) \frac{\partial u}{\partial \nu}(t, x) = 0, \quad 0 \leq \beta(x) < 1, \quad x \in \partial\Omega \quad (2)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (3)$$

ここで $\mathcal{A}$ は楕円型偏微分作用素で $\mathcal{A}\varphi = \alpha \Delta \varphi = \alpha(\partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_r^2)\varphi$ ($\alpha > 0$ は定数)、また $\partial/\partial \nu$ は境界 $\partial\Omega$ についての外向きの法線微分を表わす。

偏微分方程式(1)式の $b(x)$ は入力影響関数と呼ぶ。境界条件(2)式右辺にいわゆる境界入力が見れる場合も、それは超関数的な入力影響関数を持つ分布入力へ変換することができる⁷⁾。(1)~(3)式には一意な解が存在すると仮定し、またここでの系は漸近安定とする。本論文では簡単のため、1入力の場合を説明するが、多入力の場合への拡張は極めて容易である。

Ω 上で定義された互いに1次独立な座標関数 $\{\phi_i(x), i=1, \dots, N\}$ と $\phi(x)$ を用い、 $u(t, x)$ の近似解 $u^N(t, x)$ を次のように仮定する。

$$u^N(t, x) := f(t)\phi(x) + \sum_{i=1}^N U_i(t)\phi_i(x) \quad (4)$$

ここで $U_i(t)$, $i=1, \dots, N$ は近似モデルの状態変数に対応する[†]。方程式残差 $R(t, x) := \partial u^N/\partial t - \mathcal{A}u^N - bf$ についての条件 $\langle R^N(t, \cdot), \phi_i \rangle = 0$, $t > 0$, $i=1, \dots, N$ (ただし $\langle \phi, \phi \rangle := \int_{\Omega} \phi(x)\phi(x)dx$) より次式のような近似

モデルが導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle U^N(t, \cdot), \phi_i \rangle &= \langle \mathcal{A}U^N(t, \cdot), \phi_i \rangle + \langle \mathcal{A}\phi + b, \phi_i \rangle f(t) \\ &\quad - \langle \phi, \phi_i \rangle \frac{df}{dt}(t), \quad t > 0, \quad i=1, \dots, N \quad (5) \\ \langle U^N(0, \cdot), \phi_i \rangle &= \langle u_0(\cdot) - \phi f(0), \phi_i \rangle, \\ &\quad i=1, \dots, N \quad (6) \\ u^N(t, x) &= U^N(t, x) + \phi(x)f(t), \\ &\quad t > 0, \quad x \in \Omega \quad (7) \end{aligned}$$

ただし $U^N(t, x) := \sum_{i=1}^N U_i(t)\phi_i(x)$ である。

ここで(4)式に補助項 $\phi(x)f(t)$ を導入したため(5)式の表現には入力 $f(t)$ の時間微分が生じており、また初期条件の(6)式には入力の初期値 $f(0)$ が表われている。

この問題に関し、Seidman は境界入力を持つ系についてその非同次境界条件を満足させるため(4)式と同様な補助項を考慮したが、その際 $\phi(x)$ に次のような条件を付して近似モデルを得ている⁸⁾：

$$\langle \phi, \phi_i \rangle = 0, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (8)$$

次の補題は、補助項 $\phi(x)$ に座標関数成分を任意に加えても近似モデルは不変であることを表わしている。

【補題】⁹⁾ $u_{(k)}^N(t, x)$, $k=1, 2$ は(5)~(7)式の $\phi(x)$ におのおの $\phi_{(k)}(x)$ を用いて得られる $u^N(t, x)$ を表わすとす。このとき $\phi_1(x) - \phi_2(x)$ の各要素が $V_N := \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ に含まれるならば、各 $f(t)$, $t > 0$ について次式が成り立つ。

$$u_{(1)}^N(t, x) = u_{(2)}^N(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \quad (9)$$

すなわち P^N を V^N への射影作用素とすると、補助項 $\phi(x)$ の座標関数成分 $(P^N \phi)(x)$ がどのようなものであっても近似解 $u^N(t, x)$ には全く影響しない。そこで $\phi(x)$ を座標関数に対し直交化させた $\hat{\phi}(x) := (I - P^N)\phi(x)$ へと取り直し、改めて(5)~(7)式の近似モデルを表現しなせば次式のようなになる：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle U^N(t, \cdot), \phi_i \rangle &= \langle \mathcal{A}U^N(t, \cdot), \phi_i \rangle \\ &\quad + \langle \mathcal{A}(I - P^N)\phi + b, \phi_i \rangle f(t), \\ &\quad i=1, \dots, N, \quad t > 0, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\langle U^N(0, \cdot), \phi_i \rangle = \langle u_0, \phi_i \rangle, \quad i=1, \dots, N \quad (11)$$

$$u^N(t, x) = U^N(t, x) + (I - P^N)\phi f(t), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \quad (12)$$

ここで I は恒等作用素である。(10)~(12)式は $U^N(t) := [U_1(t) \ U_2(t) \ \dots \ U_N(t)]$ として次式のように表わされる。

[†] $\phi(x)$ の具体的な形については後述する。

$$\frac{dU^N}{dt}(t) = A^N U^N(t) + B^N f(t) \quad (13)$$

$$U^N(0) = M^{-1} \langle \Phi, u_0 \rangle$$

$$u^N(t, x) = \bar{C}^N(x) U^N(t) + \bar{D}^N(x) f(t) \quad (14)$$

ただし

$$\begin{cases} A^N = M^{-1} \langle \Phi, \mathcal{A} \Phi^T \rangle \\ B^N = M^{-1} \langle \Phi, \mathcal{A} \phi + b \rangle - A^N M^{-1} \langle \Phi, \phi \rangle \\ \bar{C}^N(x) := \Phi^T(x) \\ \bar{D}^N(x) := \phi(x) - \Phi^T(x) M^{-1} \langle \Phi, \phi \rangle \\ \Phi(x) := [\phi_1(x) \ \phi_2(x) \ \cdots \ \phi_N(x)]^T \\ \mathcal{A} \phi := [\mathcal{A} \phi_1 \ \cdots \ \mathcal{A} \phi_N]^T, \quad M := \langle \Phi, \Phi^T \rangle \end{cases} \quad (15)$$

ここで記号 $\langle \Phi, \mathcal{A} \Phi^T \rangle$ は、行列 $\Phi(\mathcal{A} \Phi)^T$ の Ω 上での各要素の積分であり、そのほかも同様である。

3. モデルの静特性

(1)～(3)式において単位ステップ関数の $f(t)$ に対する $t \rightarrow \infty$ の時の空間分布を $\bar{u}(x)$ とする。すなわち $\bar{u}(x)$ は $\mathcal{A}$ と境界条件、および $b(x)$ から一意に定まり次式を満足する。

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \bar{u}(x) + b(x) &= 0, \quad x \in \Omega \\ \beta(x) \bar{u}(x) + (1 - \beta(x)) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}(x) &= 0, \quad x \in \partial \Omega \end{aligned} \quad (16)$$

これは楕円型方程式(領域が1次元の場合は常微分方程式)の境界値問題であり、系が定係数の場合は手計算で解析的に、また系が複雑な場合でも有限要素法などの数値解析手法を用いて容易に高精度な解が求められる。

近似モデルのステップ入力に対する定常解 $\bar{u}^N(x)$ は次を満足する：

$$\begin{cases} \mathcal{A}^N \bar{U}^N + P^N \{ \mathcal{A} (I - P^N) \phi + b \} = 0 \\ \bar{u}^N = \bar{U}^N + (I - P^N) \phi \end{cases} \quad (17)$$

ここで $\mathcal{A}^N = P^N \mathcal{A} P^N$ とすると静特性の誤差は次のように計算される：

$$\bar{u}(x) - \bar{u}^N(x) = \{ I - (\mathcal{A}^N)^{-1} P^N \mathcal{A} \} (\bar{u} - \phi) \quad (18)$$

すなわち近似モデルがシステムと一致した静特性を持つためには $\phi(x)$ が $\bar{u}(x)$ に等しければ十分である。

以上をまとめると、まず(16)式を解いてステップ入力に対する定常解 $\bar{u}(x)$ を求め、次に $\phi(x) := \bar{u}(x)$ として(15)式を計算すれば静特性誤差のない近似モデルが得られることになる。

このようなモデルの状態変数 $U^N(t)$ は、近似解 $u^N(t, x)$ の座標関数成分を表わしていることが初期条件(11)式、

および(12)式よりわかる。近似モデルの動的な挙動を決定する A^N 、また座標関数の形状そのものを表わす $\bar{C}^N$ は $\phi(x)$ には無関係である。 B^N は $\phi(x) = u(x)$ のとき $B^N = -A^N M^{-1} \langle \Phi, \bar{u} \rangle$ のように表わせるが、これは $\phi(x) = 0$ のときの $B^N = M^{-1} \langle \Phi, b \rangle$ と一致する。すなわち(15)式で $\phi(x) = 0$ と取った場合は分布入力を持つ系についての従来法に対応する。 $\bar{D}^N(x)$ は単位ステップ入力についての定常分布の座標関数に対する直交成分であり、定常分布のうち座標関数では表現できない成分を入力に応じて解 $u^N(t, x)$ へ補う役割を果たしている。

4. 固有関数近似における誤差

本章以下では、(1)～(3)式において $\mathcal{A}$ が負の実固有値 $0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$ を持ち、その順に対応する固有関数 $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots$ は内積 $\langle \phi, \phi \rangle := \int_{\Omega} \phi \phi dx$ ならびにノルム $\|\phi\| := \langle \phi, \phi \rangle^{1/2}$ で正規直交であり、(1)～(3)式の解 $u(t, x)$ が次のように記述できると仮定する：

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \phi_n(x) \quad (19)$$

ただし $u_n(t)$ は次で与えられる：

$$u_n(t) = \langle \phi_n, u_0 \rangle e^{\lambda_n t} + \int_0^t \langle \phi_n, b \rangle f(\tau) e^{\lambda_n(t-\tau)} d\tau \quad (20)$$

以下 Ω 上で定義された関数 $\varphi(x)$ について $\varphi_n := \langle \varphi, \phi_n \rangle$ を $\varphi(x)$ の第 n 固有関数成分と呼ぶことにする。いま座標関数を固有関数系の最初の N 個、 $\{\phi_1(x), \cdots, \phi_N(x)\}$ に選ぶ場合を考えると、近似モデルの解(12)式は次のように展開して表わされる。

$$\begin{aligned} u^N(t, x) &= \sum_{i=1}^N U_i(t) \phi_i(x) \\ &\quad + \left\{ \phi(x) - \sum_{i=1}^N \langle \phi_i, \phi \rangle \phi_i(x) \right\} f(t) \end{aligned} \quad (21)$$

ここで

$$U_i(t) = e^{\lambda_i t} \langle \phi_i, u_0 \rangle + \int_0^t \langle \phi_i, b \rangle f(\tau) e^{\lambda_i(t-\tau)} d\tau \quad (22)$$

$u^N(t, x)$ の第 n 座標関数成分 $u_n^N(t)$ は $n = 1, \cdots, N$ については $U_n(t)$ と等しく、 $n \geq N+1$ については $\langle \phi_n, \phi \rangle f(t)$ となることからわかる。(16)式の第1式 $\mathcal{A} \bar{u} + b = 0$ より $\langle \phi_n, b \rangle = -\langle \phi_n, \mathcal{A} \bar{u} \rangle = -\lambda_n \langle \phi_n, \bar{u} \rangle$ となるので、以上により、 $u_n(t), u_n^N(t)$ は次のように整理される：

$$u_n(t) = \langle \phi_n, u_0 \rangle e^{\lambda_n t} - \lambda_n \int_0^t \langle \phi_n, \bar{u} \rangle f(\tau) e^{\lambda_n(t-\tau)} d\tau \quad (23)$$

$$u_n^N(t) = \begin{cases} \langle \phi_n, u_0 \rangle e^{\lambda_n t} \\ -\lambda_n \int_0^t \langle \phi_n, \bar{u} \rangle f(\tau) e^{\lambda_n(t-\tau)} d\tau, & 1 \leq n \leq N \\ \langle \phi_n, \phi \rangle f(t), & n \geq N+1 \end{cases} \quad (24)$$

すなわち f から u_n , u_n^N への伝達特性はそれぞれ次のようになることがわかる:

$$G_{u_n f}(s) = \frac{\langle \phi_n, \bar{u} \rangle}{1 + \frac{s}{-\lambda_n}} \quad (25)$$

$$G_{u_n^N f}(s) = \begin{cases} \frac{\langle \phi_n, \bar{u} \rangle}{1 + \frac{s}{-\lambda_n}}, & 1 \leq n \leq N \\ \langle \phi_n, \phi \rangle, & n \geq N+1 \end{cases} \quad (26)$$

$\varepsilon_n := u_n - u_n^N$ を第 n 固有関数成分における誤差とすると, $n \geq N+1$ なる n についての f から ε_n への伝達関数 $G_{\varepsilon_n f}(s)$ は $G_{u_n f}(s) - G_{u_n^N f}(s)$ により求められ次のように整理される:

$$G_{\varepsilon_n f}(s) = \langle \phi_n, \phi - \bar{u} \rangle - \langle \phi_n, \bar{u} \rangle \frac{\frac{s}{-\lambda_n}}{1 + \frac{s}{-\lambda_n}} \quad (27)$$

$n \geq N+1$

$\phi(x) = \bar{u}(x)$ の場合, 第1項は0となるので, $G_{\varepsilon_n f}(s)$ は微分時定数 $1/(-\lambda_n)$ を持つ1次の不完全微分要素となる. また $\phi(x) = 0$ の場合は明らかに $G_{\varepsilon_n f}(s) = \langle \phi_n, \bar{u} \rangle / (1 + s/(-\lambda_n))$ という一次遅れ要素になる.

5. 数値例

以下の例題では1次元の空間領域 $\Omega = (0, 1)$ を考え, $\mathcal{A} = \alpha \partial^2 / \partial x^2$ (ただし $\alpha > 0$ は定数), $\beta(0) = \beta(1) = 1$ とする. すなわち

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + b(x)f(t), \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad u(0, x) = 0 \quad (28)$$

とする.

システムの正規化した固有関数 $\{\sqrt{2} \sin n\pi x, n = 1, 2, \dots\}$ から座標関数を選び出して近似モデルを構成する. 入力に対するシステムの動特性を把握するため, システムならびに近似モデルの入力 f から Ω 上の x における状態 $u(\cdot, x)$ および $u^N(\cdot, x)$ までの周波数応答を調べる. (28)式の分布定数系の厳密な伝達関数 $G(s, x)$

は Laplace 変換により求めることができ, 近似モデルの伝達関数 $G^N(s, x)$ は (15) 式の結果を用いて $\bar{D}^N(x) + \bar{C}^N(x)(sI - A^N)^{-1}B^N$ により求められる. 誤差の大きさは, 加法的誤差 $\mathcal{A}^N(s, x) := G(s, x) - G^N(s, x)$ の全空間領域における最大絶対値により評価する. すなわち, 加法的誤差 $\mathcal{A}^N(j\omega, x)$ の $x \in \Omega$ に関する最大絶対値 $\max_{x \in \Omega} |\mathcal{A}^N(j\omega, x)|$ を極値探索により求め, 各周波数 ω でプロットする. これは単位正弦波入力のもとでの定常状態における近似誤差の時間的空間的な最大値を, 各周波数 ω について示したのになっている.

【例題1】区間上の一様入力

本例題では一様入力を例にして本手法がどのように適用できるかを説明する. 与えられた入力影響関数 $b(x)$ は次のようなものである:

$$b(x) = \begin{cases} a, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

ステップ入力に対する定常分布は, 定常問題 $\alpha \bar{u}''(x) + b(x) = 0$ for $0 < x < 1$, $\bar{u}(0) = \bar{u}(1) = 0$ の解として次式のように求められる:

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \cdot x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{72}, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \cdot (1-x), & x < \frac{2}{3} \leq 1 \end{cases} \quad (29)$$

Fig. 1 には $b(x)$, $\bar{u}(x)$ の概形を示す. 入力影響関数 $b(x)$ が領域上で対称なので, 座標関数は固有関数から対称な形状のもののみを採用し, $\phi_n(x) := \sqrt{2} \sin(2n-1)\pi x$, $n = 1, \dots, N$ とする. 従来法 ($\phi(x) = 0$) と本手法 ($\phi(x) = \bar{u}(x)$) の場合についてそれぞれ $N = 1, 2, 4$ における (15) 式を求める. $A^N, \bar{C}^N(x)$ には $\phi(x)$ は関係せず, また 3. に述べたように, この場合は B^N にも違いは生じない. 本手法に現れる $\bar{D}^N(x)$ は $\bar{u}(x)$ の座標関数以外の成分を静的に補償している.

Fig. 1 The forcing function $b(x)$ and the corresponding steady state distribution of $\bar{u}(x)$

このときの $G(s, x)$ は次のようになる：

$$G(s, x) = \begin{cases} g(s) \sinh \sqrt{\frac{s}{ax}}, & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ g(s) \sinh \sqrt{\frac{s}{ax}} + \frac{1 - \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} \left(x - \frac{1}{3}\right)}{\frac{s}{a}}, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ g(s) \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} (1-x), & \frac{2}{3} < x \leq 1 \end{cases} \quad (30)$$

ここで

$$g(s) := \frac{\cosh \sqrt{\frac{s}{a}} - \cosh 2\sqrt{\frac{s}{a}}}{\left(\frac{s}{a}\right) \sinh \sqrt{\frac{s}{a}}}$$

Fig. 2(a) にシステムおよびモデルのゲイン特性、位相特性を $x = 1/4$ について示す。Fig. 2(b) には誤差の最大絶対値のプロットを示す。従来法によるモデルの誤差の大きさは、低い周波数域で大きく、また周波数が高くなると位相の近似誤差が大きくなる。本手法の誤差は ω が大きいところでは一定であるが、低周波数域へ向かうに従って 20dB/dec の割合で減少していく。これは固有関数近似の誤差が入力信号の 1 次微分に比例するとした 4. の結果を裏付けている。静特性補償により $N = 1$ のときは $\omega/a < 10^2$ 、 $N = 4$ のときは $\omega/a < 10^3$ の領域で従来法と比較して改善されている様子がわかる。 $N = 1$ で静特性補償を行わない場合は、低周波数域では 5×10^{-3} の誤差があるのに対し、静特性補償を行うと $\omega/a < 10$ の領域ならば 7×10^{-4} 未満であることがわかる。本手法によると少ない近似項数でも入力の変動が遅いときに高い精度が維持でき、近似項数を多く取ればより速い入力に対して追従できるようになる。

【例題 2】点入力

領域中央の 1 点 ($x = 1/2$) における次式のような入力の形状を考える：

$$b(x) := a\delta\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

ただし $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。

これに対する定常問題の解は次のようになる：

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1-x}{2}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \quad (31)$$

Fig. 2 Example 1. uniform input on $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

例題 1 と同じ座標関数を用い同様に近似モデルを構成する。 A^N , $\bar{C}^N(x)$ は例題 1 と同じになる。システムの伝達関数は次のようになる：

$$G(s, x) = \frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}}}{\sqrt{\frac{s}{a}} \sinh \sqrt{\frac{s}{a}}} \times \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} \left(1 - 2 \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \quad (32)$$

$x = 1/2$ における周波数特性の比較を Fig. 3(a) に示す。Fig. 3(b) に誤差のプロットを示すが、その性質に関しては例題 1 の場合との類似点が明確である。静特性補償により改善される帯域は例題 1 の場合より広い。

【例題 3】ディリクレ境界入力

この例題では本手法が境界入力という特異性の強い場合にも適用可能であることを説明する。 $\delta'(x)$ を $\delta(x)$ の微分として次のような入力影響関数を考える：

$$b(x) = -a\delta'(x)$$

これはすなわち次のような境界入力を持つ問題に対応す

(a) Bode plots at $x = \frac{1}{2}$ (b) Maximum additive error plots
(solid : proposed, dashed : conventional)Fig. 3 Example 2. point input at $x = \frac{1}{2}$ (a) Bode plots at $x = \frac{1}{6}$

(b) Maximum additive error plots

Fig. 4 Example 3. Dirichlet boundary input at $x=0$

る⁹⁾.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), t > 0 \quad (33)$$

$$u(t, 0) = f(t), \quad u(t, 1) = 0, \quad u(0, x) = 0$$

定常問題 $\alpha \phi''(x) - \alpha \delta'(x) = 0$, $\phi(-0) = \phi(1) = 0$ の解を次のように考える:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1-x, & x \in (0, 1] \end{cases} \quad (34)$$

座標関数として $\phi_n = \sqrt{2} \sin n\pi x$, $n=1, \dots, N$ を用いる. この場合に得られる近似モデルは結果的に参考文献 10) の手法によるものと一致する.

ここで周波数特性は次のようになる.

$$G(s, x) = \frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} (1-x)}{\sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}}} \quad (35)$$

$x=1/6$ における周波数特性および最大誤差のプロットを Fig. 4(a) および Fig. 4(b) に示す.

静特性補償は境界入力取り扱いにおいては従来より暗に含まれていたものであるが^{10), 11)}, 分布入力を持つ系に対してもそれに基づいて手法の一般化が可能で, それにより境界入力と分布入力の取り扱いを統合化できることがわかる.

以上, 静特性の占める役割が大きい放物型分布定数系のガラーキン法による近似では, 静的な補償を併用することでさらに有効な低次元モデルを構成できることを例題により説明した.

6. 結 論

線形時不変で安定な放物型分布定数系に対し, 低次元の有限次元近似モデルの構成を目的として, 静特性と動特性を分離したガラーキン法の改良手法を提案した. 周波数領域における数値的な比較を行った結果, 本手法は境界入力と分布入力を区別することなく統合的に適用可能であり, いずれの場合も低次元で低域特性に優れた近似モデルを与えることが示された.

参 考 文 献

- 1) 相良, 中野: 分布定数系同定へのアプローチ; 計測と制御, Vol. 19, No. 11, pp. 1035~1043 (1980)
- 2) 嘉納: 分布定数系の集中系近似モデル; 計測と制御, Vol. 19, No. 11, pp. 1044~1050 (1980)
- 3) フィンレイソン (鷲津ほか (訳)): 重みつき残差法と変分原理, 培風館 (1974)
- 4) 嘉納: 重みつき残差法による分布系熱交換器の近似; 計測自動制御学会論文集, Vol. 12, No. 6, pp. 632~636 (1976)
- 5) 藤川: 重みつき残差法の適用によるむだ時間系の集中定数系近似; 計測自動制御学会論文集, Vol. 15, No. 5, pp. 609~615 (1979)
- 6) M. R. Chidanbara and E. J. Davison: Correspondence on a Method for Simplifying Linear Dynamic Systems; IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC12, No. 2, pp. 119~121 (1967)
- 7) A. V. Balakrishnan: Applied Functional Analysis, Springer (1976)
- 8) T. I. Seidman (S. G. Tzafestas (ed.)): Approximation Methods for Distributed Parameter Systems; Distributed Parameter Control Systems, Theory and Application, Pergamon Press (1982)
- 9) 相良, 今井: 放物型分布定数システムの境界パラメータのガラーキン近似による同定; 九州大学工学集報 Vol. 63, No. 3, pp. 205~211 (1990)
- 10) 相良, 今井: 境界入力を持つ放物型分布定数系のガラーキン法による近似モデルについて; 計測自動制御学会論文集, Vol. 27, No. 12, pp. 1366~1373 (1991)
- 11) R. Vichnevetsky: Use of Functional Approximation Methods in the Computer Solution of Initial Value Partial Differential Equation Problems; IEEE Trans. Computers, Vol. C-18, No. 6, pp. 499~512 (1969)